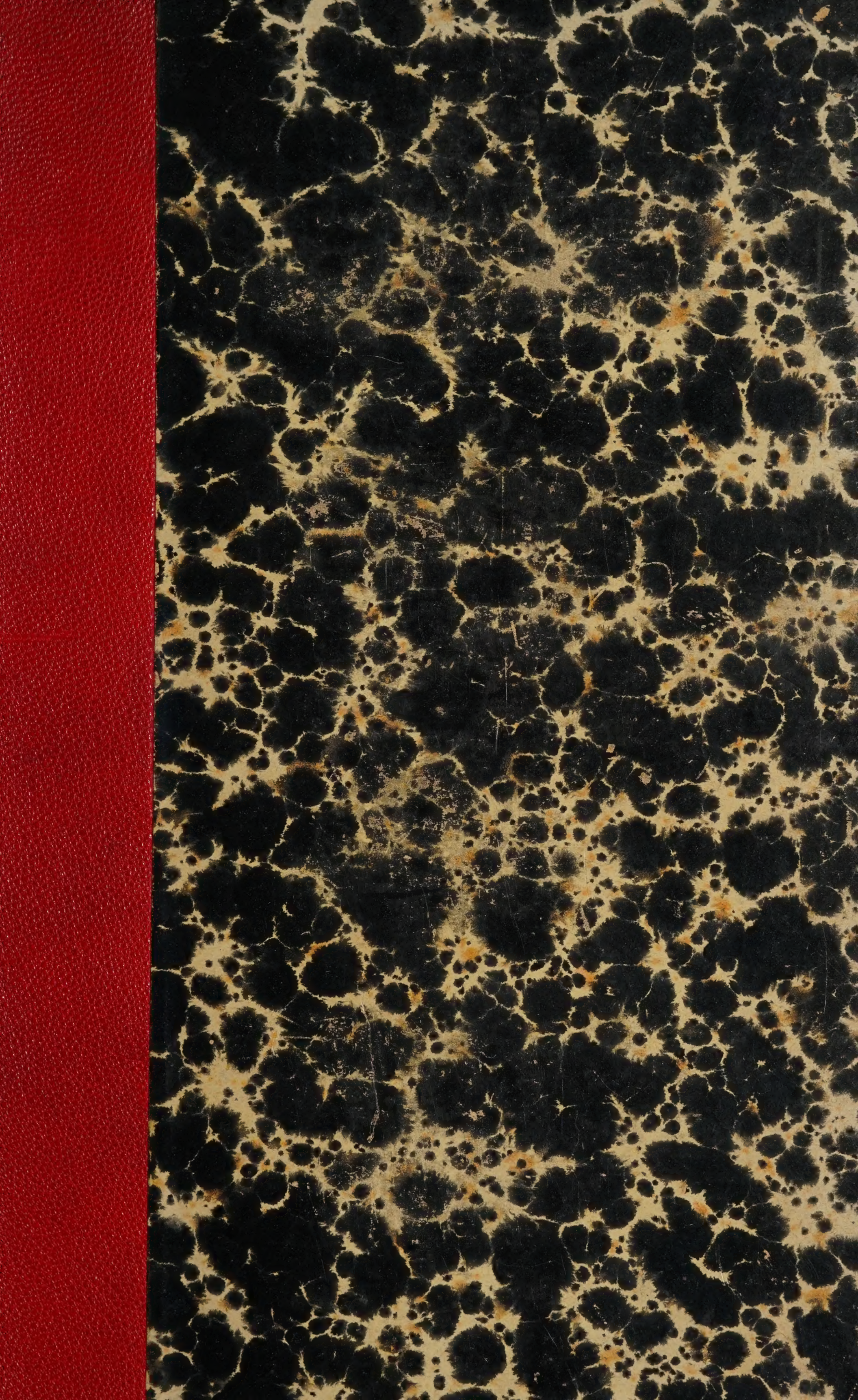


ŒUVRES

DE

G.-H. HALPHEN

DU MÊME AUTEUR.

Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.

1re partie : *Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en séries.* Un volume in-8 de VIII-492 pages; 1886....... 15 fr.

2e partie : *Applications à la mécanique, à la physique, à la géodésie, à la géométrie et au calcul intégral.* Un volume in-8 de IV-659 pages; 1888.. 20 fr.

3e partie : *Fragments.* (*Quelques applications à l'algèbre et en particulier à l'équation du 5e degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.*) Publié par les soins de la Section de géométrie de l'Académie des Sciences. Un volume in-8 de XVI-272 pages; 1891.. 8 fr. 50

Œuvres publiées par les soins de C. Jordan, H. Poincaré, E. Picard, avec la collaboration de E. Vessiot.

Tome I : Un vol. in-8, de XLIV-570 pages; 1916................ 20 fr.

Tome II : Un vol. in-8 de VIII-560 pages et un portrait; 1918..... 32 fr.

(Le Tome IV et dernier est en préparation).

ŒUVRES

DE

G.-H. HALPHEN

PUBLIÉES PAR LES SOINS

DE

C. JORDAN, H. POINCARÉ, É. PICARD,

AVEC LA COLLABORATION

DE

E. VESSIOT.

TOME III.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1921

Georges HALPHEN

Par M. Camille JORDAN.

Journal de mathématiques pures et appliquées, 4e série, t. 5, p. 345-351 ; 1889.

Notre collaborateur et ami, M. Georges Halphen, a succombé, le 21 mai dernier, aux atteintes d'une maladie imprévue qui est venue le frapper dans toute la force de son talent.

La franchise et la loyauté de son caractère lui avaient fait des amis sincères de tous ceux qui le connaissaient; mais ils ne sont pas seuls à s'affliger d'une perte à laquelle aucun de ceux qui s'intéressent aux sciences ne saurait rester indifférent.

Les liens d'affection qui nous unissaient et la part importante qu'il a prise à ce Journal nous font un devoir de retracer, en quelques lignes, une carrière si courte et si bien remplie.

Il était né à Rouen le 30 octobre 1844. Après de brillantes études au lycée Saint-Louis, il entra à l'École Polytechnique en 1862 et en sortit, deux années après, comme officier d'artillerie. Il prit part en cette qualité à la guerre de 1870-1871 et fut décoré pour action d'éclat sur le champ de bataille de Pont-Noyelles.

En 1872, il épousa Mlle Aron. Six enfants (1) sont nés de cette heureuse union, qu'aucun nuage ne vint jamais assombrir. A défaut d'une longue existence, Halphen aura eu du moins le bonheur inestimable de trouver dans la douce intimité de son foyer une consolation dans les peines de la vie et un encouragement pour ses travaux.

(1) Un septième a vu le jour après la mort de son père.

En 1873, il entra à l'École Polytechnique comme répétiteur, fonction qu'il exerça pendant quatorze ans. Chargé en outre des examens d'admission pendant les trois dernières années, il laissa, dans ce trop court passage, le souvenir d'un examinateur incomparable.

En 1886, il fut élu membre de l'Académie des Sciences, à la presque unanimité des suffrages.

L'année suivante, il se décida à quitter l'École Polytechnique pour prendre un service plus actif dans l'armée. Cette détermination inspira un peu d'inquiétude à quelques-uns de ses amis. Ils se demandaient si ces nouvelles fonctions ne l'obligeraient pas à ralentir son activité mathématique, et si l'acquisition faite par l'armée d'un excellent officier serait une compensation suffisante au dommage à craindre pour la science. Qu'auraient-ils dit, s'ils avaient pu prévoir que, consacrant les jours à ses devoirs professionnels et les nuits à ses travaux scientifiques, leur pauvre ami, accablé sous cette tâche écrasante, serait si promptement ravi à leur affection !

Mais il ne mourra pas tout entier. Les œuvres qu'il a laissées feront vivre son nom tant qu'il y aura des mathématiques.

Son premier travail, *Sur l'intégration des équations linéaires* date de 1864; mais c'est seulement en 1869 qu'il commença à donner sa mesure par ses recherches sur la géométrie énumérative. Cette branche de la science, alors toute nouvelle, a pour but de dénombrer les figures d'une espèce déterminée qui satisfont à un système de conditions donné.

La première question traitée par Halphen dans cet ordre d'idées est la suivante : « Trouver le nombre des droites communes à deux congruences données ». Il la résolut par une formule aussi simple qu'élégante.

Enhardi par ce premier succès, il aborda l'étude des systèmes de coniques, qui formait alors le principal objet de cette géométrie nouvelle. On s'occupait surtout de rechercher combien, dans un système de coniques défini par quatre conditions, il y en a qui satisfassent à une nouvelle condition donnée.

M. de Jonquières avait montré le premier que, dans un grand nombre de cas, le nombre cherché est égal à $\alpha\mu$, μ désignant l'ordre

du système de coniques et α un autre entier ne dépendant que de la nouvelle condition. Chasles, qui s'était jeté avec une véritable passion dans cette recherche, à laquelle il a consacré toute la fin de sa vie, avait obtenu par induction la formule plus générale $\alpha\mu + \beta\nu$, μ et ν désignant l'ordre et la classe du système, α et β deux entiers ne dépendant que de la nouvelle condition. Les exemples fournis à l'appui de cette formule étaient si nombreux et si variés que personne ne doutait plus qu'elle fût générale, bien qu'aucune démonstration tout à fait concluante n'en eût encore été apportée.

Halphen entreprit de chercher cette démonstration; en 1873, il crut même y être parvenu. C'est ainsi qu'Abel préludait à ses immortels travaux sur les équations algébriques en essayant en vain de résoudre l'équation du cinquième degré. La question présente était d'ailleurs si délicate que plusieurs géomètres éminents cédaient à la même époque à une illusion toute semblable. Il nous suffira de nommer Clebsch et M. Lindemann, qui s'est illustré depuis par sa découverte de la transcendance du nombre π.

Halphen ne tarda pas à s'assurer que certains cas singuliers échappaient à sa démonstration. Il n'était pas homme à reconnaître une erreur sans s'occuper aussitôt de la réparer. Il découvrit bientôt que ces exceptions étaient dues à la présence dans le système d'une variété de coniques dégénérées dont l'existence n'avait pas été soupçonnée avant lui, ce qui lui permit de fixer avec précision dans quels cas les formules de Jonquières et de Chasles sont applicables. Il parvint enfin à la détermination complète du nombre des coniques satisfaisant à cinq conditions quelconques. Ce nombre s'exprime symboliquement par un produit de cinq facteurs, dont chacun ne dépend que d'une seule des conditions données.

Ce beau théorème, si différent de ce qu'on avait pu prévoir, tranchait définitivement cette question si longtemps controversée. Halphen pouvait désormais aborder de nouveaux champs de recherches.

La théorie des points singuliers fixa la première son attention. Cette étude, si importante à la fois pour la géométrie et pour l'analyse, était encore peu avancée. On avait bien analysé l'influence des

« singularités ordinaires » ; mais il restait beaucoup à dire sur les singularités plus complexes. Parmi les géomètres éminents qui se sont attachés à élucider ces questions, Halphen se mit au premier rang. Fidèle à son habitude constante de creuser tous les sujets qu'il touchait et de ne rien laisser d'inachevé, il n'y consacra pas moins de quinze mémoires où sont traités successivement tous les points principaux de la théorie. Parmi les résultats aussi nombreux que variés qu'il a obtenus, nous nous bornerons à citer :

la détermination du nombre des intersections de deux courbes absorbées par un point singulier ;

celle de l'abaissement produit dans la classe et dans le genre d'une courbe par la présence d'un point singulier ;

deux démonstrations nouvelles et directes de la loi de la conservation du genre dans les transformations birationnelles ;

deux méthodes nouvelles pour transformer une courbe quelconque en une autre qui n'ait plus que des singularités ordinaires ;

la découverte de la loi régulière suivant laquelle varient les ordres et les classes des développées successives d'une courbe ;

enfin la détermination sur une courbe algébrique du nombre des points qui satisfont à une équation différentielle donnée.

En 1877, Halphen étendit la solution de ce dernier problème aux courbes gauches. Il annonçait en même temps être en mesure de traiter la même question pour les surfaces ; mais, entraîné vers d'autres recherches, il se borna à donner un exemple, en assignant le degré de la ligne des points paraboliques.

C'est, en effet, l'année suivante, qu'il présentait à la Faculté des Sciences de Paris sa mémorable thèse *sur les invariants différentiels*. Il donne ce nom aux expressions différentielles qui se reproduisent à un facteur près par une transformation homographique. Partant de cette définition, il expose un procédé qui permet de les construire successivement sans en omettre aucun.

Un autre travail, qui suivit de près le premier, contient l'extension de ces principes aux invariants différentiels des courbes gauches. Comme application de cette théorie, il forme les équations différentielles des cubiques planes et gauches, des courbes biquadratiques,

des lignes tracées sur des surfaces du second degré, etc. Ces exemples de calcul sont loin de donner une idée suffisante de la portée d'un travail par lequel la notion de l'invariance, déjà si féconde en algèbre et en géométrie, se trouvait transportée dans le calcul infinitésimal ; mais un nouveau mémoire d'Halphen ne tarda pas à la mettre en pleine lumière.

L'Académie des Sciences avait proposé comme sujet du Grand prix des sciences mathématiques pour 1880 la question suivante : « Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante. » Ce concours restera célèbre à plus d'un titre ; car c'est alors que les fonctions fuchsiennes firent leur première apparition sous la plume de M. Poincaré. Halphen, de son côté, s'était proposé de déterminer les équations linéaires réductibles par un changement de variables aux formes que l'on sait intégrer. Nous ne saurions mieux faire pour donner une idée de ce grand travail que de reproduire le texte du rapport de M. Hermite :

« Dans les travaux dont la théorie des équations différentielles a été récemment l'objet, on a eu principalement en vue d'obtenir l'intégrale dans les cas où elle peut s'exprimer par des fonctions uniformes de la variable. Les belles découvertes de M. Fuchs, qui ont joué le principal rôle dans ces recherches, servent également de base pour l'étude plus profonde et plus difficile entreprise par l'auteur du mémoire n° 1. Il part de ce fait que la transformée d'une équation différentielle linéaire obtenue en substituant à la variable indépendante une fonction quelconque d'une nouvelle variable est une équation linéaire de même ordre, et qu'il en est de même si l'on multiplie l'inconnue par une seconde fonction arbitraire de cette nouvelle variable. Cela étant, l'auteur se propose de déterminer ces deux fonctions de manière que l'équation transformée soit à coefficients constants, ou bien soit intégrable au moyen de fonctions uniformes, simplement rationnelles, ou doublement périodiques. Ces questions sont, comme l'on voit, aussi importantes que difficiles ; la solution complète et générale qui est exposée dans le mémoire montre un talent mathématique de l'ordre le plus élevé. Rien n'est plus intéres-

sant que de voir s'introduire, dans cette recherche de calcul intégral, les notions algébriques d'invariants qui ont pris naissance dans la théorie des formes, et ces nouvelles combinaisons faire apparaître les éléments cachés d'où dépend, sous ses diverses formes analytiques, l'intégration d'une équation donnée. C'est à M. Laguerre qu'est due l'idée ingénieuse et profonde des invariants et covariants des équations différentielles linéaires; il en a tiré, pour les équations du troisième et du quatrième ordre, plusieurs beaux théorèmes, et M. Brioschi s'est aussi occupé avec succès du même sujet; mais l'auteur du mémoire que nous analysons en a encore mieux fait ressortir toute l'importance. Il y joint une considération qui joue également dans ses recherches un rôle essentiel, c'est celle du genre d'une équation algébrique entre deux variables, introduite en analyse par Riemann et qui est si souvent employée dans les travaux de notre époque. Des applications exposées avec tous les détails nécessaires offrent un grand nombre de résultats entièrement nouveaux et du plus haut intérêt. Nous nous bornerons à citer comme particulièrement remarquables des équations du troisième et du quatrième ordre contenant un paramètre arbitraire, puis d'autres, d'ordre impair, se rattachant à la division de l'argument dans les fonctions elliptiques, dont la solution, qui n'est pas une fonction uniforme, est obtenue par ces transcendantes. Nous jugeons que ce mémoire a ajouté à la théorie des équations différentielles linéaires des méthodes générales et des résultats d'une haute importance, et qu'il est digne du Grand prix des sciences mathématiques. »

Encouragé par cette haute approbation, Halphen poursuivit ses recherches dans ses mémoires *Sur les invariants des équations différentielles du quatrième ordre* et *Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires*. L'objet de ces travaux est de rechercher le parti qu'on peut tirer pour l'intégration du fait que l'on connaîtrait la valeur d'une fonction entière et homogène de ses solutions.

Le jugement de l'Académie décernant à Halphen le Grand prix des sciences mathématiques était à peine rendu lorsque l'Académie de Berlin proposa comme sujet de concours pour le prix Steiner :

« La solution d'une question importante dans la théorie des courbes gauches algébriques ». Halphen, qui avait déjà publié en 1870 une première note sur la classification de ces courbes, revint à cette occasion sur son œuvre de jeunesse et envoya au concours un mémoire étendu sur ce sujet aussi difficile qu'important. Cette classification avait été poussée avec peine jusqu'aux courbes du sixième degré; Halphen établit les principes qui manquaient pour aller plus loin et montra toute l'excellence de sa méthode en donnant à titre d'exemple le tableau complet des courbes des vingt premiers degrés et des courbes de degré 120. L'Académie ne pouvait hésiter à récompenser ce beau travail, qui fut couronné conjointement avec un mémoire de M. Nöther.

En dehors de ces œuvres maîtresses, Halphen trouvait encore le temps de produire de nombreux mémoires sur des sujets variés de géométrie ou d'arithmétique et surtout sur la théorie des séries. Nous ne nous y arrêterons pas, car nous avons hâte d'arriver à la dernière évolution de ce grand esprit.

Après son élection à l'Académie des Sciences au commencement de 1886, Halphen porta toute son activité sur les fonctions elliptiques. Leur théorie lui était depuis longtemps familière; il en avait fait d'heureuses applications à l'intégration de certaines classes d'équations linéaires, à des problèmes variés de géométrie, à l'étude de la courbe élastique; mais il voulut aller plus loin et doter la France d'un traité complet, au courant des derniers progrès de la science, et où les applications trouvassent enfin, à côté de la théorie générale, la place qui leur est due à tant de titres. Deux volumes de ce grand ouvrage parurent coup sur coup avec une incroyable rapidité et dépassèrent encore l'attente des géomètres. Restait un troisième et dernier volume où devaient se trouver exposées les applications à l'algèbre et à la théorie des nombres. C'était la partie la plus ardue de la tâche, et notre pauvre ami s'y livrait avec un acharnement qui devait lui être fatal. Déjà le travail de préparation approchait de son terme; mais Halphen, croyant pouvoir compter sur l'avenir, avait remis à plus tard le soin de la rédaction. Les deux premiers chapitres sont seuls achevés; de tout le reste de cet immense

labeur il ne subsiste plus qu'un monceau de calculs épars et dépourvus de tout texte explicatif, à l'exception de quelques rares fragments [1].

C. Jordan.

[1] Ces débris, pieusement recueillis, ont été joints aux deux premiers chapitres ainsi qu'à un mémoire sur la multiplication complexe, paru dans le Journal de Liouville, pour constituer le troisième volume du Traité des fonctions elliptiques.



ŒUVRES

DE

G.-H. HALPHEN.

SUR LA RÉDUCTION

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

AUX FORMES INTÉGRABLES [1].

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences,
t. XXVIII, 2e série, n° 1, 1884, p. 1.

INTRODUCTION

ET ANALYSE SOMMAIRE DU MÉMOIRE.

Jusqu'à ces dernières années, la seule catégorie d'équations différentielles linéaires à une variable indépendante pour laquelle les géomètres possédassent une méthode générale d'intégration était celle des *équations à coefficients constants* [2]. Ce sont encore là les seules équations dont la forme purement extérieure montre immé-

---

[1] Mémoire présenté à l'Académie des Sciences pour répondre à la question proposée : « Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante. » *Grand prix des Sciences mathématiques*, année 1880.

[2] J'omets ici, comme se rattachant trop immédiatement à l'équation à coefficients constants, *l'équation de Legendre*

$$(ax+b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + A(ax+b)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + L(ax+b)\frac{dy}{dx} + My = 0.$$

diatement qu'elles se peuvent intégrer. Mais on en connaît maintenant d'autres, pour lesquelles existent des méthodes d'intégration générales et sûres : les caractères distinctifs de ces équations ne sont plus de nature à être aperçus du premier coup d'œil, mais peuvent être reconnus cependant par des opérations purement algébriques. Ce caractère consiste en ce que l'intégrale générale est une *fonction uniforme* de la variable indépendante.

C'est par l'étude des *points singuliers* de l'équation que l'on reconnaît, d'une manière certaine, si ce caractère existe ou non. S'il existe, l'équation peut être intégrée. On peut, en effet, représenter alors l'intégrale générale par le quotient de deux fonctions synectiques, dont l'une, la fonction dénominateur, se trouve immédiatement [1], et l'autre, la fonction numérateur, pourra être développée au moyen de l'équation différentielle [2]. L'équation est ainsi intégrée, puisque son intégrale générale est représentée par une seule et même fonction, quotient des précédentes, pour toutes les valeurs de la variable. En général, cette intégrale est une fonction nouvelle. Mais, dans des cas particuliers, on la sait exprimable par les fonctions introduites antérieurement dans l'analyse. Ces cas sont au nombre de deux.

Le premier de ces cas est celui où l'intégrale générale est uniforme, non seulement pour toutes les valeurs finies de la variable, mais encore pour les valeurs infinies. Cette circonstance se reconnaît encore sur l'équation par des procédés certains, les mêmes que pour les valeurs finies. Quand il en est ainsi, on peut conclure [3] que cette intégrale est une fonction rationnelle. C'est seulement pour une équation à coefficients rationnels que ce cas peut avoir lieu. Le procédé que je viens d'indiquer pour le cas général conduit alors à montrer l'intégrale sous la forme même d'une fonction rationnelle.

Le second cas, tout récemment découvert, est celui où les coeffi-

---

(1) Si le nombre des points singuliers est limité, ce dénominateur est un polynome entier. Dans le cas opposé, c'est une fonction que l'on peut construire d'après les principes dus à M. Weierstrass.

(2) Voyez, à ce sujet, la note récente *Sur la théorie des équations différentielles linéaires*, par M. Mittag-Leffler (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XC, p. 218, 2 février 1880).

(3) Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, 2e édition, p. 206.

cients de l'équation sont des fonctions uniformes de la variable *doublement périodiques et aux mêmes périodes*, et où toujours l'intégrale générale est uniforme. Quand il en est ainsi, cette intégrale peut être exprimée sous forme finie par des fonctions déjà introduites dans l'analyse, les *polynômes entiers*, *la fonction exponentielle et la fonction* H de Jacobi. Cette découverte, provoquée par les travaux de M. Hermite, est due à M. Picard (¹).

On connaît donc, maintenant, trois catégories d'équations différentielles linéaires dont on sait exprimer l'intégrale générale par les fonctions antérieurement admises.

Un des moyens les plus usités pour étendre le champ de nos connaissances en calcul intégral consiste dans les changements de variables. Par l'emploi de ce moyen, on peut transformer une équation qui ne rentre dans aucune des trois catégories ci-dessus en une équation qui appartienne à l'une d'elles. C'est à de telles transformations que le présent mémoire est consacré. Je me suis proposé la double question suivante :

1° *Étant donnée une équation différentielle linéaire à variable* X, *à inconnue* Y, *reconnaître s'il existe une substitution*

(1) $$x = \varphi(X), \qquad y = Y\psi(X),$$

telle que, x et y étant prises pour nouvelle variable et pour nouvelle inconnue, l'équation transformée appartienne à l'une des trois catégories :

I. *Équations à coefficients constants;*

II. *Équations dont l'intégrale générale est rationnelle;*

III. *Équations à coefficients doublement périodiques, aux mêmes périodes et à intégrale générale uniforme.*

2° *Ayant reconnu l'existence de la substitution, effectuer l'intégration.*

J'ai réussi à résoudre cette question, et je vais expliquer comment.

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1879-1880, *passim*, et notamment : *Sur une classe d'équations différentielles linéaires* (t. XC, p. 128, 19 janvier 1880), et *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques* (t. XC, p. 293, 16 février 1880), notes de M. Picard.

Mais, pour pouvoir énoncer nettement ma solution, je dois dire quelques mots sur les *points critiques* et sur les *invariants*.

Soit $f(\alpha)$ une fonction de la variable α, et soit α_0 une valeur initiale de cette variable. Si, pour des valeurs de $(\alpha - \alpha_0)$ de module inférieur à une certaine limite différente de zéro, $f(\alpha)$ est une fonction uniforme ([1]) de $(\alpha - \alpha_0)$, le point α_0 *n'est pas* un point critique. Le point a_0 est *critique* quand cette propriété n'a pas lieu.

Le point α_0 étant supposé critique, il peut arriver que $f(\alpha)$ soit une fonction uniforme de $(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{m}}$, m étant un nombre entier. Quand il en est ainsi, je dis que α_0 est un point critique *algébrique*, et le nombre m, réduit à son minimum possible, est l'*ordre* de ce point critique.

Si α est liée d'une manière connue à la variable indépendante d'une équation linéaire donnée, on peut envisager les intégrales de cette équation comme des fonctions de α; et, par l'emploi des procédés usités pour les points singuliers des équations, étudier les points critiques de ces fonctions. Ce ne sont pas les points critiques des intégrales elles-mêmes qui doivent jouer ici le rôle principal, mais surtout les points critiques des rapports des intégrales entre elles. On conçoit aisément que l'étude des points critiques des intégrales conduise à la connaissance des points critiques pour la fonction $f(\alpha)$, composée avec le rapport de deux intégrales.

La question que j'ai posée ne peut avoir de solution que s'il s'agit d'équations d'ordre supérieur au second. En effet, une équation du second ordre peut, théoriquement, être transformée en une équation du second ordre arbitraire par une substitution où les fonctions φ et ψ seraient convenablement choisies. Mais il n'en est plus de même dès que l'ordre de l'équation atteint ou surpasse 3. La substitution contient deux fonctions arbitraires seulement, et l'on ne peut en disposer de manière à donner aux coefficients de l'équation dont le nombre surpasse 2 des expressions choisies arbitrairement. On est donc naturellement conduit à envisager les fonctions des coefficients et de leurs

---

([1]) Par ce mot *fonction uniforme*, j'entends ici une fonction ayant l'aspect d'une fonction rationnelle, c'est-à-dire développable sous la forme

$$(\alpha - \alpha_0)^n [A + B(\alpha - \alpha_0) + C(\alpha - \alpha_0)^2 + \ldots],$$

dans laquelle n est un nombre entier, positif ou négatif.

dérivées, qui restent inaltérées par toute substitution de la forme indiquée, quelles que soient les fonctions φ et ψ. Ce sont les *invariants absolus*, qui déjà ont été considérés par M. Laguerre [1], par M. Brioschi [2], et précédemment aussi, sous une forme différente en apparence, identique au fond, par moi-même [3].

Ces invariants *absolus* sont les quotients d'*invariants relatifs;* ces derniers sont des fonctions entières des coefficients de l'équation et des dérivées de ces coefficients. Dès qu'on les envisage, on reconnaît qu'il existe, pour chaque ordre, des équations pour lesquelles tous les invariants relatifs sont identiquement nuls. A ces équations singulières, la théorie dont je vais parler ne s'applique pas. Mais elles sont toutes des transformées d'équations différentielles linéaires du second ordre, que l'on forme très facilement. Je laisse de côté ces équations.

Cette réserve faite, pour toute équation différentielle linéaire d'ordre $n \geqq 3$, j'envisage $(n-1)$ invariants absolus, qui sont des fonctions explicitement connues des coefficients de l'équation, et, par conséquent, de la variable indépendante X. *Je fais abstraction de cette variable* X, l'éliminant ou la supposant éliminée, *et je considère uniquement les* $(n-2)$ *relations qui existent entre les* $(n-1)$ *invariants.* C'est dans ces relations que je trouve les éléments propres à la solution de la question proposée. Voici, en effet, la solution complète de la première question, résumée sous la forme d'un énoncé.

I. *Pour qu'il existe une substitution de la forme* (1) *qui conduise à une équation à coefficients constants*, IL FAUT ET IL SUFFIT *que les invariants absolus soient des constantes.*

II. *Pour qu'il existe une substitution de la forme* (1) *qui conduise à une équation à intégrale générale rationnelle*, *ou à*

---

(1) *Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre* (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, 1879, p. 116) et *Sur quelques invariants des équations différentielles linéaires* (*Ibid.*, p. 224), notes de M. Laguerre. [*Œuvres de Laguerre*, t. I, p. 420, 424.]

(2) *Sur les équations différentielles linéaires*, lettre de M. Brioschi à M. Laguerre (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII, p. 105). [*Œuvres de Brioschi*, t. IX, p. 255.]

(3) Thèse : *Sur les invariants différentiels*, par M. Halphen. [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 197.]

une équation à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme, IL FAUT MAIS IL NE SUFFIT PAS *que les invariants soient liés par des* RELATIONS ALGÉBRIQUES DU GENRE ZÉRO OU DU GENRE 1 (¹).

III. *Si ces relations sont du genre* 1, *il est impossible d'obtenir une transformée à intégrale générale rationnelle. Soit alors* u *la variable dont les* $(n-1)$ *invariants peuvent être considérés comme des fonctions uniformes doublement périodiques et aux mêmes périodes* ϖ, ϖ'.

Pour qu'il existe une substitution de la forme (1) *conduisant à une équation à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme*, IL FAUT ET IL SUFFIT *que les* RAPPORTS *des intégrales, considérés comme des fonctions de la variable* u, *n'aient* AUCUN POINT CRITIQUE (l'infini non compris).

On sentira la différence qui existe entre la considération des points critiques des rapports des intégrales et celle des points critiques des intégrales mêmes, si j'ajoute que : *Si les intégrales elles-mêmes n'ont aucun point critique quand on les considère comme des fonctions de* u, *les coefficients de la transformée ont les périodes* ϖ, ϖ'; *dans le cas opposé, les coefficients de la transformée ont généralement des périodes multiples* $\nu\varpi$, $\nu'\varpi'$, *les deux nombres* ν, ν' *étant des entiers dont un, au moins, diffère de l'unité.* (Il y a un théorème simple et précis qui décide si cette circonstance a lieu.)

IV. *Si les relations entre les invariants sont du genre zéro, soit* α *une variable en fonction de laquelle ces invariants soient*

(¹) On dit que $(n-1)$ quantités sont liées par $(n-2)$ relations du *genre zéro*, s'il existe une variable auxiliaire α, en fonction de laquelle ces $(n-1)$ quantités soient *rationnellement* exprimables. Quand il en est ainsi, il existe une telle variable α, dont chaque valeur ne correspond qu'à un seul système de valeurs des $(n-1)$ quantités. On dit alors que le système des $(n-1)$ quantités et la variable α se correspondent *uniformément*. On dit que $(n-1)$ quantités sont liées par $(n-2)$ relations du genre 1, s'il existe une variable t et un radical

$$\sqrt{At^4+Bt^3+Ct^2+Dt+E}=\Delta,$$

tels que les $(n-1)$ quantités soient rationnellement exprimables en fonction de t et de Δ. Dans ce cas, les $(n-1)$ quantités sont des fonctions uniformes de la variable u, définie par l'intégrale elliptique $u=\int\frac{dt}{\Delta}\cdot$

rationnellement exprimables et qui leur corresponde UNIFORMÉMENT. *Pour qu'il existe une substitution de la forme* (1) *conduisant à une équation dont l'intégrale générale soit rationnelle*, IL FAUT ET IL SUFFIT :

1° *Que les rapports des intégrales, envisagés comme des fonctions de* α, *n'aient que des points critiques* ALGÉBRIQUES, AU NOMBRE DE TROIS AU PLUS (y compris l'infini);

2° *Si ces points critiques sont au nombre de trois, que leurs ordres* m, n, p *satisfassent à la condition* $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} > 1$.

V. *Si les relations entre les invariants sont du genre zéro, et que les conditions* IV *ne soient pas remplies;*

Pour qu'il existe une substitution de la forme (1) *conduisant à une équation dont les coefficients soient doublement périodiques et dont l'intégrale générale soit uniforme*, IL FAUT ET IL SUFFIT :

1° *Que les rapports des intégrales, envisagés comme des fonctions de* α, *n'aient que des points critiques* ALGÉBRIQUES, AU NOMBRE DE TROIS OU QUATRE (y compris l'infini);

2° *S'il y a trois points critiques, que leurs ordres* m, n, p *satisfassent à la condition* $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$;

3° *S'il y a quatre points critiques, qu'ils soient tous quatre du second ordre.*

Telle est ma réponse à la première question. Comme on le voit, cette réponse est entièrement décisive, et ne fait appel absolument qu'à des éléments dont la connaissance s'obtient, sur une équation donnée, par des opérations purement algébriques.

J'arrive maintenant à la seconde question : *Ayant reconnu l'existence de la substitution, effectuer l'intégration*. On pourrait nier qu'il y eût là une question à résoudre, si ce n'est pour trouver la substitution (1). Et ce n'est pas à la recherche de cette substitution que se rapporte la question, car cette substitution se trouve aisément dans chaque cas. Il semble donc que l'on doive se borner à dire : La substitution étant trouvée, on l'effectue, puis on applique les méthodes usitées. C'est, en effet, à quoi je me borne dans les cas *théoriquement* les plus simples. Je vais préciser ce que j'entends

par là. Qu'il s'agisse, par exemple, d'une équation satisfaisant aux conditions de l'énoncé IV, transformable, par conséquent, en une équation à intégrale générale rationnelle. Les cas théoriquement les plus simples sont ceux où les rapports des intégrales n'ont aucun point critique. Pour ces cas, il ne me paraît pas qu'il y ait lieu à la seconde question. Mais, si les rapports des intégrales ont des points critiques, notamment s'ils en ont trois, la transformation exigerait des calculs impraticables, plus propres à masquer la solution qu'à la faire découvrir. Il faut intégrer sans transformer l'équation. J'y réussis en *cherchant*, *dans l'étude approfondie des points critiques*, *des conditions algébriques auxquelles les intégrales satisfont*, *et en démontrant*, *dans chaque cas*, *que ces conditions suffisent pour construire les intégrales par des opérations qui deviennent indépendantes de l'équation différentielle*. On conçoit qu'il soit malaisé de préciser davantage une méthode dont le mode d'application dépend essentiellement des circonstances; mais les nombreux exemples que ce mémoire contient doivent la rendre entièrement claire.

Il en est de même s'il s'agit d'une équation qui se puisse transformer en une équation à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme. Dans le cas de l'énoncé III, si les intégrales n'ont aucun point critique, je dois me borner à dire que j'effectue la transformation et que j'applique ensuite les méthodes, je ne dirai pas usitées, puisqu'elles naissent à peine, mais enfin la méthode directe dont M. Hermite, M. Picard, M. H. Gylden et M. Mittag-Leffler ont donné quelques exemples.

Si, au contraire, les intégrales ont des points critiques, et que la transformation entraîne un changement dans les périodes, cette transformation conduirait à des calculs très laborieux et plutôt nuisibles. Effectivement, quand il en est ainsi, les intégrales jouissent de propriétés spéciales qui permettent de les trouver plus rapidement par l'emploi d'une méthode analogue à celle dont j'ai donné tout à l'heure une idée pour la recherche des intégrales rationnelles.

Je l'ai déjà fait observer. La question que je me suis posée se rapporte exclusivement aux équations dont l'ordre est supérieur à 2. Cependant, si l'on modifie un peu les propositions II, III, IV et V ci-dessus, en leur retirant le caractère absolu qu'elles ont dans

l'énoncé, on obtient des propositions applicables aux équations du second ordre. Voici ces propositions :

III *bis. Soit une équation différentielle linéaire à coefficients uniformes doublement périodiques aux mêmes périodes. Si les rapports des intégrales, envisagés comme des fonctions de la variable indépendante, n'ont aucun point critique* (l'infini non compris), *il existe un changement d'inconnue, que l'on peut effectivement trouver, et qui transforme l'équation en une autre dont les coefficients sont doublement périodiques et uniformes, et dont, en outre, l'intégrale générale est uniforme. Dans cette transformation, les périodes sont généralement changées.*

III *ter. Soit une équation différentielle linéaire dont la variable indépendante et les coefficients soient liés par des relations algébriques du genre* 1. *On pourra effectivement trouver un changement de variable qui transforme l'équation en une autre dont les coefficients soient des fonctions uniformes et doublement périodiques de la nouvelle variable.*

IV *bis. Soit une équation différentielle dont la variable indépendante et les coefficients se puissent exprimer rationnellement en fonction d'une variable* α;

Si les rapports des intégrales, envisagés comme des fonctions de α, *n'ont que des points critiques algébriques, au nombre de trois au plus* (y compris l'infini), *et, quand ces points sont au nombre de trois, si les ordres* m, n, p *satisfont à la condition* $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} > 1$;

On peut effectivement trouver un changement de variable et un changement d'inconnue qui transforment l'équation en une autre dont l'intégrale générale soit rationnelle.

V *bis. Soit une équation différentielle linéaire dont la variable indépendante et les coefficients se puissent exprimer rationnellement en fonction d'une variable* α;

Si les rapports des intégrales, envisagés comme des fonctions de α, *n'ont que des points critiques algébriques* (l'infini compris); *que ces points soient au nombre de trois, et que leurs ordres*

satisfassent à la relation $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1$, *ou qu'ils soient au nombre de quatre, et tous du second ordre;*

On peut effectivement trouver une substitution qui change l'équation en une autre dont les coefficients soient doublement périodiques et l'intégration générale uniforme.

Ces propositions, moins absolues que les précédentes, ont cependant leur utilité pour les équations du second ordre. La proposition IV *bis* donne la clef des découvertes faites, dans le cours de ces dernières années, au sujet de l'intégration algébrique des équations linéaires du second ordre, et, notamment, de l'équation de Gauss. Ces découvertes ont fait l'objet de nombreux et importants mémoires, dus à MM. A. Schwarz (1), Fuchs (2), Brioschi (3), Félix Klein (4). Pour cette même équation de Gauss, la proposition V *bis* révèle l'existence de nouveaux cas où elle s'intègre par les fonctions elliptiques. J'ai donc pensé qu'il était utile d'exposer d'abord les démonstrations de ces propositions, et de rejeter plus loin la théorie des invariants, dont la connaissance est nécessaire pour la solution complète de la question proposée.

Le chapitre I de mon mémoire a pour objet la démonstration de la proposition IV *bis*, avec les développements qu'on doit lui donner pour être en mesure de parvenir rapidement à la proposition IV, dès qu'on aura introduit les invariants. Je fais résulter cette proposition d'une source purement algébrique, *la résolution en polynomes entiers d'une variable*, de l'équation indéterminée $X^m+Y^n+Z^p=0$. J'indique ensuite rapidement l'application à l'équation de Gauss.

---

(1) *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt*, von Herrn H. A. Schwarz in Zurich (*Journal für die reine und angewandte Math.*, t. LXXV, p. 292). [*Œuvres de Schwarz*, t. II, p. 211.]

(2) *Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie*, von Herrn L. Fuchs, in Heidelberg (*Ibid.*, t. LXXXI, p. 97). [*Œuvres de Fuchs*, t. II, p. 73.]

(3) Extrait d'une lettre de M. Brioschi à M. F. Klein (*Mathematische Annalen*) t. XI, p. 111). [*Œuvres de Brioschi*, t. V, p. 205.]

(4) *Ueber lineare Differentialgleichungen*, von Félix Klein, in München (*Ibid.*, t. XI, p. 115), et sous le même titre un second mémoire du même auteur (*Ibid.*, t. XII, p. 167).

Dans le chapitre II, je démontre d'abord la proposition V *bis*, en y ajoutant quelques développements utiles pour la suite, et je la rattache à *la résolution de la même équation indéterminée*, *en fonctions doublement périodiques et uniformes d'une variable*. Je prouve ensuite la proposition III *ter*. Pour développer les conséquences de cette proposition, je rappelle, en le complétant, le théorème de M. Picard, concernant les équations à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme. Je fais suivre cette partie théorique de diverses applications. Tout d'abord, au moyen de la proposition V *bis*, j'indique succinctement de nouveaux cas d'intégration pour l'équation de Gauss. Une série de ces cas conduit à considérer l'équation de Lamé, celle même dont l'intégration, effectuée par M. Hermite, a été l'origine de la découverte de la nouvelle catégorie d'équations intégrables. Je donne une méthode pour intégrer l'équation de Lamé, méthode que j'applique à trois cas. Je rentre ensuite plus intimement dans mon sujet, en appliquant la proposition III *ter* à des équations de divers ordres, équations dont les intégrales se trouvent sans calcul, grâce aux conséquences de ma proposition. Ces équations se rattachent directement à la division de l'argument dans les fonctions elliptiques. Je termine enfin ce chapitre en montrant incidemment que, des équations à coefficients doublement périodiques et à intégrale uniforme, on peut déduire de nouvelles catégories d'équations intégrables par les seules fonctions rationnelles et exponentielles.

Le chapitre III, le dernier qui soit consacré à des théories générales, contient la théorie des invariants pour les équations linéaires de tous les ordres, suivie de la démonstration complète des propositions I, II, III, IV et V. Je termine ce chapitre, qui contient, en outre, quelques applications incidentes, par l'indication du procédé qu'il convient de suivre dans l'étude des points critiques, quand on substitue la considération des invariants à celle de l'équation même.

Tout le reste du mémoire est consacré à des applications qui, toutes, concernent des équations du troisième ou du quatrième ordre, sauf dans le dernier chapitre, où il est question de certaines équations d'ordre indéterminé. Ce dernier chapitre étant encore réservé, mes applications concernent toutes des cas spéciaux d'équations apparte-

nant aux types suivants, analogues à l'équation de Gauss :

$$\text{(A)} \qquad y''' + \frac{Ax+B}{x(x-1)} y'' + \frac{Cx^2+Dx+E}{x^2(x-1)^2} y' + \frac{Fx+G}{x^2(x-1)^2} y = 0,$$

$$\text{(B)} \qquad y^{\text{IV}} + \frac{Ax+B}{x(x-1)} y''' + \frac{Cx^2+Dx+E}{x^2(x-1)^2} y'' + \frac{Fx^3+Gx^2+Hx+J}{x^3(x-1)^3} y' + \frac{Lx^2+Mx+N}{x^3(x-1)^3} y = 0.$$

Je distingue, dans chacune de ces équations, un grand nombre de séries de cas d'intégration; chacune de ces séries contient un ou plusieurs nombres entiers arbitraires. Pour chaque série, je donne un procédé d'intégration dont le succès est certain, sans qu'on puisse cependant, sauf dans une série toute particulière, obtenir de formule générale pour les intégrales. La série particulière, fort curieuse, à laquelle je fais allusion, concerne l'équation du troisième ordre (A). Les coefficients sont des fonctions d'une arbitraire μ, et il y a trois intégrales particulières, y_1, y_2, y_3, qui satisfont identiquement à la relation

$$y_1^{\frac{1}{\mu}} + y_2^{\frac{1}{\mu}} + y_3^{\frac{1}{\mu}} = 0.$$

Les chapitres IV, V, VI contiennent les applications qui concernent des séries de cas de l'équation (A);

Le chapitre IV, une série de cas où l'équation renferme un entier arbitraire et une constante arbitraire. L'intégration se fait au moyen des fonctions elliptiques. Deux exemples sont entièrement calculés. On rencontre, comme un cas particulier, l'équation

$$y''' + \frac{1-n}{x^2} y' - \left(\frac{1-n^2}{x^3} + \alpha\right) y = 0,$$

dans laquelle α est une constante arbitraire, et qui s'intègre par les fonctions rationnelles et exponentielles quand n est un nombre entier non divisible par 3. On trouve aussi cette équation :

$$y''' = x^p y,$$

qui se ramène à la précédente, et s'intègre de même, quand

$$p = 3\left(\frac{1}{n} - 1\right).$$

Dans le chapitre V, je définis d'abord une classe étendue d'équations contenues dans la forme (A) et qui admet cinq séries de cas d'intégration. J'étudie ensuite l'intégration pour une de ces séries, où il y a trois nombres entiers arbitraires. Cette intégration se fait au moyen des fonctions elliptiques. J'effectue le calcul complet pour un exemple.

Dans le chapitre VI, je m'occupe de l'intégration des équations de cette même classe, pour trois séries de ses cas. Dans chacun d'eux il y a deux entiers arbitraires. L'intégration s'effectue par les fonctions rationnelles. Je calcule entièrement neuf exemples. C'est dans ce chapitre que se rencontre incidemment la série particulière, contenant l'arbitraire μ, dont je parlais tout à l'heure.

Les chapitres VII et VIII sont consacrés à des séries de cas de l'équation du quatrième ordre (B).

Dans le chapitre VII, je définis une classe contenue dans l'équation (B), et comprenant trois séries de cas d'intégrabilité. Dans chaque série, il y a quatre nombres entiers arbitraires. Je traite de l'intégration de deux de ces séries, et je calcule trois exemples.

Le chapitre VIII concerne une nouvelle classe contenue dans l'équation (B), comprenant encore trois séries de cas d'intégrabilité. Il y a dans chaque série deux nombres entiers arbitraires. Je donne le procédé d'intégration pour deux de ces séries, par les fonctions rationnelles, et je calcule deux exemples.

Pour les classes d'équations définies dans les chapitres V, VII, VIII, il y a des séries de cas d'intégrabilité que j'ai mentionnés, mais que je n'ai pas étudiés dans les chapitres qui précèdent. Pour ces séries, l'intégration s'effectue au moyen de fonctions elliptiques, à module particulier, satisfaisant à la relation $k^4 - k^2 + 1 = 0$. J'envisage alors des classes nouvelles d'équations à coefficients doublement périodiques et à module quelconque, comprenant, comme des cas particuliers, les équations précédentes. De telles équations font l'objet du chapitre IX, le dernier de ce mémoire. Je donne là des exemples d'équations à coefficients doublement périodiques, et à intégrale non uniforme, qui se transforment en équations à intégrale uniforme par un changement de l'inconnue qui entraîne un changement des

périodes. Il y a, pour ces équations, des procédés spéciaux d'intégration.

Je rencontre d'abord une équation du quatrième ordre présentant une particularité analogue à celle que je signalais précédemment pour une équation du troisième ordre. Elle contient une constante arbitraire μ; on peut trouver explicitement son intégrale générale, et il y a quatre intégrales particulières $y_1 y_2 y_3 y_4$, qui satisfont identiquement aux deux relations :

$$y_1^{\frac{1}{\mu}} + y_2^{\frac{1}{\mu}} + y_3^{\frac{1}{\mu}} = 0, \qquad k^2 y_1^{\frac{1}{\mu}} + y_3^{\frac{1}{\mu}} + y_4^{\frac{1}{\mu}} = 0.$$

Je donne ensuite deux méthodes d'intégration pour des classes d'équations de tous les ordres se rattachant à la division de l'argument dans les fonctions elliptiques, et j'applique ces méthodes à trois nouveaux exemples portant sur des équations du troisième ordre.

En résumé, j'ai traité, dans ce mémoire, une question théorique relative à la transformation des équations linéaires en d'autres équations appartenant à des types pour lesquels on sait l'intégration possible. Les développements indispensables à la solution de cette question constituent une partie, moins de la moitié de ce travail. Tout le reste est consacré à des applications que j'ai cru devoir multiplier, au risque de lasser le lecteur. Mais il me semble qu'en pareille matière les applications traitées complètement doivent dominer, et que le but à poursuivre est celui-ci : intégrer effectivement les équations que l'on sait intégrables.

CHAPITRE I.

Sur la résolution de l'équation indéterminée $X^m + Y^n + Z^p = 0$ en polynomes entiers d'une variable. — Identité de ce problème avec le problème de la recherche des groupes de substitutions linéaires et d'ordre fini, pour les variables binaires. — Solution. — Propriétés des fonctions qui n'ont que trois points critiques, quand ces points sont algébriques et que leurs ordres m, n, p satisfont à la condition

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} > 1.$$

Application aux intégrales des équations différentielles linéaires, et rappel des propriétés des points critiques. — Équation de Gauss ([1]).

---

1. Soit proposé de trouver trois polynomes entiers d'*une* variable X, Y, Z, qui satisfassent *identiquement* à l'équation indéterminée

$$X^m + Y^n + Z^p = 0, \tag{1}$$

où m, n, p sont des entiers positifs donnés, tous différents de l'unité.

Montrons d'abord que le problème n'est possible que pour certaines valeurs, très limitées, des exposants.

Soit η la variable; je la remplace par le rapport $\eta_1 : \eta_2$, et je chasse le dénominateur. Comme il y a, nécessairement, deux au moins des trois polynomes, par exemple X, Y, tels que X^m et Y^n aient un même degré en η, et que ce degré ne peut être inférieur à celui de Z^p, l'équation prend alors la forme

$$X^m + Y^n + \eta_2^a Z^p = 0,$$

([1]) Les plus récents travaux concernant les matières traitées dans ce chapitre sont les mémoires de MM. A. Schwarz, Fuchs, F. Klein, déjà cités dans l'*Introduction;* celui de M. Camille Jordan (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXXXIV, p. 89), de M. F. Klein (*Math. Ann.*, t. IX, p. 183), et tout particulièrement le mémoire de M. Gordan, *Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen* (*Math. Ann.*, t. XII, p. 23), où la construction des groupes d'ordre fini est opérée d'une manière tout à fait neuve.

où X, Y, Z sont maintenant entiers et homogènes en η_1, η_2. Quant à a, c'est un entier égal à la différence des degrés de X^m et de Z^p. Si a était divisible par p, je pourrais remplacer $\eta_2^a Z^p$ par $\left(\eta_2^{\frac{a}{p}} Z\right)^p$ et l'équation reprendrait la forme (1). Pour qu'il en soit ainsi, je remplace maintenant η_1 et η_2 par η_1^δ, η_2^δ, δ étant choisi de manière à rendre $a\delta$ divisible par p. Ceci fait, l'équation a repris la forme (1). Les lettres X, Y, Z désignent trois polynomes entiers et homogènes des variables η_1, η_2, et les degrés respectifs de ces polynomes sont $\frac{M}{m}$, $\frac{M}{n}$, $\frac{M}{p}$, M étant un multiple commun à m, n, p.

Je pose, suivant l'usage,

$$\frac{\partial X}{\partial \eta_1} = X_1, \qquad \frac{\partial X}{\partial \eta_2} = X_2, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \eta_1} = Y_1, \qquad \ldots,$$

et de l'identité (1) je tire successivement

$$m X^{m-1} X_1 + n Y^{n-1} Y_1 + p Z^{p-1} Z_1 = 0,$$

$$m X^{m-1} X_2 + n Y^{n-1} Y_2 + p Z^{p-1} Z_2 = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1}{m X^{m-1}} = \frac{Z_1 X_2 - Z_2 X_1}{n Y^{n-1}} = \frac{X_1 Y_2 - X_2 Y_1}{p Z^{p-1}}.$$

Les polynomes X, Y, Z peuvent être supposés premiers entre eux. Il suit alors des identités (2) que chacun des déterminants binaires est exactement divisible par le dénominateur qui lui correspond. Le degré de $(Y_1 Z_2)$ ne peut donc être inférieur à celui de X^{m-1}, ce qui donne la condition

$$\frac{M}{n} + \frac{M}{p} - 2 \geqq (m-1)\frac{M}{m},$$

condition qui peut encore s'écrire

$$(3) \qquad \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \geqq 1 + \frac{2}{M}.$$

Cette inégalité, étant symétrique en m, n, p, serait également donnée par les autres rapports (2).

A fortiori, on doit avoir

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} > 1.$$

Cette inégalité limite les nombres m, n, p [1]. *Les seules combinaisons possibles sont* $(m, 2, 2)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$.

2. Laissons de côté, pour un instant, la recherche des solutions de l'équation (1), et tirons une conséquence de la solution, supposée possible. Introduisons une variable nouvelle α, en posant :

$$\alpha = -\frac{X^m}{Z^p}; \tag{4}$$

il en résulte en même temps

$$\alpha - 1 = \frac{Y^n}{Z^p}. \tag{5}$$

Envisageons α comme une fonction de la variable $\eta = \eta_1 : \eta_2$. Dans le domaine d'un point quelconque $\eta = a$, α est une fonction uniforme de η. Mais, en outre, dans le domaine d'un point η_0, racine de X, $\alpha^{\frac{1}{m}}$ est une fonction uniforme de η; dans le domaine d'un point η_1, racine de Y, $\alpha^{\frac{1}{n}}$ est une fonction uniforme de η, et enfin, dans le domaine de chaque point η_∞, racine de Z, $\alpha^{\frac{1}{p}}$ est fonction uniforme de η.

Une fonction ζ d'une variable α admet le point α_0 pour *point critique algébrique*, si, dans une certaine étendue, ζ est développable suivant les puissances entières et ascendantes de $(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{m}}$, le développement pouvant d'ailleurs commencer par des termes à exposants négatifs. Cette définition s'étend aussi au point $\alpha = \infty$, à condition de remplacer $(\alpha - \alpha_0)$ par $\frac{1}{\alpha}$. Le *nombre entier m est l'ordre du point critique*.

Cette définition posée, on voit immédiatement que :

PROPOSITION I. — *Étant donnée une solution de l'équation*

$$X^m + Y^n + Z^p = 0,$$

si l'on pose

$$\alpha = -\frac{X^m}{Z^p},$$

[1] On reconnaît là une extension de l'analyse employée par M. Korkine pour démontrer l'impossibilité de l'équation $X^m + Y^m + Z^m = 0$ (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XC, 1881, p. 303). Ce cas particulier avait aussi été traité d'une autre manière, et antérieurement, par M. R. Liouville (*Ibid.*, t. LXXXIX, 1880, p. 1108).

toute fonction ζ *de la variable* α *n'ayant que trois points critiques* o, 1, ∞, *algébriques, et, respectivement, des ordres* m, n, p, *est une fonction rationnelle de la variable* η.

Effectivement, ζ est une fonction uniforme de η pour toutes les valeurs de η, l'infini compris. D'après un théorème de MM. Briot et Bouquet, c'est donc une fonction rationnelle.

On voit déjà quel parti on pourra tirer des solutions de l'équation (1) dans l'étude de certaines fonctions. Mais, pour le moment, je veux tirer de la dernière proposition une conséquence, relative à la solution même de l'équation proposée.

3. Une solution de (1) peut en fournir d'autres, si l'on remplace η_1 et η_2 par des polynomes entiers homogènes et d'un même degré. Dans tous les cas, le degré de la solution, c'est-à-dire le nombre M, degré commun de X^m, Y^n, Z^p, ne peut descendre au-dessous d'un certain minimum, fixé par l'inégalité (3). Je suppose l'existence d'une solution pour laquelle M atteigne ce minimum, et soit ainsi donné par l'égalité

$$\frac{2}{M} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} - 1. \tag{6}$$

J'appelle *primitive* une telle solution, quitte à en vérifier après coup l'existence. Je considère simultanément deux solutions, l'une *primitive*

$$x^m + y^n + z^p = 0,$$

où la variable sera $\zeta = \zeta_1 : \zeta_2$, l'autre quelconque

$$X^m + Y^n + Z^p = 0,$$

où la variable sera $\eta = \eta_1 : \eta_2$. Je relie maintenant les deux variables η, ζ entre elles, en posant à la fois

$$\alpha = -\frac{X^m}{Z^p} = -\frac{x^m}{z^p}.$$

J'ai, tout à l'heure, étudié α comme fonction de η; je vais, maintenant, étudier ζ comme fonction de α, et, de là, comme fonction de η.

Aux environs d'une valeur quelconque α_0 de la variable α, la fonction ζ ne cesse d'être uniforme que si, pour $\alpha = \alpha_0$, l'équation

$x^m + \alpha z^p = 0$ a des racines ζ multiples. Cette circonstance ne se présente que si, pour $\alpha = \alpha_0$, ζ devient égale à la racine d'une des équations

$$x = 0, \qquad z = 0, \qquad x_1 z_2 - z_1 x_2 = 0.$$

Mais la solution (x, y, z) est supposée primitive. Son degré M satisfait donc à l'égalité (6), limite de l'inégalité (3). Par suite, le déterminant $(x_1 z_2)$ qui, dans les autres cas, serait égal à y^{n-1}, multiplié par un polynome entier, est ici précisément y^{n-1}, sauf un facteur numérique. Donc ζ ne cesse d'être fonction numérique de α qu'en devenant égale à la racine d'une des équations

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0,$$

c'est-à-dire que ζ *n'a que les points critiques* $\alpha = 0, 1, \infty$. Il est d'ailleurs manifeste que ces points critiques ont respectivement les ordres m, n, p. En effet, les polynomes x, y, z ne peuvent avoir de racines multiples. Une racine multiple de x appartiendrait à $(x_1 z_2)$ et par suite à y, ce qui est contre l'hypothèse.

Ainsi ζ est une fonction de α satisfaisant aux conditions de la proposition I. *Donc ζ est une fonction rationnelle de η*; ce qui peut encore s'énoncer ainsi :

Proposition II. — *S'il existe une solution primitive de l'équation* (1), *toute autre solution s'en déduit par une substitution rationnelle.*

Bien qu'on n'ait pas établi l'existence de la solution primitive, cette dernière proposition a de l'importance. Elle permettra, en effet, dans chaque cas, de se borner à une solution primitive si l'on peut la trouver; et c'est effectivement ce qui a lieu.

4. D'après la proposition II, si l'on envisage *deux solutions primitives*, les deux variables η, ζ sont chacune fonction rationnelle de l'autre. Ainsi l'équation

$$\frac{X^m}{Z^p} = \frac{x^m}{z^p},$$

dans laquelle X, Z appartiennent, comme x, z, à une solution primitive, équivaut à une relation de la forme

$$\zeta = \frac{a\eta + b}{a'\eta + b'},$$

où a, b, a', b' sont des constantes. Pour mieux dire, l'équivalence n'a lieu qu'après qu'on a fixé celle des valeurs initiales de ζ, au nombre de M, qui répondent à une valeur initiale de η.

Deux racines η', η différentes entre elles, mais correspondant à une même valeur de α, dans l'équation

$$X^m + \alpha Z^p = 0,$$

peuvent être considérées comme les variables de deux solutions primitives différentes. Donc :

Proposition III. — *Si* X, Z *appartiennent à une solution primitive, et que l'on envisage deux racines* η, η' *de l'équation* $X^m + \alpha Z^p = 0$, *dans laquelle* α *est variable, ces deux racines sont des fonctions rationnelles l'une de l'autre, en sorte que l'on a*

$$\eta' = \frac{a\eta + b}{a'\eta + b'}, \tag{7}$$

les coefficients a, b, a', b' *étant des constantes.*

Corollaire. — *Les substitutions linéaires telles que* (7) *forment un groupe d'ordre fini dont l'ordre est le degré* M *de la solution primitive, donné par l'égalité* (6). J'appelle G ce groupe, et je vais immédiatement en reconnaître une propriété.

5. Prenant pour η une valeur initiale arbitraire et y appliquant les M substitutions de G, j'obtiens, avec η, M quantités distinctes $\eta, \eta', \eta'', \ldots$. Il n'y a d'exception que si η a pour valeur initiale celle d'une racine $\eta_0, \eta_1, \eta_\infty$ de X, Y, Z. Quand une de ces exceptions a lieu, on a seulement $\frac{M}{m}$, $\frac{M}{n}$ ou $\frac{M}{p}$ quantités distinctes, répétées chacune m, n ou p fois.

Pour α voisin de zéro, les M racines de $X^m + \alpha Z^p = 0$ se répartissent en $\frac{M}{m}$ cycles distincts, dont chacun contient m racines. A chaque racine η_0 de X correspond un de ces cycles, qui peut se définir ainsi. Si l'on pose $\alpha = z^m$, les racines contenues dans ce cycle sont représentées par les diverses déterminations d'un développement tel que celui-ci :

$$\eta - \eta_0 = Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots \tag{8}$$

Dans le groupe G, il existe des substitutions qui n'altèrent pas η_0. Soit S_0 une telle substitution. Appliquée à une racine contenue dans le cycle (8), la substitution S_0 changera nécessairement cette racine en une autre, mais qui appartiendra au même cycle. D'où résulte que S_0, répétée m fois de suite, équivaut à la substitution unité. Répétée moins de m fois, S_0 ne peut donner l'unité; car le cycle (8) est indécomposable. Donc la substitution S_0 est une racine $m^{\text{ième}}$ *primitive* de la substitution unité. Elle est de la forme

$$\frac{\eta' - \eta_0}{a\eta' + b} = \varepsilon \frac{\eta - \eta_0}{a\eta + b},$$

a, b étant des nombres, et ε une racine $m^{\text{ième}}$ primitive de l'unité.

Ce même raisonnement s'applique à une racine η_1 de Y, à une racine η_∞ de Z. D'ailleurs, η_0, η_1, η_∞ sont des quantités inégales. Donc :

Proposition IV. — *Le groupe qui correspond à une solution primitive de* $X^m + Y^n + Z^p = 0$ *contient une substitution* S_0, *une substitution* S_1, *une substitution* S_∞, *qui sont respectivement des racines primitives d'ordre* m, n, p *de la substitution unité, et qui ont chacune une variable canonique différente* ([1]).

6. Bien que ce ne soit pas indispensable ici, je ne veux pas négliger de montrer comment cette proposition IV a une réciproque. Je suppose un groupe G composé d'un nombre limité de substitutions linéaires. Par les substitutions de ce groupe, je déduis d'une quantité arbitraire u une suite de M quantités u', u'', ... et je forme le polynome entier U dont ces quantités sont les racines. Ainsi

$$U = (\eta - u)(\eta - u')(\eta - u'')\ldots.$$

Soit une substitution de G représentée par

$$\eta' = \frac{A\eta + B}{a\eta + b}, \tag{8}$$

([1]) Une substitution linéaire étant réduite à la forme canonique

$$\frac{A\eta' + B}{a\eta' + b} = \lambda \frac{A\eta + B}{a\eta + b},$$

la combinaison $\dfrac{A\eta + B}{a\eta + b}$ représente la *variable canonique*.

ou résolue par rapport à η,

$$\eta = \frac{b\eta' - B}{A - a\eta'}.$$

Appliquée à une racine u du polynome U, cette substitution conduit à une autre racine. Suivant l'hypothèse que S appartient au groupe fini G, S est une racine de l'unité, soit une racine d'ordre μ. Le nombre μ est un diviseur de M, et les M racines u, u', ... se partagent en $\frac{M}{\mu}$ cycles. Soient u_0, u_1, u_2, ..., $u_{\mu-1}$ les racines appartenant à un même cycle, et rangées par ordre, de telle sorte que

$$u_{\nu+1} = \frac{A u_\nu + B}{a u_\nu + b}. \tag{9}$$

En effectuant sur η la substitution S dans le binome $(\eta - u_\nu)$, nous obtenons

$$\eta - u_\nu = \frac{a u_\nu + b}{A - a\eta'}(\eta' - u_{\nu+1}).$$

Prenons les binomes correspondant aux racines du cycle; et désignons par P le produit de ces binomes, par P′ ce même produit où la lettre η est accentuée. Nous avons alors

$$P = \frac{P'}{(A - a\eta')^\mu} \prod_\nu (a u_\nu + b). \tag{10}$$

Soit maintenant

$$u_\nu = \frac{A_\nu u_0 + B_\nu}{a_\nu u_0 + b_\nu}$$

la puissance $\nu^{\text{ième}}$ de la substitution S. Posons une formule analogue pour la puissance $(\nu + 1)^{\text{ième}}$, et nous aurons l'identité suivante, résultant de (9) :

$$\frac{A \dfrac{A_\nu u_0 + B_\nu}{a_\nu u_0 + b_\nu} + B}{a \dfrac{A_\nu u_0 + B_\nu}{a_\nu u_0 + b_\nu} + b} = \frac{A_{\nu+1} u_0 + B_{\nu+1}}{a_{\nu+1} u_0 + b_{\nu+1}};$$

d'où je conclus, en comparant terme à terme ces deux fractions égales,

$$a u_\nu + b = c_\nu \frac{a_{\nu+1} u_0 + b_{\nu+1}}{a_\nu u_0 + b_\nu},$$

identité où c_ν est une constante, et où u_0 est une quantité arbitraire, dont dépend u_ν. Mais, d'après cette identité, et puisque les

quantités u_ν forment un cycle fermé, on a

$$\prod_\nu (au_\nu + b) = c_1 c_2 c_3 \ldots = \text{const.}$$

Par suite, l'égalité (10) devient

$$P = \frac{c}{(A - a\eta')^\mu} P',$$

et signifie que le polynome P, transformé par S, se reproduit à un facteur près, indépendant de la racine u.

Je reviens maintenant au groupe fini G et au polynome U, dont les racines se déduisent d'une arbitraire par les substitutions du groupe, et j'en conclus *qu'un tel polynome, transformé par une quelconque des substitutions de* G, *se reproduit à un facteur près, qui est indépendant des racines du polynome.*

Par suite, si U, V sont deux pareils polynomes, dont les racines dérivent respectivement de deux arbitraires u, v, le rapport U : V est absolument invariable par les substitutions de G.

Déterminons λ par la condition que $\frac{U}{V} + \lambda$ s'évanouisse pour $\eta = w$, w étant une nouvelle arbitraire. Cette même quantité sera encore nulle pour les (M — 1) autres valeurs $\eta = w', w'', \ldots$ que l'on déduit de w par les substitutions de G. Donc, *si* U, V, W *sont trois polynomes entiers de la variable* η *et du degré* M, *ayant pour racines respectivement les* M *quantités qui se déduisent, par les substitutions de* G, *de trois arbitraires* u, v, w, *ces polynomes vérifieront une identité de la forme*

$$U + \lambda V + \lambda' W = 0,$$

où λ, λ' *sont indépendants de la variable* η (1).

Soit S_0 une substitution de G : appartenant à un groupe fini, c'est nécessairement une racine de la substitution unité. Soit m l'ordre de cette racine, et écrivons S_0 sous la forme

(11) $$\frac{\eta' - \eta_0}{a\eta' + b} = \varepsilon \frac{\eta - \eta_0}{a\eta + b}, \qquad \varepsilon^m = 1.$$

---

(1) Cette proposition a déjà été employée sous une forme un peu moins générale cependant, par M. Félix Klein, dans son mémoire déjà cité : *Binäre Formen mit Transformationen in sich* (*Math. Ann.*, t. IX, p. 194).

Prenons, pour l'une des racines u du polynome U, la quantité η_0. Alors, parmi les quantités $u, u', u'', \ldots$, il y a en m égales à η_0. Il y en aura ensuite m autres égales à une autre quantité ζ_0, et ainsi de suite. Le polynome U est, dans ce cas, la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un polynome de degré $\frac{M}{m}$. Je pose donc $U = X^m$.

Soit de même S_1 une autre substitution de G, racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, et dont la variable canonique ne coïncide pas avec celle de S_0. On en déduira de même un polynome $V = Y^n$, c'est-à-dire puissance $n^{\text{ième}}$ d'un autre polynome du degré $\frac{M}{n}$. Enfin, s'il existe une troisième substitution S_∞, racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, et dont la variable canonique soit encore différente, on en déduira, de même, un nouveau polynome $W = Z^p$, et l'on aura l'identité

$$X^m + \lambda Y^n + \lambda' Z^p = 0.$$

Proposition V. — *A tout groupe de substitutions linéaires d'ordre fini, et contenant trois substitutions à variables canoniques différentes, correspond une solution de l'équation indéterminée*

$$X^m + Y^n + Z^p = 0.$$

Les exposants m, n, p marquent les puissances auxquelles il faut élever respectivement ces trois substitutions pour obtenir la substitution unité.

C'est la réciproque de la proposition IV. Je dois cependant faire l'observation suivante. On aurait pu, dans l'analyse qui précède, envisager non seulement la valeur $\eta = \eta_0$ qui rend nul le numérateur de (11), mais encore la valeur $\eta = -\frac{a}{b}$, qui rend nul le dénominateur. Il suit de là que deux substitutions peuvent parfois suffire pour former une solution de l'équation indéterminée. Ceci n'infirme pas la proposition IV, qui doit être entendue en ce sens que, dans certains cas, deux des substitutions $S_0\,S_1\,S_\infty$ peuvent coïncider. C'est effectivement ce qui a lieu, notamment dans le premier des cas que je vais maintenant passer en revue pour *résoudre l'équation indéterminée proposée*. J'indiquerai très brièvement la constitution du groupe G dans chaque cas, l'étude de tels groupes ayant déjà été faite maintes fois.

7. *Premier cas : Exposants* m, 2, 2.

J'écris l'équation ainsi

$$X^m = Z^2 - Y^2,$$

et j'ai une solution, en posant

$$(12) \qquad Z = \frac{1}{2}(\eta_1^m + \eta_2^m), \qquad Y = \frac{1}{2}(\eta_1^m - \eta_2^m), \qquad X = \eta_1 \eta_2.$$

La formule (6)

$$\frac{2}{M} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} - 1$$

donne ici $M = 2m$. La solution (12) est de ce degré; elle est donc *primitive.*

Le groupe G dérive des substitutions

$$(G) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \eta' = \varepsilon \eta, \qquad \varepsilon^m = 1, \\ \dfrac{\eta' + 1}{\eta' - 1} = - \dfrac{\eta + 1}{\eta - 1}. \end{array} \right.$$

8. *Deuxième cas : Exposants* 2, 3, 3.

Soient ω, ω^2 les deux racines cubiques imaginaires de l'unité. Je prends trois polynomes entiers A, B, C, vérifiant l'identité

$$A^2 + \omega B^2 + \omega^2 C^2 = 0,$$

ce que je sais faire d'après le cas précédent. Je pose ensuite

$$Y + Z = A^2, \qquad Y + \omega Z = B^2.$$

Il en résulte en même temps

$$Y + \omega^2 Z = C^2.$$

Je fais ensuite $X = ABC$. Les trois polynomes X, Y, Z satisfont à l'identité

$$X^2 = Y^3 + Z^3.$$

Le moindre degré de A, B, C est égal à 2. Le moindre degré de la solution actuelle est ainsi égal à 12. C'est ce nombre que donne la formule (6). La solution ainsi obtenue est donc primitive. Voici les polynomes auxquels on est conduit :

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X = \eta_1 \eta_2 (\eta_1^4 - \eta_2^4) \\ Y = \eta_1^4 - 2i\sqrt{3}\, \eta_1^2 \eta_2^2 + \eta_2^4 \\ Z = \eta_1^4 + 2i\sqrt{3}\, \eta_1^2 \eta_2^2 + \eta_2^4 \end{array} \right\} \qquad Z^3 - Y^3 = 12 i \sqrt{3}\, X^2.$$

On pourrait faire disparaître l'imaginaire en remplaçant η_2^2 par $i\eta_2^2$. Je préfère la forme (13), qui est plus symétrique. Le groupe G dérive des substitutions

$$(G) \qquad \eta' = -\eta, \qquad \eta' = \frac{1+i\eta}{1-i\eta}.$$

9. *Troisième cas : Exposants* 2, 3, 4.

Prenons les polynomes (13) et posons

$$\mathfrak{Z} = X, \qquad \mathfrak{Y} = YZ, \qquad \mathfrak{X} = \frac{1}{2}(Y^3 + Z^3).$$

En vertu de l'identité précédente, j'aurai

$$\mathfrak{X} + 6i\sqrt{3}\,\mathfrak{Z}^2 = \frac{Y^3+Z^3}{2} + \frac{Z^3-Y^3}{2} = Z^3,$$
$$\mathfrak{X} - 6i\sqrt{3}\,\mathfrak{Z}^2 = \frac{Y^3+Z^3}{2} + \frac{Y^3-Z^3}{2} = Y^3,$$

et, en multipliant membre à membre ces deux égalités, et remplaçant Y^3Z^3 par $\mathfrak{Y}^3$,

$$(14) \qquad \mathfrak{X}^2 + 2^2 3^3 \mathfrak{Z}^4 = \mathfrak{Y}^3,$$

identité dans laquelle on a

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \eta_1^{12} - 33\eta_1^8\eta_2^4 - 33\eta_1^4\eta_2^8 + \eta_2^{12}, \\ \mathfrak{Y} &= \eta_1^8 + 14\eta_1^4\eta_2^4 + \eta_2^8, \\ \mathfrak{Z} &= \eta_1\eta_2(\eta_1^4 - \eta_2^4). \end{aligned}\right.$$

C'est encore une solution *primitive*. Le groupe G dérive des substitutions

$$(G) \qquad \eta' = i\eta, \qquad \eta' = \frac{1+i\eta}{1-i\eta},$$

dont la première échange entre eux les deux polynomes Y, Z du cas précédent et laisse $\mathfrak{Y}$ invariable.

10. *Quatrième cas : Exposants* 2, 3, 5.

On ne peut réussir pour ce dernier cas par les procédés simples qui précèdent, à cause de cette circonstance que les exposants sont premiers entre eux. Je vais indiquer très succinctement les nouvelles considérations qui peuvent conduire à la solution. Cette solution étant déjà connue, il ne vaut pas la peine de s'y arrêter longuement.

Une solution primitive, si elle existe, doit être, d'après (6), du degré 60. Les polynomes X, Y, Z auront pour degrés les nombres 30, 20, 12. L'analyse du n° 6 conduit aisément à admettre que le polynome Z doit avoir la forme

$$Z = \eta_1\eta_2(\eta_1^{10} + 11\,a\,\eta_1^5\eta_2^5 + \eta_2^{10}),$$

où la lettre a désigne un coefficient numérique à déterminer. D'une proposition que je rejette plus loin pour ne pas interrompre l'analyse, il résulte que Y est le hessien de Z, que le hessien de Y est Z^3 et que le jacobien de Y, Z est X, le tout à des facteurs numériques près. Le hessien de Z est

$$Y = \eta_1^{20} + \eta_2^{20} - 228\,a\,\eta_1^5\eta_2^5(\eta_1^{10} + \eta_2^{10}) + (396\,a^2 - 98)\eta_1^{10}\eta_2^{10}.$$

La condition que le hessien de Y soit le cube de Z détermine surabondamment a, et l'on reconnaît qu'elle est satisfaite pour $a = i$. La solution est ainsi trouvée, et se vérifie assez aisément. Je remplace η_2 par $-i\eta_2$ pour avoir les polynomes sous la forme habituelle. Les voici :

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \eta_1^{30} + \eta_2^{30} + 522\,\eta_1^5\eta_2^5(\eta_1^{20} - \eta_2^{20}) - 10005\,\eta_1^{10}\eta_2^{10}(\eta_1^{10} + \eta_2^{10}),\\ Y &= \eta_1^{20} + \eta_2^{20} - 228\,\eta_1^5\eta_2^5(\eta_1^{10} - \eta_2^{10}) + 494\,\eta_1^{10}\eta_2^{10},\\ Z &= \eta_1\eta_2(\eta_1^{10} + 11\,\eta_1^5\eta_2^5 - \eta_2^{10}). \end{aligned}\right.$$

Ils satisfont à l'identité

$$(17)\qquad X^2 = Y^3 + 2^6\,3^3\,Z^5,$$

et le groupe G résulte des substitutions

$$(\mathrm{G})\qquad \eta' = \varepsilon\eta, \qquad \eta' = \frac{\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\eta + 1}{\eta - \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)}; \qquad \varepsilon^5 = 1.$$

11. Voici la proposition à laquelle je viens de faire allusion; elle me sera fort utile, et elle est relative à l'un quelconque des cas précédents.

Soit P un polynome qui, transformé par les substitutions de G, se reproduise, sauf un facteur. Ses racines sont alors transformées de quelques-unes d'entre elles par les substitutions de G. Leur nombre est donc un multiple de M, ordre du groupe, sauf le seul cas d'exception où quelques-unes de ces racines appartiendraient à X,

Y, Z. Le polynome P a donc nécessairement la forme $X^r Y^s Z^t Q$, où Q n'ayant plus de racines communes avec X, Y, Z sera de degré multiple de M, et s'exprimera, d'après la proposition de la page 23, par une fonction homogène et entière de deux des quantités X^m, Y^n, Z^p, au choix. Or les covariants des fonctions X, Y, Z sont manifestement inaltérés, sauf facteurs numériques, par les substitutions de G. Donc :

Proposition VI. — *Tout covariant des fonctions* X, Y, Z, *qui appartiennent à une solution primitive de* $X^m + Y^n + Z^p = 0$, *est le produit de puissances de* X, Y, Z *par une fonction entière et homogène de* X^m *et de* Y^n.

Dans chaque cas, le simple examen du degré de ce covariant fixera les exposants r, s, t. Ainsi, dans le cas du numéro précédent, $m = 2$, $n = 3$, $p = 5$, le hessien de Z est du degré 20. Ce ne peut être que Y. Le hessien de Y est du degré 36; ce ne peut être que Z^3. Quant au jacobien de Y, Z, on a vu dès l'origine (p. 19) qu'il n'est autre que X.

12. J'ai terminé ici ce qui concerne la solution de l'équation indéterminée $X^m + Y^n + Z^p = 0$. J'ai reconnu qu'elle existe effectivement dans chacun des cas trouvés d'abord comme étant les seuls possibles. Revenant maintenant à la proposition I, je conclus ainsi :

Proposition VII. — *Soit* ζ *une fonction d'une variable* α *qui n'ait que des points critiques algébriques (l'infini compris), au nombre de trois; si les ordres* m, n, p *de ces points critiques satisfont à l'inégalité* $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} > 1$, *alors* ζ, α *sont exprimables rationnellement en fonction d'une même variable.*

Ajoutons, pour mémoire, que, *si* ζ *a moins de trois points critiques, la conclusion subsiste.* Car, s'il y a deux points critiques $\alpha = a$, b, d'ordre m et n, on posera

$$\frac{\alpha - a}{\alpha - b} = \eta^{mn},$$

et ζ, α s'exprimeront rationnellement en fonction de η.

13. La proposition VII a une réciproque, mais qui exige certaines restrictions. Il est évident, en effet, que deux variables ζ, α peuvent

être fonctions rationnelles d'une même variable, dans des conditions très différentes de celles qui sont admises en l'énoncé de cette proposition. Pour le sujet actuel, voici la réciproque que j'envisage.

Proposition VIII. — *Soit* ζ *une fonction algébrique de* α *ayant, pour chaque valeur de* α, M *déterminations différentes. On suppose, en outre, que, pour un point critique quelconque, les* M *valeurs de* ζ *se répartissent en divers cycles, contenant chacun pareil nombre de ces valeurs; en sorte que, pour* $\alpha = a$, *il y ait* $\frac{M}{m}$ *cycles contenant chacun* m *déterminations de* ζ; *pour* $\alpha = b$, $\frac{M}{n}$ *cycles contenant chacun* n *déterminations de* ζ; *pour* $\alpha = c$, $\frac{M}{p}$ *cycles contenant chacun* p *déterminations, etc.*

D'après ces suppositions, si ζ *et* α *sont exprimables rationnellement en fonction d'une même variable, les points critiques* a, b, c, ... *sont au plus au nombre de trois, et, s'il y en a trois, leurs ordres satisfont à l'inégalité* $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} > 1$.

Soit η la variable en fonction de laquelle α, ζ s'expriment rationnellement. D'après les hypothèses, on a $\alpha = f(\eta)$, f étant une fraction dont les termes sont du degré M. En outre, pour $\alpha = a$, les M valeurs de η se répartissent, comme celles de ζ, en $\frac{M}{m}$ cycles contenant chacun m racines η. Donc le numérateur de $(\alpha - a)$ est la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un polynome entier. De même les numérateurs de $(\alpha - b)$ et $(\alpha - c)$ sont les puissances $n^{\text{ième}}$ et $p^{\text{ième}}$ de polynomes entiers. Envisageons seulement ces trois points critiques. Nous avons

$$\alpha - a = \frac{X^m}{U}, \qquad \alpha - b = \frac{Y^n}{U}, \qquad \alpha - c = \frac{Z^p}{U},$$

et par conséquent

$$(18) \qquad (b-c)X^m + (c-a)Y^n + (a-b)Z^p = 0;$$

donc

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} > 1.$$

Si X, Y, Z constituent une solution *primitive* de (18), alors il n'y a pas d'autre point critique (n° 3, p. 19). Or je dis que les hypothèses exigent effectivement que la solution soit primitive. Si, en effet, elle ne l'est pas, elle dérive d'une solution primitive par une

substitution rationnelle (prop. II, p. 19), c'est-à-dire qu'on a obtenu X, Y, Z en substituant dans d'autres polynomes $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ à la variable η une fonction rationnelle $\varphi(\eta)$, et chassant ensuite le dénominateur. Les points critiques nouveaux correspondent aux valeurs de α pour lesquelles $\varphi'(\eta)$ devient nulle. Les hypothèses exigent donc que, dès que α acquiert une de ces valeurs, toutes les valeurs correspondantes de η soient des racines de $\varphi'(\eta)=0$. Cette conséquence est impossible, le degré de $\varphi'(\eta)$ étant moindre que M. La proposition VIII est donc prouvée, et l'on a, en outre, cette conséquence, la solution (18) étant primitive :

Des hypothèses contenues dans l'énoncé de la proposition VIII, il résulte

$$\frac{2}{M}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}-1.$$

Il s'offre ici une vérification curieuse. On pourrait effectivement démontrer la proposition VIII, en ayant recours à la théorie des courbes algébriques. D'après les hypothèses, la courbe lieu du point dont les coordonnées sont α, ζ est du genre zéro, ou unicursale. Son degré est égal à M. En appliquant l'équation qui donne le *genre* d'une courbe algébrique douée de singularités quelconques, et supposant les singularités soumises aux restrictions contenues dans l'énoncé de la proposition, on trouve l'égalité

$$(19)\qquad -2=M\left[-2+\sum\left(1-\frac{1}{m}\right)\right],$$

où la somme doit s'appliquer successivement à tous les points critiques a, b, c, ... J'en conclus

$$\sum\left(1-\frac{1}{m}\right)<2,$$

ce qui exige que les nombres m, n, p ne soient pas plus de trois. L'inégalité, s'il y a trois de ces nombres, devient

$$\sum\frac{1}{m}>1.$$

Ensuite l'égalité (19) devient

$$\frac{2}{M}=-1+\sum\frac{1}{m},$$

ce qui concorde avec le résultat précédent.

14. J'en ai fini avec cette théorie générale, et j'arrive aux équations différentielles linéaires. Il me semble utile de rappeler d'abord en quelques lignes les propositions simples et fondamentales qui constituent la théorie des points singuliers des équations linéaires, et que l'on doit à M. Fuchs [1], *en me bornant toutefois aux propositions que je dois utiliser.*

Soit une équation différentielle linéaire de l'ordre q

$$y^{(q)} + a_1 y^{(q-1)} + a_2 y^{(q-2)} + \ldots + a_{q-1} y' + a_q y = 0,$$

dont on veut étudier les intégrales pour les valeurs de la variable indépendante x voisines de x_0. On suppose que, pour ces valeurs de x, les coefficients $a_1, \ldots, a_q$ sont des fonctions uniformes de x. Cette supposition embrasse notamment tous les cas où les coefficients seraient des fonctions algébriques. En effet, lorsqu'il en est ainsi, un changement de variable convenable les rend uniformes dans une certaine étendue.

Premier cas. — Les coefficients $a_1, \ldots, a_q$ sont synectiques, c'est-à-dire que leurs développements suivant les puissances entières et ascendantes de $(x - x_0)$ ne contiennent que des termes à exposants positifs, ou encore que $a_1, \ldots, a_q$ sont tous nuls ou finis pour $x = x_0$.

Quand il en est ainsi, l'intégrale générale est elle-même synectique. C'est un théorème dû à Cauchy. On peut la composer avec q intégrales particulières, dont les développements respectifs commencent par des termes de degré 0, 1, 2, ..., $(q-1)$ et qu'on peut même préciser ainsi :

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 && + A_1(x - x_0)^q + B_1(x - x_0)^{q+1} + \ldots,\\
y_2 &= x - x_0 && + A_2(x - x_0)^q + B_2(x - x_0)^{q+1} + \ldots,\\
y_3 &= (x - x_0)^2 && + A_3(x - x_0)^q + B_3(x - x_0)^{q+1} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_q &= (x - x_0)^{q-1} && + A_q(x - x_0)^q + B_q(x - x_0)^{q+1} + \ldots.
\end{aligned}$$

---

[1] Je dois citer aussi le mémoire de M. Thomé : *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXXIV, p. 193, et t. LXXV, p. 265), et celui de M. Fröbenius : *Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen* (*Ibid.*, t. LXXVI, p. 214); et, en outre, la thèse de M. Gaston Floquet (Paris, 1879; *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. VIII, 1879, *supplément*, p. 49).

Deuxième cas. — Quelques-uns des coefficients sont infinis pour $x = x_0$. C'est alors qu'on appelle x_0 un *point singulier*.

On reconnaît immédiatement les faits suivants : *Pour que l'intégrale générale soit développable suivant les puissances ascendantes de* $(x - x_0)$, *il est* NÉCESSAIRE *que les produits* $(x - x_0)a_1$, $(x - x_0)^2 a_2$, ..., $(x - x_0)^q a_q$ *soient synectiques.*

Si l'intégrale générale est ainsi développable, il existe q *intégrales particulières et distinctes,* $y_1, y_2, \ldots, y_q$, *telles que les produits*

$$(x - x_0)^{-s_1} y_1, \quad (x - x_0)^{-s_2} y_2, \quad \ldots, \quad (x - x_0)^{-s_q} y_q$$

soient synectiques et aient des limites finies, différentes de zéro pour $x = x_0$. *Les nombres* $s_1, s_2, \ldots, s_q$ *sont nécessairement les racines de l'équation* DÉTERMINANTE

$$s(s-1)(s-2)\ldots(s-q+1) + b_1 s(s-1)\ldots(s-q+2) + b_2 s(s-1)\ldots(s-q+3) + \ldots + b_{q-1}s + b_q = 0,$$

où b_k *est la limite de* $(x - x_0)^k a_k$ *pour* $x = x_0$.

Les racines de l'équation déterminante sont nécessairement inégales.

Pour faciliter le langage, on dit que y *appartient à l'exposant* s, relativement à $(x - x_0)$, quand $(x - x_0)^{-s} y$ a une limite finie et différente de zéro pour $x - x_0$.

Un cas important à noter est celui où quelques-uns des exposants s ont des différences entières. Pour fixer les idées, soient

$$s_2 = s_1 + m, \qquad s_3 = s_2 + m',$$

m et m' étant des entiers positifs, et supposons que les différences des autres exposants avec s_1 soient non entières. On pourra remplacer y_1 par une combinaison linéaire de y_1, y_2 et y_3, dans laquelle les coefficients de $(x - x_0)^{s_2}$ et $(x - x_0)^{s_3}$ seront à volonté, par exemple, zéro. On pourra aussi dans y_2 changer à volonté le coefficient de $(x - x_0)^{s_3}$. En général, ayant pris pour premier terme du développement de y, $(x - x_0)^s$, s étant d'ailleurs une racine de l'équation déterminante, les termes suivants se déterminent sans ambiguïté au moyen de la méthode des coefficients indéterminés. Dans l'hypothèse actuelle, on voit que certaines conditions seront nécessairement vérifiées, au nombre de deux pour y_1, d'une pour y_2.

Et généralement, on peut dire : *Pour que l'intégrale générale soit développable suivant les puissances ascendantes de* $(x - x_0)$, *si l'équation déterminante a des racines à différences entières, il est* NÉCESSAIRE *que certaines conditions subsidiaires soient satisfaites. On trouve ces conditions en observant que les racines à différences entières permettent de faire disparaître certains termes des développements des intégrales.*

La nécessité des diverses conditions que je viens d'énoncer est presque évidente. Ce qu'on doit à M. Fuchs et aux géomètres qui l'ont suivi dans ces recherches, c'est d'avoir prouvé que *ces conditions sont suffisantes.*

15. Après avoir rappelé ces résultats, j'ajoute les remarques suivantes, qui sont également familières aux géomètres. Dans certains cas, les conditions subsidiaires qui s'imposent dès que les différences de quelques racines sont entières, ces conditions, dis-je, sont manifestement remplies, et on le reconnaît sans calcul. Ces cas sont ceux où les développements des coefficients $a_1, \ldots, a_q$ suivant les puissances ascendantes de $(x - x_0)$ présentent des lacunes. Si, par exemple, tous les produits $(x - x_0)^k a_k$ sont des fonctions paires de $(x - x_0)$ et que deux racines s_1, s_2 aient une différence impaire, leurs différences avec les autres racines étant, je le suppose, d'ailleurs fractionnaires, la condition subsidiaire sera remplie, et il y aura effectivement une intégrale appartenant à l'exposant s_1, une intégrale appartenant à l'exposant s_2. Plus généralement, si tous les produits $(x - x_0)^k a_k$ sont des fonctions synectiques de $(x - x_0)^m$, m étant un entier positif, les conditions subsidiaires relatives à des racines dont les différences ne sont pas multiples de m sont d'elles-mêmes remplies. Et encore, si dans tous les produits $(x - x_0)^k a_k$ développés suivant les puissances croissantes de $(x - x_0)$, tous les termes manquent depuis le second jusqu'à celui de rang m inclusivement, alors sont remplies d'elles-mêmes les conditions subsidiaires relatives à des racines s dont les différences sont des nombres entiers qui ne dépassent pas m.

J'ajoute que les résultats ci-dessus s'appliquent encore pour x infiniment grand. Les développements se font alors suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{x}$. Les produits $x^k a_k$ doivent être tous finis ou nuls pour $x = \infty$.

16. Supposons qu'effectivement toutes les conditions ci-dessus soient satisfaites. Si les exposants $s_1, s_2, \ldots, s_q$ ne sont pas tous entiers, le point $x = x_0$ est un point critique pour l'intégrale générale, et il ne l'est que dans ce cas. Si, n'étant pas entiers, $s_1, \ldots, s_q$ sont commensurables, x_0 est un point critique algébrique pour l'intégrale. L'ordre de ce point critique est le commun dénominateur de $s_1, s_2, \ldots, s_q$.

J'attache ici une importance plus grande à la considération du rapport de deux intégrales. Les intégrales ne pouvant pas être distinguées entre elles, on voit que les diverses déterminations de ce rapport appartiennent, relativement à $(x - x_0)$, aux divers exposants $(s_k - s_l)$.

Quand toutes les différences $(s_k - s_l)$ des racines de l'équation déterminante sont entières, x_0 n'est pas un point critique pour le *rapport* des intégrales. Si toutes ces différences sont commensurables, x_0 est un point critique algébrique dont l'ordre est le commun dénominateur de ces différences.

Il ne faut pas perdre de vue la supposition faite d'abord, à savoir que les coefficients de l'équation sont uniformes quand x est voisin de x_0. Si, par exemple, ces coefficients sont des fonctions algébriques non rationnelles, un changement de variable est nécessaire en certains points pour qu'ils deviennent uniformes. Par le retour à la variable primitive, on voit qu'un point critique des coefficients peut être aussi un point critique pour les intégrales et pour leurs rapports.

Un point singulier x_0 peut être point critique algébrique pour les rapports des intégrales, et être cependant transcendant pour les intégrales elles-mêmes. Cela est évident; par exemple, dans l'équation

$$y'' + \frac{2}{x^2} y' - \frac{1}{x^3} y = 0,$$

le point $x = 0$ est transcendant pour les intégrales; c'est cependant un point ordinaire, non pas même critique pour les rapports des intégrales. Car l'intégrale générale est $y = e^{-\frac{1}{x}}(A + Bx)$, et le rapport de deux intégrales est une fraction rationnelle.

La circonstance dont je parle est toujours due, comme ici, à la présence d'un facteur transcendant, dont on peut aisément débarrasser d'abord les intégrales.

Je suppose, en effet, que, pour une équation linéaire d'ordre quelconque q, les rapports des intégrales appartiennent, relativement à $(x - x_0)$, à des exposants ν, ν', ... Je considère les rapports de q intégrales distinctes à une seule d'entre elles, en sorte que ces rapports soient $1, z_1, z_2, \ldots, z_{q-1}$, appartenant aux exposants 0, ν, ν', ... Prenons le déterminant $D = (z_1' z_2'' \ldots z_{q-1}^{(q-1)})$. Suivant ces suppositions, D appartient relativement à $(x - x_0)$ à un exposant déterminé

$$N = \nu + \nu' + \ldots - \frac{q(q-1)}{2}.$$

Les intégrales de l'équation ne diffèrent des z que par un facteur commun, qui est une intégrale et que j'appelle y_q. Envisageons le déterminant

$$\Delta = (y_1 y_2' y_3'' \ldots y_q^{(q-1)}).$$

On a

$$\Delta = y_q^q D,$$

où la lettre supérieure q de y_q^q est un exposant. On déduit de là

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = q \frac{y_q'}{y_q} + \frac{D'}{D}.$$

La quantité $\frac{D'}{D}$ appartient à l'exposant -1; quant à $\frac{\Delta'}{\Delta}$, c'est, à un facteur numérique près, le coefficient a_1 de l'équation proposée

$$y^{(q)} + a_1 y^{(q-1)} + \ldots = 0.$$

Si donc a_1 appartient à l'exposant -1, ou à un exposant supérieur, on voit immédiatement en intégrant cette dernière relation que y_q appartient aussi à un exposant déterminé.

C'est seulement dans le cas où a_1 appartient à un exposant inférieur à -1 (a_1 est, il ne faut pas l'oublier, supposée fonction uniforme) que y_q n'appartient à aucun exposant. *Or on peut, d'une infinité de manières, changer la fonction inconnue dans une équation à coefficients uniformes, de manière que tous les infinis du premier coefficient a_1 soient simples, l'équation transformée étant elle-même à coefficients uniformes.* (On peut, par exemple, rendre a_1 égal à zéro.) *Dans une équation ainsi préparée, tout point pour lequel les rapports des intégrales appartiennent à des exposants déterminés est tel aussi que les intégrales elles-mêmes appartiennent aussi à des exposants déterminés.* Je suppose, dans tout ce qui suit, les équations ainsi préparées.

Pour les équations à coefficients *rationnels*, ce qui vient d'être dit s'applique également au point singulier $x = \infty$.

17. Ayant rappelé comment on trouve les points critiques des intégrales et ceux des rapports des intégrales, je peux maintenant appliquer aux équations différentielles les résultats obtenus précédemment pour des fonctions quelconques. De la proposition VII je déduis, par exemple, celle-ci : *Soit une équation linéaire à coefficients rationnels. Si les rapports des intégrales n'ont que des points critiques algébriques (l'infini compris) en nombre moindre que trois, ou s'ils en ont trois, et que les ordres m, n, p de ces points satisfassent à l'inégalité*

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} > 1,$$

alors ces rapports et la variable indépendante s'expriment rationnellement en fonction d'une nouvelle variable.

Cette nouvelle variable nous est connue par la théorie précédemment exposée. Je dis maintenant qu'on peut trouver immédiatement aussi la nouvelle fonction y qu'il faut prendre pour que l'équation transformée soit à coefficients rationnels, comme la précédente, et ait, en outre, ses intégrales rationnelles.

Je laisse de côté le cas où il y a moins de deux points critiques, et je ne m'occupe que du cas où il y en a trois. J'envisage une solution de l'équation

$$X^m + Y^n + Z^p = 0,$$

la variable qui figure dans ces polynomes étant η, et je pose

$$x = -\frac{X^m}{Z^p},$$

supposant, ce qui est permis, les trois points critiques être

$$x = 0,\ 1,\ \infty.$$

Suivant l'hypothèse :

1° Pour $x = 0$, les intégrales appartiennent à des exposants s_0, $s_0 + \frac{a}{m}$, $s_0 + \frac{a'}{m}$, ..., où a, a', ... sont des entiers positifs et croissants ;

2° Pour $x = 1$, elles appartiennent à des exposants s_1, $s_1 + \frac{b}{n}$, $s_1 + \frac{b'}{n}$, ..., où b, b', ... sont des entiers positifs et croissants;

3° Pour $x = \infty$, les intégrales appartiennent, relativement à $\frac{1}{x}$, à des exposants s_2, $s_2 + \frac{c}{p}$, $s_2 + \frac{c'}{p}$, ..., où c, c' sont des entiers positifs et croissants;

4° Pour toute autre valeur de x, les intégrales appartiennent à des exposants s, $s + \varepsilon$, $s + \varepsilon'$, ..., où ε, ε', ... sont des entiers positifs et croissants.

Soit

$$y^{(q)} + P y^{(q-1)} + \ldots + L y = 0$$

l'équation proposée. On aura

$$P = \frac{R_0}{x} + \frac{R_1}{x-1} + \frac{R_\omega}{x-\omega} + \frac{R_{\omega'}}{x-\omega'} + \ldots$$

Pour $x = 0$, l'équation déterminante est

$$s(s-1)\ldots(s-q+1) + R_0 s(s-1)\ldots(s-q+2) + \ldots = 0.$$

Envisageons la somme des racines; posons

$$\frac{a}{m} + \frac{a'}{m} + \ldots = \frac{\alpha}{m}.$$

Nous aurons alors

$$q s_0 + \frac{\alpha}{m} = \frac{q(q-1)}{2} - R_0.$$

En posant de même

$$\frac{b}{n} + \frac{b'}{n} + \ldots = \frac{\beta}{n}, \qquad \frac{c}{p} + \frac{c'}{p} + \ldots = \frac{\gamma}{p},$$

on aura

$$q s_1 + \frac{\beta}{n} = \frac{q(q-1)}{2} - R_1,$$

$$q s_2 + \frac{\gamma}{n} = -\frac{q(q-1)}{2} + R_0 + R_1 + R_\omega + R_{\omega'} + \ldots.$$

Pour $x = \omega$, les racines seront s_ω, $s_\omega + \varepsilon$, $s_\omega + \varepsilon'$, ..., où ε, ε' sont des entiers positifs. Posons

$$\varepsilon + \varepsilon' + \ldots = E_\omega;$$

alors nous aurons encore

$$q s_\omega + E_\omega = \frac{q(q-1)}{2} - R_\omega.$$

Additionnons membre à membre toutes ces égalités, et nous obtenons

$$(20)\qquad \begin{aligned} &-q(s_0+s_1+s_2+s_\omega+s_{\omega'}+\ldots) \\ &\quad=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{p}+\mathrm{E}_\omega+\mathrm{E}_{\omega'}+\ldots-\lambda\frac{q(q-1)}{2}, \end{aligned}$$

où λ est un nombre entier.

Soit maintenant y une intégrale quelconque de l'équation. Je pose

$$z=y\,\mathrm{X}^{-s_0 m}\,\mathrm{Y}^{-s_1 n}\,\mathrm{Z}^{-s_2 p}(\mathrm{X}^m+\omega\,\mathrm{Z}^p)^{-s_\omega}(\mathrm{X}^m+\omega'\,\mathrm{Z}^p)^{-s_{\omega'}}\ldots.$$

Il est visible qu'alors pour toutes les valeurs de η qui correspondent à $x=0, 1, \infty, \omega, \omega', \ldots$, z est une fonction synectique de η. Il en est encore de même pour toute autre valeur de η, sauf pour $\eta=\infty$. Pour η infini, y est une fonction synectique de $\frac{1}{\eta}$. Mais le facteur introduit ne laisse pas subsister cette propriété pour z. Soit d le degré de ce facteur; on a

$$d=-\mathrm{M}(s_0+s_1+s_2+s_\omega+s_{\omega'}+\ldots),$$

où M est le degré de la solution choisie pour l'équation indéterminée. D'après (20), ceci devient

$$d=\frac{\mathrm{M}}{q}\left[\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{p}+\mathrm{E}_\omega+\mathrm{E}_{\omega'}\ldots-\lambda\frac{q(q-1)}{2}\right]=\frac{\mathrm{MA}}{q}.$$

Si l'on prenait pour M le degré M_1 de la solution primitive, MA serait entier, mais pourrait n'être pas divisible par q. Soit δ le plus grand commun diviseur de $\mathrm{M}_1\mathrm{A}$ et de q. En choisissant $\mathrm{M}=\frac{\mathrm{M}_1 q}{\delta}$, on aura pour d un nombre entier. Alors z est une fonction uniforme de η pour toutes les valeurs de cette variable, y compris l'infini, et synectique pour toutes les valeurs de η, sauf l'infini. Donc z est un polynome entier, et l'on voit que d est le degré de ce polynome.

Envisageons maintenant une solution primitive de la même équation indéterminée. Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ les polynomes qui composent cette solution, et ζ la variable qui y figure. D'après la proposition II (p. 19), si nous posons encore

$$x=-\frac{\mathfrak{X}^m}{\mathfrak{Z}^p},$$

ζ est une fonction rationnelle de η. Soit

$$\zeta=\frac{f(\eta)}{\mathrm{F}(\eta)}$$

cette fraction, dont les termes sont du degré $\frac{M}{M_1} = \frac{q}{\delta}$. Prenons deux des polynomes z; leur rapport est aussi une fonction rationnelle de ζ, en sorte qu'on a

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)} = \frac{\Phi(\zeta)}{\Psi(\zeta)}.$$

Soit d_1 le degré de $\Phi(\zeta)$ et $\Psi(\zeta)$. On a par suite

$$\varphi(\eta) = \Phi(\zeta)\,F(\eta)^{d_1}, \qquad \psi(\eta) = \Psi(\zeta)\,F(\eta)^{d_1};$$

d'où je conclus

$$d_1 = \frac{d\delta}{q} = \frac{M_1 A}{q}.$$

Donc $M_1 A$ est divisible par q. Le plus grand commun diviseur de $M_1 A$ et de q est donc q lui-même, et la solution de degré M est primitive. En résumé :

Proposition IX. — *Soit une équation différentielle linéaire de l'ordre q, à coefficients rationnels, ayant divers points singuliers*

$$x = 0,\ 1,\ \infty,\ \omega,\ \omega',\ \ldots,$$

on la suppose telle que les intégrales appartiennent :

Relativement à $(x-\omega)$, aux exposants s_ω, $s_\omega + \varepsilon_\omega$, $s_\omega + \varepsilon'_\omega$, ...;

Relativement à $(x-\omega')$, aux exposants $s_{\omega'}$, $s_{\omega'} + \varepsilon_{\omega'}$, $s_{\omega'} + \varepsilon'_{\omega'}$, ..., et ainsi de suite, les lettres ε désignant des entiers positifs, dont on désigne par E la somme totale.

On suppose, en outre, que :

Relativement à x, les intégrales appartiennent aux exposants s_0, $s_0 + \frac{a}{m}$, $s_0 + \frac{a'}{m}$, ...;

Relativement à $(x-1)$, aux exposants s_1, $s_1 + \frac{b}{n}$, $s_1 + \frac{b'}{n}$, ...;

Relativement à $\frac{1}{x}$, aux exposants s_2, $s_2 + \frac{c}{p}$, $s_2 + \frac{c'}{p}$, ..., les lettres a, a', ..., b, b', ..., c, c', désignant des entiers positifs, ainsi que m, n, p, ces derniers étant supérieurs à l'unité, et satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} > 1.$$

Soit X, Y, Z *une solution primitive de l'équation indéterminée* $X^m + Y^n + Z^p = 0$, *la variable qui figure dans les polynomes*

étant désignée par η; *et soit* M *le degré de cette solution, nombre donné par l'égalité*

$$\frac{2}{M} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} - 1.$$

Si l'on change de variable et de fonction en posant

$$x = -\frac{X^m}{Z^p},$$

$$(21) \qquad z = y X^{-s_0 m} Y^{-s_1 n} Z^{-s_3 p} (X^m + \omega Z^p)^{-s_\omega} (X^m + \omega' Z^p)^{-s_{\omega'}} \ldots,$$

la variable et la fonction étant d'abord x, y, *maintenant* η, z : *alors l'équation transformée a pour intégrale générale un polynome entier. En d'autres termes,* z *est un polynome entier de la variable* η.

Pour avoir le degré d *de ce polynome entier, il faut envisager le nombre* A :

$$(22) \quad A = -\lambda \frac{q(q-1)}{2} + \frac{a + a' + \ldots}{m} + \frac{b + b' + \ldots}{n} + \frac{c + c' + \ldots}{p} + E,$$

où λ *surpasse d'une unité le nombre des points singuliers* ω, ω', ... (les points 0, 1, ∞ étant omis). *Le degré* d *de* z *est*

$$d = \frac{MA}{q},$$

qui est toujours un nombre entier.

18. Dans la suite de ce mémoire, nous aurons de nombreuses applications de cette dernière proposition aux équations du troisième et du quatrième ordre. Pour le moment, je veux l'appliquer simplement à retrouver d'une manière simple et nouvelle, et à étendre les résultats déjà connus et qui concernent l'équation de Gauss. J'écris cette équation sous la forme

$$y'' + \left(\frac{R_0}{x} + \frac{R_1}{x-1}\right) y' + \frac{C}{x(x-1)} y = 0,$$

mettant ainsi en évidence les résidus R_0, R_1 qui figurent dans l'analyse précédente. Il n'y a pas d'autre point singulier que $x = 0, 1, \infty$.

La formule (22) donne ici

$$A = -1 + \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p},$$

et il faut observer que les nombres a, b, c doivent être respectivement premiers avec m, n, p, sans quoi les points critiques ne seraient pas d'ordre m, n, p. Grâce à cette observation, on peut vérifier que MA est toujours pair, comme il résulte de la dernière partie de la proposition IX.

Le cas le plus simple est celui où les nombres a, b, c sont tous trois égaux à l'unité.

Le nombre A est alors

$$A = -1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p},$$

ce qui est précisément $\frac{2}{M}$ (p. 16). Le produit AM est égal à 2, ainsi que l'ordre q de l'équation, et l'on a

$$d = \frac{MA}{q} = 1.$$

Le polynome z est du premier degré; comme il contient linéairement deux constantes arbitraires, ce sera

$$z = K\eta + K',$$

où K, K′ sont arbitraires. L'équation est donc intégrée. Il n'y a plus qu'à calculer le facteur. A cet effet, il faut distinguer plusieurs cas :

Pour $x = 0$, l'équation déterminante est

$$s(s - 1 + R_0) = 0;$$

Pour $x = 1$, elle est

$$s(s - 1 + R_1) = 0;$$

Pour $x = \infty$, elle est

(23) $$s(s + 1 - R_0 - R_1) + C = 0.$$

Les hypothèses $a = 1$, $a' = 1$ exigent que l'on ait

$$\pm\frac{1}{m} - 1 + R_0 = 0 \quad \text{et} \quad \pm\frac{1}{n} - 1 + R_1 = 0,$$

ce qui détermine R_0 et R_1 de plusieurs manières. Ces nombres choisis, on connaîtra la somme des racines de la troisième équation.

La différence est donnée égale à $\frac{1}{p}$. Ceci déterminera C. Il y a donc quatre équations distinctes répondant à ce cas.

Premier cas :

$$R_0 = 1 - \frac{1}{m}, \quad R_1 = 1 - \frac{1}{n}. \qquad \text{Alors} \qquad s_0 = 0, \quad s_1 = 0.$$

Pour la troisième équation (23), les racines étant s_2 et $s_2 + \frac{1}{p}$, on a

$$2s_2 + \frac{1}{p} = R_0 + R_1 - 1 = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n},$$

et par conséquent

$$s_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{M}.$$

On a alors

$$C = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{p}\right),$$

et le facteur, d'après (21), est $Z^{\frac{p}{M}}$. Ainsi *l'équation de Gauss*

$$y'' + \left(\frac{R_0}{x} + \frac{R_1}{x-1}\right)y' + \frac{C}{x(x-1)}y = 0,$$

dans le cas où

$$R_0 = 1 - \frac{1}{m}, \qquad R_1 = 1 - \frac{1}{n}, \qquad C = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{p}\right),$$

les entiers m, n, p, *positifs et supérieurs à* 1, *satisfaisant à la condition* $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} > 1$, *et* M *étant donné par*

$$\frac{2}{M} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} - 1$$

a pour solution générale

$$y = \frac{1}{Z^{\frac{p}{M}}}(K\eta + K'), \tag{24}$$

où K, K' *sont des constantes arbitraires. On a posé* $x = -\frac{X^m}{Z^p}$, X, Z *appartenant à la solution primitive de* $X^m + Y^n + Z^p = 0$, *où la variable est* η.

Remarquons qu'il suffirait de prendre $y = 1 : Z^{\frac{p}{M}}$, cette fonction

ayant pour chaque valeur de x plusieurs déterminations dont les combinaisons linéaires reproduisent le second membre de (24).

Si l'on tient compte de ce fait qu'il existe quatre cas de l'équation indéterminée, et que l'on peut permuter les nombres m, n, p entre eux, on voit qu'on a ainsi intégré l'équation dans 24 cas différents. Il faut toutefois observer que l'échange de m, n équivaut à l'échange de x et de $(x-1)$, échange dont on connaît l'effet sur l'équation de Gauss. Les autres permutations de m, n, p, combinées avec les transformations connues, réunissent entre eux quelques-uns des cas suivants et celui que je viens de traiter.

Deuxième cas :

$$R_0 = 1 - \frac{1}{m}, \quad R_1 = 1 + \frac{1}{n}. \qquad \text{Alors} \qquad s_0 = 0, \quad s_1 = -\frac{1}{n}.$$

On a

$$s_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{M},$$

$$C = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{M}\right)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p} - \frac{1}{M}\right).$$

Dans ce cas, l'équation a pour intégrale générale

$$y = \frac{1}{YZ^{\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{n}\right)}}(K\eta + K').$$

Troisième cas :

$$R_0 = 1 + \frac{1}{m}, \qquad R_1 = 1 - \frac{1}{n}, \qquad C = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{p} - \frac{1}{M}\right).$$

Il se déduit du précédent par l'échange de X et de Y, de m et de n.

Quatrième cas :

$$R_0 = 1 + \frac{1}{m}, \qquad R_1 = 1 + \frac{1}{n}, \qquad C = \left(1 + \frac{1}{M}\right)\left(1 + \frac{1}{M} - \frac{1}{p}\right).$$

L'intégrale générale est

$$y = \frac{Z^{p\left(1 + \frac{1}{M} - \frac{1}{p}\right)}}{XY}(K\eta + K').$$

19. Dans les cas que je viens de passer en revue, la solution est

immédiate, le polynome z étant du premier degré. Il n'en est plus de même dans les autres cas. Il importe donc de savoir calculer ce polynome sans faire aucune transformation.

Soient z_1, z_2 deux des polynomes entiers z, dont le rapport est celui de deux intégrales de l'équation proposée (22). A cause de cette origine, ils jouissent des propriétés suivantes :

1° Leurs combinaisons linéaires appartiennent aux exposants 0, 1, relativement à tout binome $(\eta - \omega)$, dans lequel ω n'est racine ni de X, ni de Y, ni de Z. C'est la traduction de ce fait que l'équation n'a pas d'autre point singulier que $x = 0, 1, \infty$.

2° Les polynomes z_1, z_2 se transforment ensemble par une substitution linéaire quand on effectue, sur la variable binaire η, une quelconque des substitutions du groupe G, qui correspond à l'équation $X^m + Y^n + X^p = 0$. En effet, ces substitutions altèrent η, mais laissent x invariable.

Je dis que ces deux propriétés sont caractéristiques des polynomes z; en d'autres termes, *deux polynomes jouissant de ces propriétés sont proportionnels à deux intégrales de l'équation de Gauss; la variable x de cette équation est* $x = -\dfrac{X^m}{Z^p}$.

Avec les deux polynomes z_1, z_2, je compose les deux fonctions y_1, y_2, en posant

$$y_1 = \frac{z_1}{Z^{\frac{pd}{M}}}, \qquad y_2 = \frac{z_2}{Z^{\frac{pd}{M}}}.$$

J'ai appelé d le degré des polynomes z_1, z_2. Les fonctions y_1 et y_2 sont ainsi du degré zéro, et n'ont pas d'autres points critiques que ceux de z_1 et z_2.

Les exposants relatifs à $(\eta - \eta_\infty)$, η_∞ étant une quelconque des racines de Z, sont seuls modifiés. Nous pouvons supposer que z_1 et z_2 n'ont pas de facteur commun. En outre, les hypothèses exigent que les combinaisons linéaires de z_1 et z_2 appartiennent aux deux mêmes exposants pour chacune des racines d'un même polynome X, Y, Z. Ces exposants seront donc : relativement à $(\eta - \eta_0)$, η_0 étant racine de X, 0 et a; relativement à $(\eta - \eta_1)$, η_1 étant racine de Y, 0 et b; relativement à $(\eta - \eta_\infty)$, η_∞ étant racine de Z, 0 et c.

Pour y_1 et y_2, les exposants auxquels appartiennent leurs combinaisons linéaires sont encore 0 et a, 0 et b, relativement à $(\eta - \eta_0)$

et à $(\eta - \eta_1)$. Mais, relativement à $(\eta - \eta_\infty)$, les exposants sont $-\frac{pd}{M}$ et $-\frac{pd}{M} + c$.

Ainsi qu'on l'a déjà remarqué, relativement à $\frac{1}{\eta}$, les exposants auxquels appartiennent les combinaisons linéaires de y_1 et y_2 sont o, 1, ainsi que relativement à $(\eta - \omega)$, quand ω est tout autre que η_0, η_1 ou η_∞. Par cette notation, j'entends *toutes* les racines de X, Y, Z.

Ayant posé $x = -\frac{X^m}{Z^p}$, je peux regarder y_1 et y_2 comme des fonctions de x, et composer une équation linéaire du second ordre, à variable x, ayant y_1 et y_2 pour intégrales. Ces dernières ne sont pas fonctions rationnelles de x. Mais leurs diverses déterminations correspondent aux diverses déterminations de η pour chaque valeur de x. Les diverses valeurs de η se déduisent d'une d'entre elles par les substitutions du groupe G, lesquelles, par hypothèse, transforment z_1, z_2 et, par suite, y_1 et y_2 par des substitutions linéaires et homogènes. Donc les coefficients de l'équation différentielle dont il s'agit sont des fonctions rationnelles de x.

Dès lors, les suppositions faites sur les exposants auxquels appartiennent, dans les divers cas, les combinaisons linéaires de y_1 et y_2, conduisent à cette conséquence que l'équation différentielle n'a que les points singuliers $x = 0$, 1, ∞, et que les racines de l'équation déterminante sont :

Pour $x = 0$,

$$s = 0, \qquad \frac{a}{m};$$

Pour $x = 1$,

$$s = 0, \qquad \frac{b}{n};$$

Pour $x = \infty$,

$$s = -\frac{d}{M}, \qquad -\frac{d}{M} + \frac{c}{p}.$$

L'équation différentielle est donc nécessairement

$$y'' + \left(\frac{R_0}{x} + \frac{R_1}{x-1}\right)y' + \frac{C}{x(x-1)}y = 0,$$

où

$$R_0 = 1 - \frac{a}{m}, \qquad R_1 = 1 - \frac{b}{n}, \qquad C = \frac{d}{M}\left(\frac{d}{M} - \frac{c}{p}\right);$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

On remarquera que l'équation déterminante relative à $x=\infty$ donne, eu égard à la somme de ses racines, la relation

$$d=\frac{M}{2}\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}-1\right),$$

que l'on peut vérifier directement en cherchant les zéros de la fonction

$$\left(z_1\frac{dz_2}{d\eta}-z_2\frac{dz_1}{d\eta}\right).$$

20. Grâce à cette proposition, la recherche des intégrales de l'équation de Gauss dans chacun des cas que l'on a ici à considérer est réduite à une opération algébrique qui se fera indépendamment de l'équation. Je ne veux pas insister sur ce sujet, et je me contente d'indiquer quelques exemples.

Si l'on prend une des fonctions X, Y, Z ou un de leurs covariants, les deux dérivées partielles du premier ordre de ce covariant, prises par rapport à η_1 et η_2, la variable η étant remplacée par $\eta_1 : \eta_2$, se transforment ensemble par des substitutions linéaires quand on opère sur η les substitutions du groupe G. Si elles satisfont, d'autre part, aux conditions relatives aux exposants, ces deux dérivées partielles seront propres à fournir des polynomes z_1, z_2. Ces dernières conditions consistent en ce que les combinaisons linéaires n'aient de racines multiples que celles de X, Y, Z. On s'assurera que cette condition est remplie en observant que le nombre des racines doubles des combinaisons des deux polynomes z_1, z_2 est celui des zéros de leur jacobien $\left(z_1\frac{dz_2}{d\eta}-z_2\frac{dz_1}{d\eta}\right)$, c'est-à-dire $2(d-1)$, d étant le degré de ces polynomes. Une racine multiple d'ordre a compte ici pour $(a-1)$ racines doubles.

Prenons par exemple les dérivées partielles du polynome $\mathcal{Y}$ appartenant à la solution de $\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^3+\mathcal{Z}^4=0$ [équations (15), p. 26], et posons

$$z_1=\frac{1}{8}\mathcal{Y}_1=\eta_1^3(\eta_1^4+7\eta_2^4),$$

$$z_2=\frac{1}{8}\mathcal{Y}_2=\eta_2^3(\eta_2^4+7\eta_1^4).$$

Il est mis en évidence que z_1 a la racine triple $\eta_1=0$, laquelle appartient au polynome $\mathcal{Z}$. Donc les six racines de $\mathcal{Z}$ sont racines triples

des combinaisons linéaires de z_1, z_2. Elles comptent ensemble pour $6.2 = 12$ racines du jacobien. Mais le degré d est ici égal à 7. Donc $2(d-1) = 12$. Le jacobien n'a pas d'autre racine. Les polynomes z_1, z_2 conviennent donc; en conséquence, pour

$$R_0 = 1 - \frac{1}{2}, \qquad R_1 = 1 - \frac{1}{3}, \qquad C = \frac{7}{24}\left(\frac{7}{24} - \frac{3}{4}\right),$$

l'équation de Gauss a l'intégrale générale

$$y = \frac{1}{\mathfrak{Z}^{\frac{7}{6}}}[K\eta^3(\eta^4 + 7) + K'(1 + 7\eta^4)],$$

après qu'on a posé

$$x = -\frac{1}{2^2 . 3^3}\frac{\mathfrak{X}^2}{\mathfrak{Z}^4},$$

$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Z}$ *étant les polynomes* (15) [p. 26] et $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$.

On a un second exemple tout analogue en prenant les dérivées partielles du polynome Y, relatif à l'équation $X^2 + Y^3 + Z^5 = 0$. Voici le résultat. Pour

$$R_0 = 1 - \frac{1}{2}, \qquad R_1 = 1 - \frac{1}{3}, \qquad C = \frac{19}{60}\left(\frac{19}{60} - \frac{1}{3}\right),$$

l'intégrale générale est

$$y = \frac{1}{Z^{\frac{19}{12}}}(Kz_1 + K'z_2),$$

où $z_1 = \frac{\partial Y}{\partial \eta_1}$, $z_2 = \frac{\partial Y}{\partial \eta_2}$, *après qu'on a posé* $x = \frac{1}{2^6 . 3^5}\frac{X^2}{Z^3}$, X, Z *étant les polynomes* (16) [p. 27].

CHAPITRE II.

Résolution de l'équation indéterminée $X^m + Y^n + Z^p = 0$ en fonctions uniformes et doublement périodiques d'une variable. — Propriétés des fonctions n'ayant que trois points critiques algébriques dont les ordres m, n, p satisfont à la relation $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$. — Propriétés des équations différentielles à coefficients doublement périodiques quand les rapports de leurs intégrales sont des fonctions uniformes. — Intégration des équations à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme. — Rappel des propriétés des fonctions $\sigma(u)$ et $\wp(u)$ de M. Weierstrass. — Nouveaux cas d'intégration de l'équation de Gauss. — Équation de Lamé. — Équations qui se rattachent à la division de l'argument dans les fonctions elliptiques. — Équations qui s'intègrent par les fonctions exponentielles et rationnelles. — Équation de Riccati.

---

1. Soient m, n, p des nombres entiers positifs, et envisageons l'intégrale

$$u = \int \frac{d\alpha}{(\alpha - a)^{1-\frac{1}{m}}(\alpha - b)^{1-\frac{1}{n}}(\alpha - c)^{1-\frac{1}{p}}}. \tag{1}$$

Si les nombres m, n, p satisfont à la condition

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1,$$

il est connu (¹) que α est une fonction uniforme (²) de u pour toutes les valeurs de cette variable (l'infini non compris). Elle est uniforme et doublement périodique, et il en est de même aussi de

$$(\alpha - a)^{\frac{1}{m}}, \quad (\alpha - b)^{\frac{1}{n}}, \quad (\alpha - c)^{\frac{1}{p}}.$$

En conséquence :

Proposition X. — *Soit ζ une fonction de la variable α : si elle n'a que trois points critiques* (l'infini compris), *que ces points*

(¹) Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, 2ᵉ édition, page 389.

(²) Il ne faut pas perdre de vue que je désigne toujours par le mot *fonction uniforme* une fonction qui a l'aspect d'une fraction rationnelle. J'ai déjà fait cette observation dans l'introduction (page 4); je la répète pour éviter tout malentendu.

soient algébriques, respectivement d'ordre m, n, p, et que ces ordres satisfassent à la condition $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1$, *alors on peut exprimer α et ζ en fonction uniforme d'une même variable u pour toutes les valeurs de u* (l'infini non compris, sans quoi les fonctions seraient rationnelles).

Soit aussi

$$u=\int\frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)(\alpha-e)}};$$

alors α, $\sqrt{\alpha-a}$, $\sqrt{\alpha-b}$, $\sqrt{\alpha-c}$, $\sqrt{\alpha-e}$ sont des fonctions uniformes de u. Donc :

Proposition XI. — *Soit ζ une fonction de la variable α : si elle n'a que quatre points critiques* (l'infini compris), *que ces points soient algébriques et du second ordre, alors α et ζ se peuvent exprimer en fonction uniforme d'une même variable.*

2. Reprenons l'intégrale (1). Désignons par X, Y, Z les trois fonctions de la variable u,

$$(\alpha-a)^{\frac{1}{m}},\quad(\alpha-b)^{\frac{1}{n}},\quad(\alpha-c)^{\frac{1}{p}}.$$

Elles fournissent une solution de l'équation indéterminée

$$(b-c)X^m+(c-a)Y^n+(a-b)Z^p=0 \tag{2}$$

par des fonctions uniformes et doublement périodiques d'une même variable u. Ainsi *l'équation* $X^m+Y^n+Z^p=0$ *peut être satisfaite par des fonctions uniformes et doublement périodiques d'une même variable* (aux mêmes périodes), *toutes les fois que*

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1.$$

Remarquons qu'elle peut l'être aussi quand $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}>1$, puisqu'on peut y satisfaire alors par des polynomes entiers d'une variable η, et qu'on peut alors faire η fonction doublement périodique et uniforme de u. Ce qui distingue essentiellement ces cas, c'est que, dans ce dernier, on peut prendre des fonctions elliptiques

de module absolument arbitraire. Dans le premier cas, au contraire, le module est particularisé, comme on le verra tout à l'heure.

La dernière proposition a une réciproque :

Soit M un multiple commun des entiers m, n, p. Pour que l'équation $X^m + Y^n + Z^p = 0$ puisse être satisfaite par des fonctions uniformes et doublement périodiques d'une même variable u, aux mêmes périodes, ayant chacune un seul infini $u = u_0$ dans le parallélogramme des périodes, et que cet infini soit multiple d'ordre $\frac{M}{m}$, $\frac{M}{n}$, $\frac{M}{p}$ pour X, Y, Z respectivement, il est nécessaire que l'on ait

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \geqq 1.$$

La démonstration est très simple et analogue à celle qui concerne la résolution en polynomes entiers (p. 16). En différentiant l'équation supposée résolue, on obtient successivement

$$mX^{m-1}X' + nY^{n-1}Y' + pZ^{p-1}Z' = 0;$$

$$(3) \qquad \frac{mX'Y - nY'X}{Z^{p-1}} = \frac{nY'Z - pZ'X}{X^{m-1}} = \frac{pZ'X - mX'Y}{Y^{n-1}}.$$

D'après les hypothèses, on voit aisément que la fonction doublement périodique $(mXY' - nY'X)$ n'a que les infinis $u \equiv u_0$, avec un ordre de multiplicité au plus égal à $\left(\frac{M}{m} + \frac{M}{n}\right)$. Tel est donc, au plus, le nombre de ses zéros. Comme on peut supposer que X, Y, Z n'ont aucun zéro commun, il faut que chaque numérateur de (3) ait les zéros du dénominateur correspondant. On doit donc avoir, en comptant ces zéros, pour la première des fractions (3),

$$\frac{M}{m} + \frac{M}{n} \geqq (p-1)\frac{M}{p};$$

d'où je conclus

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \geqq 1;$$

ce qu'il fallait prouver.

Déjà nous avons dit (p. 17) que l'*inégalité* n'est satisfaite que pour un des cas suivants relativement aux nombres qu'on peut prendre pour m, n, p, savoir $(m, 2, 2)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$. A son tour, l'*égalité* n'a lieu que dans les nouveaux cas : $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 3)$.

Remarquons que, dans le dernier énoncé, l'infini u_0 des trois fonctions X, Y, Z n'est là que pour préciser ces fonctions mêmes, au lieu de leurs rapports. On pourrait faire disparaître cet infini en parlant de *trois fonctions uniformes* X, Y, Z, *telles que les rapports* $X^m : Z^p$, $Y^n : Z^p$ *soient doublement périodiques et aux mêmes périodes.*

3. Revenons sur la résolution de l'équation indéterminée

$$X^m + Y^n + Z^p = 0$$

dans le cas où $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$. D'une solution on peut en déduire de nouvelles, au moyen de la *transformation* des fonctions elliptiques. A cet effet, u étant la variable qui figure dans la solution choisie, on prendra une des transformations qui, remplaçant l'une par l'autre les variables u et v liées ainsi

$$v = \lambda u + \mu,$$

où λ, μ sont des constantes, permettent en même temps d'exprimer les fonctions elliptiques $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ aux périodes de X, Y, Z, sous forme de fractions rationnelles de $\operatorname{sn}_1 v$, $\operatorname{cn}_1 v$, $\operatorname{dn}_1 v$. Les indices rappellent ici que les périodes sont différentes.

Je dis maintenant que la réciproque a lieu, en cette sorte :

Proposition XII. — *Soit* $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$, *et envisageons deux solutions* (X, Y, Z), $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ *de l'équation* $X^m + Y^n + Z^p = 0$ *par des fonctions uniformes d'une variable, dont les rapports* $X^m : Z^p$, $Y^n : Z^p$ *soient doublement périodiques. Soient* u, v *les variables qui figurent respectivement dans* (X, Y, Z) *et dans* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$, *solutions dont les périodes peuvent être différentes.*

Si l'on pose $\frac{X^m}{Z^p} = \frac{\mathfrak{X}^m}{\mathfrak{Z}^p}$, *il en résulte* $v = \lambda u + \mu$, *où* λ, μ *sont des constantes.*

Des relations (3) et de l'*égalité* $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$ il résulte que $(pZ'X - mX'Z)$ et Y^{n-1} ne diffèrent que d'un facteur constant. Si l'on pose donc

$$\alpha = -\frac{X^m}{Z^p},$$

il en résultera

$$\frac{d\alpha}{du} = A\frac{X^{m-1}Y^{n-1}}{Z^{p+1}}.$$

D'ailleurs, $\alpha - 1 = \frac{Y^n}{Z^p}$. Si l'on substitue dans l'expression de $\frac{d\alpha}{du}$ à X, Y leurs expressions en α, Z, alors Z disparaît; car il est affecté de l'exposant

$$-p-1+\frac{m-1}{m}p+\frac{n-1}{n}p = p\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right) = 0.$$

Il vient ainsi

$$\frac{d\alpha}{du} = (-1)^{\frac{1}{m}} A\alpha^{1-\frac{1}{m}}(\alpha-1)^{1-\frac{1}{n}},$$

ce qui concorde avec l'équation (1), moyennant un changement de variable évident. Il n'y a donc, à proprement parler, pas d'autre solution de l'équation indéterminée que la solution trouvée tout d'abord et celles qui en résultent par *transformations*. Pour achever notre démonstration, disons qu'en prenant une autre solution $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ à variable v, et posant encore

$$\alpha = -\frac{\mathfrak{X}^m}{\mathfrak{Z}^p} = -\frac{X^m}{Z^p},$$

le facteur A pourra être changé, et l'on aura

$$\frac{d\alpha}{dv} = (-1)^{\frac{1}{m}} B\alpha^{1-\frac{1}{m}}(\alpha-1)^{1-\frac{1}{n}}.$$

Donc $dv = \frac{A}{B}du$, ce qui démontre entièrement la proposition annoncée.

4. Dans le cas $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p} > 1$, la solution trouvée tout d'abord est aussi la seule. Je dis, en effet, que :

Proposition XIII. — *Si* $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p} > 1$, *soient* X, Y, Z *trois fonctions uniformes de la variable u telles que* $X^m : Z^p$ *et* $Y^n : Z^p$ *soient doublement périodiques et qui satisfassent à l'équation* $X^m + Y^n + Z^p = 0$;

Soient, d'autre part, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ *les trois polynomes entiers d'une*

variable η qui composent la solution primitive de la même équation en polynomes entiers;

Si l'on pose $\frac{X^m}{Z^p} = \frac{\mathfrak{X}^m}{\mathfrak{Z}^p}$, *il en résulte que η est une fonction uniforme et doublement périodique de u.*

Effectivement, la solution $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ étant *primitive*, il en résulte (p. 19) que, si l'on fait $\alpha = -\frac{\mathfrak{X}^m}{\mathfrak{Z}^p}$, η envisagée comme fonction de α n'a que les trois points critiques 0, 1, ∞, dont les ordres sont m, n, p. Si l'on pose donc en même temps

$$\alpha = -\frac{\mathfrak{X}^m}{\mathfrak{Z}^p} = -\frac{X^m}{Z^p},$$

il est manifeste que η est une fonction uniforme de u, d'ailleurs doublement périodique comme α. Ce qui démontre la proposition.

5. Voici maintenant la réciproque des propositions X et XI.

Proposition XIV. — *Soit ζ une fonction d'une variable α pouvant, pour chaque valeur de α, avoir une infinité de valeurs différentes, mais jouissant de cette propriété que, pour chaque point critique, toutes les valeurs de ζ se répartissent en cycles dont chacun en contient un même nombre. Soit m ce nombre pour un des points critiques, soient n, p, ... les nombres analogues pour les autres points critiques, que l'on suppose tous algébriques :*

D'après ces hypothèses, si α et ζ se peuvent exprimer en fonction uniforme d'une variable u, dont, en outre, α soit fonction doublement périodique, et que d'ailleurs α et ζ ne puissent être exprimés en fonction rationnelle d'une même variable;

Alors, ou bien les points critiques sont au nombre de trois seulement et leurs ordres satisfont à la condition $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$;

Ou bien ils sont au nombre de quatre, et sont tous quatre du second ordre.

Supposons que $\alpha = 0$, 1, ∞ soient trois des points critiques, d'ordre m, n, p. Il résulte des hypothèses que α s'exprime en fonc-

tion de u sous les deux formes

$$\alpha = -\frac{X^m}{Z^p}, \qquad \alpha = 1 - \frac{Y^n}{Z^p},$$

X, Y, Z étant uniformes, et les quotients doublement périodiques. Donc on a

$$X^m + Y^n + Z^p = 0,$$

et par suite (p. 50)

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \geqq 1.$$

S'il n'y a que ces trois points critiques, la démonstration se trouvera ainsi faite. L'inégalité doit, en effet, être repoussée suivant l'hypothèse que α, ζ ne sont pas exprimables rationnellement en fonction d'une variable. Il reste donc l'égalité.

S'il y a d'autres points critiques a, b, ..., on aura aussi

$$\alpha - a = \frac{A^q}{Z^p}, \qquad \alpha - b = \frac{B^r}{Z^p}, \qquad \ldots;$$

d'où les égalités

$$(a-1)X^m - aY^n + A^q = 0,$$
$$(b-1)X^m - bY^n + B^r = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

A, B sont encore des fonctions uniformes et, de même qu'à la page 50, on peut supposer toutes ces fonctions doublement périodiques et appliquer l'analyse déjà employée.

On peut admettre, sans troubler la généralité, qu'aucune de ces fonctions n'a de zéro commun avec une autre; car alors ce zéro appartiendrait à toutes les fonctions. Il en résulte que l'un des déterminants (3), par exemple $(mX'Y - nY'X)$, a les zéros de Z, A, B, ...; on a donc l'inégalité

$$\frac{M}{m} + \frac{M}{n} \geqq (p-1)\frac{M}{p} + (q-1)\frac{M}{q} + (r-1)\frac{M}{r} + \ldots$$

ou

$$\sum\left(1 - \frac{1}{m}\right) \geqq 2.$$

Si les nombres m, n, p, q, ... sont plus de trois, l'inégalité ne saurait être satisfaite que s'ils sont quatre et, en outre, égaux au nombre 2. Ce qui achève la démonstration.

6. J'applique maintenant les propositions X et XI aux équations différentielles linéaires, pour conclure ainsi :

Proposition XV. — *Soit une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels. Si les rapports des intégrales n'ont que des points critiques algébriques, que ces points soient au nombre de quatre et tous du second ordre, ou au nombre de trois, et que leurs ordres m, n, p satisfassent à la condition* $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1$;

On peut alors changer de variable indépendante de telle manière que l'équation transformée soit à coefficients doublement périodiques et uniformes par rapport à la nouvelle variable u, et que les rapports des intégrales soient des fonctions uniformes de u.

Cette proposition est une conséquence évidente de X et de XI, et de ce fait qu'à la fois x et $\frac{dx}{du}$ sont des fonctions uniformes et doublement périodiques de u. Mais voici maintenant la proposition vraiment nouvelle :

Proposition XVI. — *Soit une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des fonctions uniformes de la variable et doublement périodiques. Si les rapports des intégrales n'ont aucun point critique (l'infini exclu), on pourra changer de fonction, de telle sorte que la transformée ait encore ses coefficients uniformes et doublement périodiques, et que les intégrales soient elles-mêmes uniformes. Dans cette transformation, les périodes des coefficients seront généralement changées.*

Soit u la variable indépendante. Je désignerai par ϖ et ϖ' les périodes. D'après les hypothèses, l'équation se reproduit elle-même quand on augmente u de multiples de ϖ ou ϖ'. Toutes les circonstances relatives aux points singuliers, et qui ne dépendent que de l'équation même, se reproduisent donc identiquement pareilles, aux points homologues de deux parallélogrammes construits sur les périodes. On n'a donc à considérer, notamment en ce qui concerne les exposants auxquels appartiennent les intégrales, que les points situés dans un seul parallélogramme.

Soit $u=u_1$ un point singulier. Suivant l'hypothèse, les expo-

sants auxquels les intégrales appartiennent relativement à $(u - u_1)$ sont ν, $\nu_1 + e_1$, $\nu_1 + e'_1$, ..., où par e_1, e'_1, ... je désigne des nombres entiers. C'est là ce qui caractérise un point singulier qui n'est pas critique pour les rapports des intégrales ([1]). Il peut être critique pour les intégrales mêmes; car ν_1 peut être quelconque. Soit q l'ordre de l'équation. La somme N_1, savoir

$$N_1 = \nu_1 q + e_1 + e'_1 + \ldots - \frac{q(q-1)}{2},$$

est égale au résidu du premier coefficient a_1 de l'équation donnée, si on l'écrit

$$y^{(q)} - a_1 y^{(q-1)} + \ldots + a_q y = 0.$$

Considérons successivement les divers points singuliers u_2, u_3, ...; soient ν_2, ν_3, ... les exposants analogues à ν_1 et relatifs à ces points. On a de pareilles sommes N_2, N_3, ... qui sont les divers résidus de la fonction doublement périodique a_1. La somme de tous ces résidus est égale à zéro. On a donc entre les nombres ν_1, ν_2, ν_3, ..., qui, individuellement, peuvent être quelconques, cette relation

$$q(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots) = \text{un nombre entier.}$$

Ceci reconnu, cherchons d'abord s'il est possible de trouver une fonction $f(u)$ telle que le produit de $f(u)$ par l'intégrale générale de l'équation proposée soit uniforme, et que la transformée avec l'inconnue z,

$$z = y\,f(u),$$

ait encore ses coefficients uniformes, doublement périodiques, et aux mêmes périodes ϖ, ϖ', que l'équation proposée.

Pour que cette dernière condition soit remplie, il faut et il suffit que $\dfrac{f'(u)}{f(u)}$ soit uniforme et aux périodes ϖ, ϖ', comme le font voir immédiatement les formules pour le changement de fonction dans une équation linéaire. Prenons une fonction *intermédiaire* impaire $\eta(u)$, à un seul zéro, et évanouissante avec u, comme par exemple la fonction H de Jacobi, et aux périodes ϖ, ϖ'. Soit $\zeta(u)$ la dérivée logarithmique de $\eta(u)$. Suivant le théorème de la *décompo-*

([1]) Voir chapitre I, n° 16, p. 34.

sition en éléments simples, dû à M. Hermite, nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{f'(u)}{f(u)} = \mathrm{A} &+ c_1 \zeta(u-u_1) + c_2 \zeta(u-u_2) + \ldots \\ &+ \lambda_1 \zeta'(u-u_1) + \lambda_2 \zeta'(u-u_2) + \ldots \\ &+ \mu_1 \zeta''(u-u_1) + \mu_2 \zeta''(u-u_2) + \ldots,\end{aligned}$$

où les infinis u_1, u_2, ... peuvent être non seulement les points singuliers précédents, mais d'autres encore. Je tire de là

$$f(u) = e^{\mathrm{A}u}\eta(u-u_1)^{c_1}\eta(u-u_2)^{c_2}\ldots e^{\varphi(u)},$$

où $\varphi(u)$ est uniforme et fractionnaire. Ayant maintenant égard à la condition que $yf(u)$ doit être uniforme ([1]), je reconnais que $\varphi(u)$ doit être nul, et, en ce qui concerne les exposants, qu'on doit avoir

$$f(u) = e^{\mathrm{A}u}\eta(u-u_1)^{-\nu_1}\eta(u-u_2)^{-\nu_2}\ldots\mathrm{F}(u),$$

$\mathrm{F}(u)$ étant un produit tel que celui-ci

$$\mathrm{F}(u) = \eta(u-\alpha)^m\eta(u-\beta)^n\eta(u-\gamma)^p\ldots,$$

où tous les exposants sont entiers. Mais les exposants $-\nu_1$, $-\nu_2$, ..., m, n, p, ... ne sont autre chose que les résidus c_1, c_2, ... de $\frac{f'(u)}{f(u)}$. Leur somme est donc nulle. Donc on doit avoir

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots = \text{un nombre entier.}$$

Le problème n'est donc susceptible de solution que si cette dernière condition a lieu. Dans ce cas, il est effectivement possible. On n'aura qu'à prendre pour $f(u)$ cette forme qu'on vient de reconnaître nécessaire, et qu'on pourra alors construire.

Le problème est impossible si $\sum \nu$ n'est pas un nombre entier. Mais j'ai démontré tout à l'heure qu'en tout cas, ce nombre est commensurable, son produit par l'ordre q de l'équation étant entier. Prenons alors pour périodes des multiples des précédentes, par exemple $q\varpi$ et $q\varpi'$. Il faudra alors, au lieu du point singulier u_1, considérer q^2 points singuliers $u_1 + m\varpi + m'\varpi'$, où m, m' sont des

---

([1]) C'est-à-dire *avoir l'aspect d'une fonction rationnelle*, je crois devoir le répéter expressément.

entiers variant de o à $(q-1)$. Le nombre ν_1 sera répété q^2 fois; de même $\nu_2, \nu_3, \ldots$. Alors la somme $\sum\nu$ est remplacée par $q^2\sum\nu$, qui est, cette fois, un nombre entier; et le facteur $f(u)$ pourra être trouvé. L'équation transformée aura alors les périodes $q\varpi$, $q\varpi'$. La proposition est ainsi prouvée.

7. A ce sujet, je ferai deux remarques : 1° Il n'est pas toujours nécessaire d'employer le multiplicateur q. Il suffira d'employer le plus petit nombre r tel que $r^2\sum\nu$ devienne un nombre entier. Pour une équation du quatrième ordre, on n'aura qu'à doubler les périodes. 2° On peut aussi ne multiplier qu'une des périodes, ou multiplier les deux périodes par des facteurs inégaux.

J'emploierai de préférence la multiplication des deux périodes par un même nombre. On peut remplacer cette multiplication par une division de l'argument. Il est aisé d'apercevoir la forme du facteur $f(u)$, et je peux énoncer ainsi la conclusion :

Proposition XVII. — *Soient u_1, u_2, ... les divers points singuliers de l'équation, en tenant compte seulement de ceux où, les rapports des intégrales étant uniformes, les intégrales mêmes cessent de l'être. Soient ν_1 l'exposant auquel appartient une intégrale relativement à $(u-u_1)$; ν_2 l'exposant auquel appartient une intégrale relativement à $(u-u_2)$, ...*

1° *Le produit de $\nu_1+\nu_2+\ldots$ par l'ordre de l'équation est un nombre entier ;*

2° *Soit n le plus petit entier tel que $n^2(\nu_1+\nu_2+\ldots)$ soit un nombre entier λ; si l'on fait*

$$y = z\frac{\eta(u-u_1)^{\nu_1}\eta(u-u_2)^{\nu_2}+\ldots}{\eta\left(\frac{u-a}{n}\right)^\lambda}, \tag{4}$$

où a est arbitraire, la fonction z est uniforme, et l'équation transformée, où z est l'inconnue, a ses coefficients uniformes et aux périodes ϖ, ϖ', relativement à la variable $\frac{u}{n}$.

ϖ, ϖ' sont les périodes de l'équation primitive relativement à la variable u.

8. Dans le cas particulier où il y a un seul point u_1 à considérer, le facteur (4) peut prendre une forme très utile à connaître. Envisageons, avec M. Kiepert [1], la fonction

$$\psi_n(u) = \frac{\eta(nu)}{\eta(u)^{n^2}}.$$

Quand on remplace $\eta(u)$ par une autre des fonctions de même définition, $\psi_n(u)$ ne change pas. Car ces diverses fonctions $\eta(u)$ ne diffèrent entre elles que d'un facteur $e^{\alpha u^2}$, si toutefois on fixe encore la limite de $\frac{\eta(u)}{u}$ pour $u = 0$. Cette limite sera supposée être l'unité. On a notamment

$$\psi_n(u) = \frac{\mathrm{Al}_1(nu)}{\mathrm{Al}_1(u)^{n^2}} = \frac{\mathrm{Al}_1(nu)}{\mathrm{Al}(u)^{n^2}}\left[\frac{\mathrm{Al}(u)}{\mathrm{Al}_1(u)}\right]^{n^2} = \mathrm{F}(u)\frac{1}{(\mathrm{sn}\, u)^{n^2}},$$

où $\mathrm{F}(u)$ est le numérateur de $\mathrm{sn}(nu)$ exprimé en fonction rationnelle de $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$.

La fonction $\psi_n(u)$ est uniforme et aux périodes ϖ, ϖ'. Elle n'a qu'un infini $u \equiv 0$, multiple d'ordre $(n^2 - 1)$, et $(n^2 - 1)$ zéros distincts, $u \equiv \frac{m\varpi}{n} + \frac{m'\varpi}{u}$, m et m' étant des entiers qui ne sont pas nuls à la fois.

Quand il n'y a qu'un seul point singulier u_1, on rend z uniforme en prenant

$$y = z\,\psi_n\left(\frac{u - u_1}{n}\right)^{\nu_1},$$

n étant toujours choisi de telle sorte que $n^2\nu_1$ soit entier.

Relativement à $\left(\frac{u - u_1}{n}\right)$, z appartient à l'un des exposants $n^2\nu_1$, $n^2\nu_1 + e_1$, $n^2\nu_1 + e'_1$, ... et relativement à $\frac{u - u_1 - m\varpi - m'\varpi}{n}$, aux exposants 0, e_1, e'_1, ...

9. Je vais maintenant rappeler les quelques principes dont s'est

---

[1] *Ganzzahlige Multiplication der elliptischen Functionen* (*Journal für die reine und angewandte Math.*, t. LXXVI, p. 26). — Pour le calcul de la fonction $\psi_n(u)$, on peut consulter le mémoire de M. Max Simon : *Multiplication der ellipt. Funct. und Schliessungsproblem* (*Ibid.*, t. LXXXI, p. 310).

enrichie l'analyse des équations linéaires, cette année même, grâce aux travaux de M. Hermite et des géomètres qui l'ont suivi ([1]).

M. Hermite définit *fonction doublement périodique de deuxième espèce* une fonction uniforme dont la dérivée logarithmique est doublement périodique. Par le raisonnement employé plus haut (p. 57), on reconnaît qu'une telle fonction a la forme suivante :

$$\varphi(u) = e^{\mathrm{A}u}\frac{\eta(u-v_1)\,\eta(u-v_2)\ldots}{\eta(u-w_1)\,\eta(u-w_2)\ldots}, \tag{5}$$

le nombre des facteurs étant le même en numérateur et en dénominateur. Par sa définition, il est visible qu'elle jouit de la propriété exprimée par les égalités

$$\varphi(u+\varpi) = \mu\,\varphi(u), \qquad \varphi(u+\varpi') = \mu'\,\varphi(u),$$

où μ, μ' sont deux constantes que l'on peut calculer aisément sur l'expression (5).

Mais ce n'est pas sous la forme (5) que ces fonctions sont utiles à envisager pour les applications. Il convient de les décomposer en *éléments simples*. A ce point de vue, deux cas sont à distinguer :

Premier cas : Les logarithmes des multiplicateurs μ, μ' *sont proportionnels aux périodes correspondantes* ϖ, ϖ'. — Dans ce cas, la fonction $\varphi(u)$ est le produit d'une fonction doublement périodique par une exponentielle. Effectivement, si l'on a

$$\log\mu = \alpha\varpi, \qquad \log\mu' = \alpha\varpi',$$

on posera

$$\mathrm{F}(u) = e^{-\alpha u}\,\varphi(u),$$

et il en résultera

$$\mathrm{F}(u+\varpi) = \mathrm{F}(u), \qquad \mathrm{F}(u+\varpi') = \mathrm{F}(u).$$

De même que les fonctions doublement périodiques, les fonctions de deuxième espèce, pour ce cas particulier, ont au moins deux infinis (ou un infini multiple) *dans le parallélogramme des périodes.*

De la décomposition de $\mathrm{F}(u)$ en éléments simples, on déduit

$$\varphi(u) = e^{\alpha u}\left[\mathrm{A} + \sum_{n,\nu} \mathrm{B}_{n,\nu}\,\zeta^{(n)}(u-u_\nu)\right],$$

([1]) Consultez notamment les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1879 et 1880. [*Œuvres d'Hermite*, t. III, p. 266.]

où la somme des coefficients $B_{1,\nu}$ doit être nulle. Puis en posant

$$e^{\alpha u}\zeta(u) = f(u),$$

on change cette formule en cette autre :

$$\varphi(u) = A\, e^{\alpha u} + \sum_{n,\nu} C_{n,\nu} f^{(n)}(u - u_\nu), \tag{6}$$

où les coefficients $C_{n,\nu}$ sont assujettis à la condition

$$\sum_{n,\nu} C_{n,\nu} a^n e^{-\alpha u_\nu} = 0. \tag{7}$$

Cette décomposition en éléments simples a été donnée par M. Mittag-Leffler, qui, le premier, a signalé ce cas particulier et exceptionnel des fonctions de deuxième espèce ([1]).

Second cas : Les logarithmes des multiplicateurs μ, μ' *ne sont pas dans le rapport des périodes correspondantes* ϖ, ϖ'. — Ce cas général est bien plus remarquable, surtout en ce sens qu'il existe une fonction ayant les multiplicateurs μ, μ' et ne possédant qu'un seul pôle. Suivant la formule (5), une telle fonction aura la forme

$$\psi(u) = e^{au}\frac{\eta(u+v)}{\eta(u)}. \tag{8}$$

On la prendra pour élément simple. Il faut d'abord faire voir qu'on peut déterminer les deux constantes a, v de telle sorte que $\psi(u)$ ait deux multiplicateurs donnés arbitrairement.

A cet effet, rappelons que la fonction $\eta(u)$ jouit de la propriété qu'expriment les égalités

$$\eta(u+\varpi) = -e^{\varepsilon(2u+\varpi)}\eta(u), \qquad \eta(u+\varpi') = -e^{\varepsilon'(2u+\varpi')}\eta(u), \tag{9}$$

les deux constantes ε, ε' satisfaisant d'ailleurs à l'égalité

$$\varepsilon\varpi' - \varepsilon'\varpi = \pm\pi i, \tag{10}$$

où π désigne le rapport de la circonférence au diamètre.

([1]) *Comptes rendus*, tome XC, 1880, page 178.

De là résulte que les multiplicateurs de $\psi(u)$, définie par (8), sont

$$\mu = e^{a\varpi+2\varepsilon\nu}, \qquad \mu' = e^{a\varpi'+2\varepsilon'\nu}.$$

Si ces multiplicateurs sont donnés, on détermine a, ν par les formules résultant de ces dernières, savoir :

$$a = \pm \frac{1}{\pi}(\varepsilon' \log\mu - \varepsilon \log\mu'), \qquad \nu = \pm \frac{1}{\pi}(\varpi \log\mu' - \varpi' \log\mu).$$

Dans le cas exceptionnel précédemment envisagé, la dernière équation donne $\nu = 0$, et la fonction ψ, réduite à une exponentielle, ne serait pas propre à servir d'élément simple. En dehors de ce cas, la fonction ψ, déterminée sans ambiguïté, a le seul pôle $u = 0$.

Toute fonction $\varphi(u)$, *qui a les multiplicateurs* μ, μ', *les mêmes que ceux de* $\psi(u)$, *se décompose en éléments simples sous la forme*

$$\varphi(u) = \sum_{n,\nu} C_{n,\nu}\,\psi^{(n)}(u - u_\nu), \tag{11}$$

et les coefficients ne sont astreints à aucune équation de condition.

Ce résultat est dû à M. Hermite.

10. Voici maintenant comment ces fonctions interviennent dans l'intégration des équations linéaires. M. Picard a démontré [1] que :

Proposition XVIII. — *Si une équation linéaire, à coefficients uniformes et doublement périodiques, a son intégrale générale uniforme, elle possède au moins une intégrale particulière doublement périodique, soit ordinaire, soit de deuxième espèce.*

Cette proposition peut être établie ainsi. Soient $y_1, y_2, y_3, \ldots$ diverses quantités sur lesquelles on effectue une substitution linéaire et homogène, en sorte que cette substitution remplace y_n par y'_n :

$$y'_n = a_{1,n}y_1 + a_{2,n}y_2 + a_{3,n}y_3 + \ldots.$$

On sait qu'il existe toujours *au moins une* combinaison linéaire et homogène Y des quantités $y_1, y_2, y_3, \ldots$ telle que, Y' désignant la même combinaison faite avec les quantités $y'_1, y'_2, y'_3, \ldots$, on ait $Y' = AY$, A étant une fonction des quantités a_{ij} seules.

---

[1] *Comptes rendus*, t. XC, 1880, p. 128 et 293.

Prenons une équation linéaire à coefficients uniformes et doublement périodiques, et choisissons arbitrairement un système d'intégrales distinctes $f_1(u), f_2(u), f_3(u), \ldots$. Augmentons maintenant u de la période ϖ. Ce changement n'altère pas l'équation. Donc

$$f_1(u+\varpi),\quad f_2(u+\varpi),\quad f_3(u+\varpi),\quad \ldots$$

constituent un système d'intégrales, au même titre que les précédentes. Le changement de u en $u+\varpi$ transforme donc $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$, ... par une substitution linéaire, comme les quantités $y_1, y_2, y_3, \ldots$. Les nouvelles quantités $y'_1, y'_2, y'_3, \ldots$ sont

$$f_1(u+\varpi),\quad f_2(u+\varpi),\quad f_3(u+\varpi),\quad \ldots.$$

Prenant la combinaison Y, je conclus qu'une intégrale jouit de la propriété $F(u+\varpi) = AF(u)$. Changeons maintenant u en $u+\varpi'$, et envisageons $F(u)$, $F(u+\varpi')$, $F(u+2\varpi')$, ..., de manière à en prendre une de plus qu'il n'y a d'unités dans l'ordre de l'équation. Ce sont encore des intégrales. Ces quantités sont donc liées par *une* relation linéaire et homogène, *au moins*. Prenons la relation qui lie des fonctions consécutives $F(u)$, $F(u+\varpi')$, $F(u+2\varpi')$, $F(u+n\varpi')$. Le nombre n surpasse au plus d'une unité l'ordre de l'équation, mais il peut être moindre. Quoi qu'il en soit, nous avons une relation de la forme

$$\begin{aligned} F(u+n\varpi') = {} & a_1 F(u) + a_2 F(u+\varpi') \\ & + a_3 F(u+2\varpi') - \ldots + a_n F[u+(n-1)\varpi']. \end{aligned}$$

Considérons les quantités

$$F(u),\quad F(u+\varpi'),\quad \ldots,\quad F[u+(n-1)\varpi']$$

et, d'autre part, les quantités

$$F(u+\varpi'),\quad F(u+2\varpi'),\quad \ldots,\quad F(u+n\varpi'),$$

et appliquons encore la proposition générale ci-dessus. Il en résulte une combinaison linéaire jouissant de la propriété $\mathcal{F}(u+\varpi') = B\mathcal{F}(u)$, et qui est toujours une intégrale. A l'égard de la période ϖ, cette fonction $\mathcal{F}(u)$ a conservé la propriété dont jouissait $F(u)$. Donc $\mathcal{F}(u)$ est une intégrale, qui est fonction doublement périodique de seconde espèce; elle est de première espèce dans le cas particulier où A, B se réduisent à l'unité. La proposition est ainsi prouvée.

11. Poussons maintenant plus avant, et démontrons que :

Proposition XIX. — *Si une équation linéaire, à coefficients uniformes et doublement périodiques* (aux mêmes périodes), *a son intégrale générale uniforme, il existe un système complet d'intégrales distinctes se répartissant en divers groupes tels que les intégrales* $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$, ..., *composant un même groupe, jouissent de la propriété exprimée par les relations*

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} f_1(u+\varpi) &= \mu f_1(u),\\ f_2(u+\varpi) &= \mu f_2(u) + \nu f_1(u),\\ f_3(u+\varpi) &= \mu f_3(u) + \lambda f_2(u) + \rho f_1(u),\\ &\cdots\cdots\cdots;\\ f_1(u+\varpi') &= \mu' f_1(u),\\ f_2(u+\varpi') &= \mu' f_2(u) + \nu' f_1(u),\\ f_3(u+\varpi') &= \mu' f_3(u) + \lambda' f_2(u) + \rho' f_1(u),\\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

Les premiers multiplicateurs μ, μ', *qui sont les mêmes pour toutes les fonctions d'un même groupe, varieront d'un groupe à l'autre.*

J'admets l'exactitude de cette proposition pour une équation d'ordre $(q-1)$, et je la prouve alors pour une équation d'ordre q. Elle sera ainsi prouvée dans sa généralité, étant exacte pour le premier ordre.

Je prends donc une équation d'ordre q. D'après le théorème de M. Picard, elle possède une intégrale $F(u)$ de deuxième espèce, dont soient A, A' les multiplicateurs. Soit trouvée cette intégrale; posons

$$z = \frac{d}{du}\left[\frac{y}{F(u)}\right],$$

en désignant par y l'inconnue de l'équation proposée, par z une nouvelle inconnue. La transformée en z s'abaisse à l'ordre $(q-1)$. De plus, cette transformée est à coefficients uniformes et doublement périodiques, ainsi que le montrent immédiatement les formules de transformation, pourvu qu'on observe que la dérivée logarithmique de $F(u)$ est doublement périodique.

Je peux donc appliquer à z la proposition même admise pour les équations d'ordre $(q-1)$. Car y et $F(u)$ étant uniformes, z le sera

aussi. Il existe donc pour z un système de déterminations composé de groupes de fonctions $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$, ..., satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Intégrons les deux membres des relations (12), et multiplions ensuite membre à membre les équations des deux séries, respectivement avec celles-ci :

$$F(u+\varpi) = A\,F(u),$$
$$F(u+\varpi') = A'\,F(u).$$

Adoptons, en outre, cette notation

$$F(u)\int f_n(u)\,du = \varphi_n(u).$$

Nous aurons alors

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l}
F(u+\varpi) = A\,F(u),\\
\varphi_1(u+\varpi) = A\,\mu\,\varphi_1(u) + c_1\,F(u),\\
\varphi_2(u+\varpi) = A\,\mu\,\varphi_2(u) + A\,\nu\,\varphi_1(u) + c_2\,F(u),\\
\varphi_3(u+\varpi) = A\,\mu\,\varphi_3(u) + A\,\lambda\,\varphi_2(u) + A\,\rho\,\varphi_1(u) + c_3\,F(u),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\\
F(u+\varpi') = A'\,F(u),\\
\varphi_1(u+\varpi') = A'\mu'\,\varphi_1(u) + c'_1\,F(u),\\
\varphi_2(u+\varpi') = A'\mu'\,\varphi_2(u) + A'\nu'\,\varphi_1(u) + c'_2\,F(u),\\
\varphi_3(u+\varpi') = A'\mu'\,\varphi_3(u) + A'\lambda'\,\varphi_2(u) + A'\rho'\,\varphi_1(u) + c'_3\,F(u),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right.$$

Les fonctions φ sont des intégrales particulières de l'équation proposée. Si $\mu = \mu' = 1$, alors F, φ_1, φ_2, ... forment un groupe d'intégrales conforme à la proposition XIX. Si, en outre, les intégrales z de la seconde équation ne forment qu'un seul groupe, la proposition sera prouvée pour l'équation primitive. Pour le cas général, il faut prouver qu'on peut déduire des intégrales F, φ_1, φ_2, ... d'autres intégrales, dont une reste F, et les autres forment un groupe conforme à la définition.

A cet effet, j'observe que les coefficients ne sont pas absolument indépendants dans les deux groupes d'équations (13), non plus que dans (12). On le reconnaît en changeant u en $u+\varpi+\varpi'$, ce qui peut se faire de deux manières différentes par deux substitutions

successives. Voici les relations que l'on trouve ainsi :

$$(14)\quad\begin{cases}\dfrac{c_1}{A(\mu-1)}=\dfrac{c'_1}{A'(\mu'-1)},\\[2mm] \dfrac{1}{A(\mu-1)}\left(c_2-\dfrac{c_1\nu}{\mu-1}\right)=\dfrac{1}{A'(\mu'-1)}\left(c'_2-\dfrac{c'_1\nu'}{\mu'-1}\right), \qquad \nu\lambda'=\nu'\lambda;\\[2mm] \dfrac{c_3}{A(\mu-1)}-\dfrac{\lambda c_2}{A(\mu-1)^2}+\dfrac{\lambda\nu c_1}{A(\mu-1)^3}-\dfrac{\rho c_1}{A(\mu-1)^2}\\[2mm] \quad=\dfrac{c'_3}{A'(\mu'-1)}-\dfrac{\lambda' c'_2}{A'(\mu'-1)}+\dfrac{\lambda'\nu' c'_1}{A'(\mu'-1)^3}-\dfrac{\rho c'_1}{A'(\mu'-1)^2},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

et l'on en peut tirer cette conséquence qu'en posant

$$\Phi_1(u)=\varphi_1(u)+\frac{c_1}{A(\mu-1)}F(u),$$

$$\Phi_2(u)=\varphi_2(u)+\frac{1}{A(\mu-1)}\left(c_2-\frac{c_1\nu}{\mu-1}\right)F(u),$$

$$\Phi_3(u)=\varphi_3(u)+\left[\frac{c_3}{A(\mu-1)}-\frac{\lambda c_2}{A(\mu-1)^2}+\frac{\lambda\nu c_1}{A(\mu-1)^3}-\frac{\rho c_1}{A(\mu-1)^2}\right]F(u),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\Phi_1(u+\varpi)&=A\,\mu\,\Phi_1(u),\\ \Phi_2(u+\varpi)&=A\,\mu\,\Phi_2(u)+A\,\nu\,\Phi_1(u),\\ \Phi_3(u+\varpi)&=A\,\mu\,\Phi_3(u)+A\,\lambda\,\Phi_2(u)+A\,\rho\,\Phi_1(u),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\ \Phi_1(u+\varpi')&=A'\mu'\,\Phi_1(u),\\ \Phi_2(u+\varpi')&=A'\mu'\,\Phi_2(u)+A'\nu'\,\Phi_1(u),\\ \Phi_3(u+\varpi')&=A'\mu'\,\Phi_3(u)+A'\lambda'\,\Phi_3(u)+A'\rho'\,\Phi_1(u),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

En sorte que $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$, $\Phi_3(u)$ forment un groupe. Il n'y a d'obstacle à cette formation des fonctions Φ que si $\mu=1$ ou $\mu'=1$. Si à la fois $\mu=\mu'=1$, la formation n'est pas possible, en général, et comme on l'a déjà dit, $F(u)$, $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, ... font ensemble un groupe. Mais alors, si les intégrales z forment un second groupe, ce second groupe se distinguera du premier par les multiplicateurs μ et μ', ou par l'un au moins. Il reste donc à s'assurer que la formation des fonctions Φ est encore possible quand un seul des multiplicateurs μ, μ' est égal à 1.

Les équations (14) montrent que, si $\mu = 1$, $\mu' \gtrless 1$, on a dans ce cas

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = 0, \qquad c_3 = 0, \qquad \ldots,$$

et il est visible que les fonctions Φ pourront être formées. La proposition se trouve ainsi démontrée.

On voit par cette proposition que la forme analytique des intégrales dépend essentiellement du nombre des fonctions qui composent les groupes, bien plus que de l'ordre de l'équation. Il paraît difficile de discerner nettement et d'une manière générale la forme de ces intégrales. Mais je donnerai, par la suite, plusieurs exemples.

12. Quand on doit intégrer une équation linéaire à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme, on procède comme il suit. Ayant reconnu les pôles de l'intégrale et leurs ordres de multiplicité, on essaye de déterminer une intégrale sous la forme (11), en prenant pour inconnues les quantités a, v qui figurent dans l'élément simple $\psi(u)$, et les coefficients $G_{n,\nu}$ de (11). On détermine ces inconnues par l'identification de la fonction $\varphi(u)$ développée dans le domaine d'un ou de plusieurs points successivement avec l'intégrale générale, développée de la même manière. Si cette opération conduit à un ou plusieurs systèmes de valeurs pour les inconnues, il faudra encore vérifier que l'intégrale ou les intégrales correspondantes satisfont effectivement à l'équation différentielle. On n'en est pas assuré, puisqu'il peut se faire que l'intégrale ne soit pas susceptible de recevoir la forme dont il s'agit. Mais on peut observer qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer la vérification par voie de substitution. Elle est faite d'elle-même si les développements ont été poussés assez loin.

Supposons, en effet, que, $u = u_1$ étant un point singulier de l'équation, j'aie développé l'intégrale suivant les puissances croissantes de $(u - u_1)$, et que je me sois assuré que cette intégrale substituée dans le premier membre de l'équation donne un résultat non infini : c'est-à-dire supposons que le développement de ce premier membre ne contienne pas de termes à exposants négatifs. Soit $\mathcal{F}(u)$ le résultat de la substitution. $\mathcal{F}(u)$ est, comme l'intégrale que nous substituons, une fonction de deuxième espèce. Donc non seulement $u = u_1$, mais encore $u \equiv u_1$ n'est pas un pôle de $\mathcal{F}(u)$.

Faisons la même vérification pour tous les points singuliers, et

assurons-nous ainsi que $\mathcal{F}(u)$ n'a aucun infini. Dès lors, c'est simplement une exponentielle, et il suffira de s'assurer que $\mathcal{F}(u)$ est nulle pour une valeur particulière de u. Cela étant, on pourra conclure $\mathcal{F}(u) = 0$.

On pourra parfois abréger la vérification en observant certains zéros de $\mathcal{F}(u)$. Car, si l'on trouve à $\mathcal{F}(u)$ des zéros en nombre plus grand que le nombre maximum des infinis qu'elle peut avoir, on est encore assuré que $\mathcal{F}(u) = 0$.

Il y a des cas particuliers où la vérification est inutile. C'est ce qui a lieu, par exemple, si l'intégrale n'a qu'un infini, puisqu'alors la forme (11) est la seule possible. C'est ce qui a lieu aussi quand l'intégrale n'a qu'un pôle multiple d'ordre m, et qu'on sait qu'elle se développe en la forme

$$y = \frac{A}{(u - u_1)^m} + B + C(u - u_1) + \ldots.$$

Dans ce cas, en effet, la forme (6) est impossible, à cause de la condition (7) imposée à ses coefficients.

Si l'opération précédente n'a fourni aucune intégrale, alors on devra procéder de même au moyen de la forme (6). Cette fois, la vérification ne sera pas nécessaire si l'on trouve une seule intégrale.

Ces opérations paraissent fort pénibles; mais dans les applications, au moins dans celles qui se trouveront ici, on les mène à bien sans trop de difficulté.

13. C'est à dessein que je n'ai pas employé, dans ce qui précède, la fonction H de Jacobi, mais une fonction $\eta(u)$ qui en diffère par un facteur $Ae^{\alpha z^2}$, que j'ai d'ailleurs laissé indéterminé. Effectivement, dans presque toutes les applications que je ferai ici, il sera plus commode d'employer une *certaine* fonction $\eta(u)$. C'est celle dont le développement suivant les puissances croissantes de u présente une lacune au second terme. Cette lacune même, on le conçoit aisément, donne plus de facilité dans les calculs.

La fonction dont je parle est celle que, dans ses leçons, M. Weierstrass désigne par la notation $\sigma(u)$. Pour la commodité du lecteur, je vais très rapidement rappeler comment on introduit cette fonction, et quelles sont les fonctions elliptiques dont il convient de l'accompagner. On peut prendre pour point de départ l'intégrale

elliptique sous la forme (¹)

$$(15) \qquad u = \int_{\infty}^{p(u)} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}},$$

où g_2, g_3 sont des constantes, et définir ainsi la fonction elliptique $p(u)$, qui est paire et n'a qu'un seul pôle; ce pôle est double, c'est $u = 0$. Suivant les puissances croissantes de u, on a le développement suivant :

$$(16) \qquad p(u) = \frac{1}{u^2} + \star + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \ldots$$

qui se trouve aisément par la définition, et qui présente une *lacune* au second terme; cette lacune est marquée par le signe $\star$.

Il y a deux modules g_2, g_3; mais cette circonstance est utile dans bien des cas, car elle crée une homogénéité qui facilite parfois les calculs. Cette homogénéité est figurée par la relation

$$(17) \qquad p\left(\lambda^{-\frac{1}{2}} u,\ g_2\lambda^2,\ g_3\lambda^3\right) = \lambda\, p(u,\ g_2,\ g_3).$$

Cette relation se démontre immédiatement au moyen de la définition (15).

Le passage aux fonctions elliptiques usuelles est fort simple. Faisons l'opération inverse. Si dans l'intégrale

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

on pose

$$x^2 = \frac{1}{s + \dfrac{1 + k^2}{3}},$$

on obtient

$$u = \int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - \gamma_2 s - \gamma_3}}$$

(¹) On pourra trouver plus de détails sur ce sujet dans le mémoire de M. Kiepert cité plus haut (page 59). Il existe des tableaux de formules lithographiées qui ont été rédigées d'après les leçons de M. Weierstrass, et qui sont entre les mains de presque tous les géomètres allemands. — On peut consulter aussi l'excellent opuscule en langue suédoise de M. Mittag-Leffler : *En Metod att kommer i analytisk berittning af de Elliptiska functionerna* (Helsingfors, 1876).

avec

$$\gamma_2 = \frac{4}{3}(1 - k^2 + k^4), \qquad \gamma_3 = -\frac{4}{27}(1 + k^2)(2k^2 - 1)(k^2 - 2).$$

Ces deux constantes γ_2, γ_3 sont liées par la relation

$$27\gamma_3^2 - \gamma_2^3 + (3\gamma_2 - 4)^2 = 0.$$

Pour rendre les deux quantités g_2, g_3 indépendantes l'une de l'autre, il suffit de faire usage de la formule (17); et voici le résultat.

Pour transformer $\mathrm{p}(u)$ *et introduire les fonctions elliptiques ordinaires, on prend pour* λ *une des racines de l'équation*

$$(18) \qquad \lambda^6(27g_3^2 - g_2^3) + (3\lambda^2 g_2 - 4)^2 = 0,$$

et l'on détermine le module par les relations concordantes

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} 1 - k^2 + k^4 &= \frac{3}{4}\lambda^2 g_2, \\ (1 + k^2)(2k^2 - 1)(k^2 - 2) &= -\frac{27}{4}\lambda^3 g_3. \end{aligned} \right.$$

On a alors

$$\mathrm{p}(u, g_2, g_3) = -\frac{1 + k^2}{3\lambda} + \frac{1}{\lambda\,\mathrm{sn}^2\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}u\right)}.$$

En second lieu, on détermine la fonction $\sigma(u)$ par la relation

$$(20) \qquad \frac{d^2}{du^2}[\log\sigma(u)] = -\mathrm{p}(u),$$

en astreignant $\sigma(u)$ à être nulle ainsi que sa dérivée par $u = 0$. On a alors

$$(21) \qquad \sigma(u) = u + \star - \frac{1}{2}\frac{g_2}{5!}u^5 - \frac{6g_3}{7!}u^7 - \ldots$$

et l'homogénéité se traduit par la formule

$$\sigma\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}u,\ g_2\lambda^2,\ g_3\lambda^3\right) = \lambda^{-\frac{1}{2}}\sigma(u).$$

Dans le passage aux fonctions elliptiques usuelles, on a

$$(22) \qquad \sigma(u, g_2, g_3) = \lambda^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1+k^2}{6\lambda}u^2}\,\mathrm{Al}_1\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}u\right),$$

les constantes λ *et* k^2 *étant toujours déterminées par* (18) *et* (19).

On peut calculer très aisément les termes successifs du développe-

ment de $\sigma(u)$ au moyen de l'équation

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u} = 12 g_3 \frac{\partial \sigma}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \sigma}{\partial g_3} + \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma.$$

Il y a deux cas particuliers qui, pour les applications, sont très importants à noter; ce sont les suivants :

1° $g_2 = 0$, correspondant à $1 - k^2 + k^4 = 0$.

Dans ce cas, les développements de $u^2 \wp(u)$ et de $\frac{\sigma(u)}{u}$ procèdent suivant les puissances entières de u^6, comme le montre bien l'homogénéité. Quand ce cas se présentera, je ferai $g_3 = -1$.

2° $g_3 = 0$, ou $k^2 = -1, 2, \frac{1}{2}$.

Les développements de $u^2 \wp(u)$ et de $\frac{\sigma(u)}{u}$ procèdent suivant les puissances entières de u^4.

Ces deux cas particuliers s'offrent d'eux-mêmes dans nombre d'applications, et justifieraient à eux seuls l'emploi, dans ce mémoire, des fonctions particulières dont je rappelle en ce moment les propriétés.

Aux fonctions précédentes il faut joindre $\wp'(u)$, qui n'a qu'un pôle, $u = 0$: ce pôle est triple et l'on a

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + \star + \frac{g_2}{10} u + \frac{g_3}{7} u^3 + \ldots.$$

D'après la définition, et comme conséquence immédiate, on a

$$\begin{aligned}
\wp'^2(u) &= 4 \wp^3(u) - g_2 \wp(u) - g_3, \\
\wp''(u) &= 6 \wp^2(u) - \frac{1}{2} g_2, \\
\wp'''(u) &= 12 \wp(u) \wp'(u), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Quand on prend pour $\eta(u)$ la fonction $\sigma(u)$, et qu'on désigne, comme précédemment, par $\zeta(u)$ sa dérivée logarithmique, on a $\wp(u) = -\zeta'(u)$. Comme conséquence de la formule de décomposition en éléments simples, *on a donc, pour toute fonction* $f(u)$ *aux mêmes périodes que* $\wp(u)$ *et n'ayant que le pôle* $u = 0$, *les deux formes équivalentes :*

$$f(u) = A + B \wp(u) + C \wp'(u) + D \wp''(u) + \ldots,$$
$$f(u) = A + B \wp(u) + E \wp^2(u) + \ldots + \wp'(u) [F + G \wp(u) + H \wp^2(u) + \ldots]$$

et *toute fonction aux mêmes périodes que* $p(u)$ *est le quotient de deux fonctions telles que* $f(u)$.

Les périodes ϖ, ϖ' peuvent être définies ainsi :

$$p\left(\frac{\varpi}{2}\right),\quad p\left(\frac{\varpi'}{2}\right),\quad p\left(\frac{\varpi+\varpi'}{2}\right)$$

sont les racines de $4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3$; ou, en d'autres termes, $\frac{\varpi}{2}, \frac{\varpi'}{2}, \frac{\varpi+\varpi'}{2}$ sont les zéros de $p'(u)$.

Les formules d'addition se déduisent aisément de cette formule fondamentale :

$$(23)\qquad p(u) - p(v) = \frac{\sigma(v-u)\,\sigma(v+u)}{\sigma(v)^2\,\sigma(u)^2}.$$

Je rappellerai les formules qui me seront utiles, au fur et à mesure du besoin. Je ne veux plus citer que les suivantes sur lesquelles il est bon de s'arrêter un instant. Elles concernent la multiplication de l'argument. Envisageons de nouveau, comme au n° 8, la fonction

$$\psi_n(u) = \frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}},$$

où n est un nombre entier positif. De la formule (23), on déduit

$$(24)\qquad p(nu) = p(u) - \frac{\psi_{n-1}(u)\,\psi_{n+1}(u)}{\psi_n^2 u},$$

formule importante, qui ramène le calcul de $p(nu)$ à celui des fonctions successives $\psi_n(u)$. Ces dernières sont de parité opposée à n et n'ont que l'infini $u \equiv 0$. Ce sont donc des polynomes entiers en $p(u)$ ou le produit de tels polynomes par $p'(u)$, suivant que n est impair ou pair. On calcule les fonctions $\psi_n(u)$ par les relations récurrentes :

$$(25)\qquad \begin{cases} \psi_{2n+1} = \psi_n^3\,\psi_{n+2} - \psi_{n+1}^3\,\psi_{n-1}, \\ \psi_{2n} = \dfrac{\psi_n}{p'}(\psi_{n+1}^2\,\psi_{n-2} - \psi_{n-1}^2\,\psi_{n+2}), \end{cases}$$

qui se déduisent de *la relation à trois termes* de Jacobi. On a, pour les premières fonctions $\psi_n(u)$, les valeurs suivantes [1] :

$$\psi_1 = 1,\qquad \psi_2 = -p',\qquad \psi_3 = 3pp'^2 - \frac{1}{4}p''^2,\qquad \psi_4 = p'(p'^4 - \psi_3 p''),\qquad \ldots.$$

---

[1] Max Simon, *loc. cit.*, page 316.

14. Il me reste encore à faire quelques observations générales au sujet des équations qui, suivant la proposition XVII (p. 58), n'ont leur intégrale générale uniforme qu'après un changement de la fonction qui entraîne un changement des périodes.

Désignons par ν_1, ν_2, ... les mêmes quantités que dans l'énoncé de la proposition XVII. Considérons l'ancienne inconnue y et la nouvelle z, et mettons en évidence la variable, en écrivant $y(u)$, $z\left(\frac{u}{n}\right)$, au lieu de y, z. Désignons par $\varphi\left(\frac{u}{n}\right)$ le rapport de y à z. Ainsi

$$\varphi\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{\eta(u-u_1)^{\nu_1}\eta(u-u_2)^{\nu_2}\ldots}{\eta\left(\frac{u-a}{n}\right)^{\lambda}},$$

formule dans laquelle $\lambda = n^2(\nu_1+\nu_2+\ldots)$. A cause de cette valeur de λ, on démontre sans peine que la fonction

$$F_{m,m'} = \frac{\varphi\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{n}\right)}{\varphi\left(\frac{u}{n}\right)},$$

où m, m' sont entiers, est doublement périodique ordinaire. Du moins, il en est ainsi quand ν_1, ν_2, ... sont entiers. Quand ν_1, ν_2, ... sont, comme ici, des fractions ayant le dénominateur commun n, on peut seulement dire que $F_{m,m'}$ a les multiplicateurs ω, ω' racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Nous pouvons considérer simultanément diverses transformées, en z, de l'équation proposée, en employant les facteurs de la forme $\varphi\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{n}\right)$ au lieu de $\varphi\left(\frac{u}{n}\right)$. Si $z\left(\frac{u}{n}\right)$ est intégrale de l'une, alors $z\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{n}\right)$ est intégrale d'une autre transformée. Mais $y(u)$ et $y(u+m\varpi+m'\varpi')$ sont des intégrales de l'équation proposée. Donc une même transformée en z a pour intégrales $z\left(\frac{u}{n}\right)$ et $F_{m,m'}z\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{n}\right) = z_{m,m'}$.

D'après le théorème de M. Picard, il existe *au moins une* intégrale $z\left(\frac{u}{n}\right)$ doublement périodique, de première ou de deuxième espèce, aux périodes ϖ, ϖ', relativement à $\frac{u}{n}$. Soient μ, μ' ses multiplicateurs.

D'après ce qui vient d'être dit pour $F_{m,m'}$, on voit maintenant

que la même transformée en z aura aussi pour intégrale $z_{m,m'}$, qui est également de première ou de deuxième espèce, et dont les multiplicateurs sont $\omega\mu$, $\omega'\mu'$. Donc *une même transformée en z possède au moins n^2 intégrales de première ou de deuxième espèce dont les multiplicateurs correspondants ne diffèrent que par des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.*

Soit n_1 le nombre des intégrales $z_{m,m'}$ qui sont distinctes entre elles, c'est-à-dire en fonction linéaire et homogène desquelles on peut exprimer toutes les autres. Une certaine équation linéaire et d'ordre n_1 aura pour intégrales toutes les n^2 quantités $\varphi\left(\frac{u}{n}\right)z\left(\frac{u}{n}\right)$. Cette équation aura pour coefficients des fonctions uniformes et aux périodes ϖ, ϖ', relativement à u, non pas seulement relativement à $\frac{u}{n}$. Les nombres ν_1, ν_2, ... sont, pour cette équation, les mêmes que pour l'équation proposée. Donc le produit $n_1(\nu_1+\nu_2+\ldots)$ est un nombre entier (p. 56). Donc aussi $n_1^2(\nu_1+\nu_2+\ldots)$ est entier. Mais n est le plus petit entier rendant entier le produit $n^2(\nu_1+\nu_2+\ldots)$. Donc $n_1 \geqq n$. Donc :

Parmi les n^2 intégrales z, il y en a n au moins qui sont distinctes.

En général, si des fonctions de deuxième espèce donnent lieu à des combinaisons linéaires qui soient aussi de deuxième espèce, sans se confondre avec une des premières, on en peut conclure que ces fonctions ont toutes les mêmes multiplicateurs. Dans le cas actuel, si n^2 est supérieur à n_1, on en pourra conclure que les intégrales z ont toutes les mêmes multiplicateurs, ou qu'au moins elles forment des groupes dans chacun desquels toutes les fonctions ont les mêmes multiplicateurs. Mais la définition de ces fonctions z s'oppose à ce groupement, comme il est aisé de s'en convaincre. Donc :

Si l'ordre de l'équation est inférieur à n^2, les intégrales z ont les mêmes multiplicateurs, ou, en d'autres termes, le rapport de deux quelconques d'entre elles est une fonction doublement périodique ordinaire.

Si l'ordre q de l'équation est un nombre premier, on a à la fois $n = q < n^2$. Donc :

Proposition XX. — *Si l'ordre q de l'équation est un nombre premier et que la somme* $(\nu_1+\nu_2+\ldots)$ *ne soit pas entière, le rap-*

port de deux intégrales quelconques est une fonction doublement périodique ordinaire, aux périodes ϖ, ϖ', *relativement à* $\frac{u}{q}$.

Quand l'ordre n'est pas premier, il est malaisé d'avoir des propositions générales et aussi nettes. Prenons pour exemple le quatrième ordre. Le nombre n est alors égal à 2 dans tous les cas, la somme $(\nu_1+\nu_2+\ldots)$ étant la moitié ou le quart d'un entier. *Dans le cas où* $2(\nu_1+\nu_2+\ldots)$ *n'est pas entier*, on verra, comme ci-dessus, que n_1 ne peut être moindre que 4. *Il y a alors quatre intégrales distinctes dont les multiplicateurs ne diffèrent entre eux que par les signes.*

15. Je vais maintenant passer en revue quelques applications immédiates des propositions qui précèdent. J'envisagerai d'abord des équations à coefficients doublement périodiques, provenant d'équations à coefficients rationnels par un changement de la variable. Je reprends, à cet effet, l'équation de Gauss :

$$y''+\left(\frac{R_0}{x}+\frac{R_1}{x-1}\right)y'+\frac{C}{x(x-1)}=0.$$

Si l'on donne aux coefficients les valeurs suivantes :

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &R_0=1-\frac{a}{m},\qquad R_1=1-\frac{b}{n},\\ &C=\frac{1}{4}\left(1-\frac{a}{m}-\frac{b}{n}-\frac{c}{p}\right)\left(1-\frac{a}{m}-\frac{b}{n}+\frac{c}{p}\right),\end{aligned}\right.$$

m, n, p étant des nombres entiers positifs respectivement premiers avec a, b, c, qui sont aussi entiers et positifs, on a vu précédemment que les trois points singuliers 0, 1, ∞ sont critiques et des ordres m, n, p pour les rapports des intégrales. J'en ai conclu, dans le chapitre précédent, que, si $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}$ est supérieur à l'unité, l'équation s'intègre algébriquement, et j'ai donné le moyen de l'intégrer.

Actuellement, je conclus des propositions XV, XVI, XVII que *si* $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}$ *est égal à l'unité, l'équation pourra être intégrée par les fonctions elliptiques.* Je me propose maintenant de donner le moyen d'effectuer cette intégration.

L'égalité $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1$ présente trois cas distincts. Il y répond trois cas distincts pour l'intégration de l'équation.

Premier cas : $m=n=p=3$. — Je prends les fonctions elliptiques pour lesquelles $g_2=0$, et je fais $g_3=-1$. Je pose alors

$$2x-1=\wp'(u). \tag{27}$$

Je dis que u est la variable propre à la transformation. Effectivement, déjà pour $u=0$ on a $x=\infty$. Comme $\wp'(u)$ appartient à l'exposant -3 relativement à u, et que, par hypothèse, les rapports des intégrales appartiennent aux exposants $0, \frac{c}{3}$, relativement à $\frac{1}{x}$, il en résulte que ces rapports appartiennent aux exposants $0, c$ relativement à u.

De (27) je déduis

$$4\wp^3(u)=\wp'^3(u)-1=4x(x-1)$$

ou

$$x(x-1)=\wp^3(u).$$

Ainsi $x=0$, $x=1$ correspondent aux deux racines de $\wp(u)=0$. Soient α et $-\alpha$ ces deux racines. Les intégrales appartiennent aux exposants $0, a$ et $0, b$ relativement à $(u-\alpha)$ et $(u+\alpha)$. Ces deux racines sont ainsi distinguées :

Pour $u=\alpha$, on a

$$\wp'(u)=(2x-1)_0=-1;$$

Pour $u=-\alpha$, on a

$$\wp'(u)=(2x-1)_1=+1.$$

Ainsi l'équation transformée avec la variable u est telle que le rapport de deux intégrales est une fonction uniforme de u. Voyons maintenant ce que sont les intégrales elles-mêmes.

Pour $x=\infty$, les racines de l'équation déterminante sont $s, s+\frac{c}{3}$, avec cette valeur de s

$$s=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}\right).$$

Relativement à u, les intégrales appartiennent aux exposants $3s$,

$3s+c$; et j'ai

$$3s = \frac{1}{2}(3-a-b-c).$$

Cet exposant est entier ou moitié d'un entier, ce qui est conforme à la proposition XVII, $u=0$ étant le seul point où les exposants ne soient pas entiers.

Si $a+b+c$ est impair, l'exposant $3s$ est entier, et l'intégrale générale elle-même est une fonction uniforme de u.

Si $a+b+c$ est pair, l'intégrale est le produit d'une fonction uniforme de u par la fonction

$$\left[\psi_2\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad \left[p'\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Mais, dans ce cas, le rapport des intégrales est doublement périodique (proposition XX, p. 74); c'est donc une fonction algébrique de x.

Je reviendrai tout à l'heure sur l'intégration effective.

Deuxième cas : $m=2$, $n=3$, $p=6$. — Je prends encore les fonctions elliptiques pour lesquelles $g_2=0$, $g_3=-1$, et je pose

$$x = p'^2(u) = 4\,p^3(u)+1.$$

Pour $x=0$, on a

$$u = \frac{\varpi}{2},\ \frac{\varpi'}{2},\ \frac{\varpi+\varpi'}{2},$$

et x appartient à l'exposant 2 relativement à chacun des binomes

$$\left(u-\frac{\varpi}{2}\right),\quad \left(u-\frac{\varpi'}{2}\right),\quad \left(u-\frac{\varpi+\varpi'}{2}\right).$$

Les intégrales appartiennent donc aux exposants 0, a relativement à chacun de ces trois binomes. Pour $x=1$, on a $u=\pm\alpha$ [α étant, comme tout à l'heure, racine de $p(u)=0$], et $x-1$ appartient à l'exposant 3 relativement à $(u\pm\alpha)$. Les intégrales appartiennent aux exposants 0, b relativement à $(u\pm\alpha)$.

Enfin, pour $x=\infty$, $u=0$, x appartient à l'exposant -6 relativement à u, et les intégrales aux exposants $6s$, $6s+c$, en sorte que leur rapport est uniforme. Partout ailleurs, les intégrales appartiennent aux exposants 0, 1.

On a d'ailleurs

$$6s = 6 \times \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{2} - \frac{b}{3} - \frac{c}{6}\right) = \frac{1}{2}(6 - 3a - 2b - c).$$

Ici a et c sont nécessairement impairs, en sorte que $6s$ est entier. Ainsi *les intégrales sont des fonctions uniformes de* u.

Troisième cas : $m = 2$, $n = 4$, $p = 4$. — *Je prends les fonctions elliptiques pour lesquelles on a* $g_3 = 0$, $g_2 = -4$, et je pose

$$x = 1 + \wp^2(u),$$

ce qui entraîne

$$\wp'^2(u) = 4\,\wp(u)\,[\wp^2(u) + 1] = 4x\,\wp(u).$$

Ici x est nul quand u est égal à deux des trois racines de $\wp'(u)$, celles qui n'appartiennent pas à $\wp(u)$. La fonction $\wp(u)$ a dans ce cas un zéro double, qui est une demi-période. Soit

$$\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right) = 0, \qquad \wp'\left(\frac{\varpi}{2}\right) = 0.$$

Alors $x = 0$ pour $u = \frac{\varpi'}{2}, \frac{\varpi + \varpi'}{2}$, et ce sont des zéros doubles pour x. Donc, relativement à $\left(u - \frac{\varpi'}{2}\right)$ et à $\left(u - \frac{\varpi + \varpi'}{2}\right)$, les intégrales appartiennent aux exposants 0, a.

C'est pour $u = \frac{\varpi}{2}$ qu'on a $x = 1$, et c'est un zéro quadruple de $(x - 1)$. Donc, relativement à $\left(u - \frac{\varpi}{2}\right)$, les intégrales appartiennent aux exposants 0, b.

C'est enfin pour $u = 0$ qu'on a $x = \infty$, et cet infini est quadruple. Les intégrales appartiennent aux exposants $4s$, $4s + c$, relativement à u. Et l'on a

$$4s = 2\left(1 - \frac{a}{2} - \frac{b}{4} - \frac{c}{4}\right) = \frac{1}{2}(4 - 2a - b - c).$$

D'ailleurs, b, c sont impairs. Donc $4s$ est entier. *Les intégrales sont des fonctions uniformes de* u.

16. On pourrait fort bien se passer d'effectuer les changements de variable et opérer sur l'équation même. Mais ici le changement de

variable est trop simple pour qu'il vaille la peine de s'en passer. On peut d'ailleurs prévoir la forme de l'équation qu'on obtiendra finalement.

Tout d'abord, dans un quelconque des trois cas ci-dessus, supposons $a = b = 1$. Relativement à la variable u, les intégrales appartiennent partout aux exposants 0, 1, excepté pour $u = 0$. Il n'y a donc que le seul point singulier $u = 0$, et cette seule circonstance suffit pour qu'on soit assuré que, *si $a = b = 1$, dans tous les cas la transformée en u a la forme*

$$\frac{d^2 y}{du^2} + \mathrm{A}\, \wp(u) y = 0. \tag{28}$$

Effectivement, le changement de variable transforme ainsi l'équation (28).

Premier cas :

$$2x - 1 = \wp'(u),$$

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = -1, \qquad \frac{dx}{du} = \wp''(u) = 3\wp^2$$

L'équation (28) devient

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{2}{3}\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\frac{1}{x-1}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\mathrm{A}}{9x(x-1)}y = 0.$$

Deuxième cas :

$$x = 1 + 4\wp^3(u) = \wp'^2(u),$$

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = -1; \qquad \frac{dx}{du} = 12\wp^2(u)\wp'(u).$$

L'équation (28) devient

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\frac{1}{x-1}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\mathrm{A}}{36x(x-1)}y = 0$$

Troisième cas :

$$x = 1 + \wp^2(u),$$

$$g_2 = -4, \qquad g_3 = 0, \qquad \frac{dx}{du} = 2\wp(u)\wp'(u).$$

L'équation (28) devient

$$\frac{d^2 y}{dx^3} + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{3}{4}\frac{1}{x-1}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\mathrm{A}}{16x(x-1)}y = 0.$$

J'ai voulu mettre à part ce cas particulier (28), qui est le plus

simple, et sur lequel je vais revenir. Quand a, b sont différents de l'unité, la transformée à variable u est un peu plus compliquée. *L'équation de Gauss*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{R_0}{x} + \frac{R_1}{x-1}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{C}{x(x-1)}y = 0$$

devient :

1° Si l'on fait $2x - 1 = p'(u)$ avec $g_2 = 0$, $g_3 = -1$,

$$\frac{d^2 y}{du^2} + \frac{\left[3\left(\frac{R_0+R_1}{2}\right) - 2\right]p'(u) + \frac{3}{2}(R_1 - R_0)}{p(u)}\frac{dy}{du} + 9C\,p(u)y = 0;$$

2° Si l'on fait $x = 1 + 4p^3(u)$ avec $g_2 = 0$, $g_3 = -1$,

$$\frac{d^2 y}{du^2} + \frac{2[6(R_0+R_1) - 7]\,p^3(u) + 3R_1 - 2}{p(u)\,p'(u)}\frac{dy}{du} + 36C\,p(u)y = 0;$$

3° Si l'on fait $x = 1 + p^2(u)$ avec $g_2 = -4$, $g_3 = 0$,

$$\frac{d^2 y}{du^2} + \frac{2[4(R_0+R_1) - 5]\,p^2(u) + 4R_1 - 3}{p'(u)}\frac{dy}{du} + 16C\,p(u)y = 0.$$

Ces trois équations sont des cas particuliers de celle-ci :

$$\frac{d^2 y}{du^2} + \frac{a\,p^3(u) + b\,p(u) + c + e\,p'(u)}{p(u)\,p'(u)}\frac{dy}{du} + A\,p(u)y = 0.$$

17. L'équation (28) est un cas particulier de l'*équation de Lamé*, dont la récente étude a été le point de départ de la découverte nouvelle : l'intégration des équations linéaires par les fonctions elliptiques.

Prenons, en effet, l'équation de Lamé sous la forme usitée

$$y'' + (A k^2 \operatorname{sn}^2 u + h)y = 0;$$

changeons u en $u + \frac{\varpi'}{2}$ (ϖ' joue ici le rôle de $2iK'$), et introduisons $p(u)$ suivant la formule de la page 70; nous avons ainsi l'équation

$$(29) \qquad y'' + A\left[p(u) + \frac{1}{2}\alpha\right]y = 0.$$

J'ai posé

$$h + A\frac{1+k^2}{3} = \frac{1}{2}A\alpha.$$

L'équation (28) est le cas particulier dans lequel la constante α est nulle.

Le seul point singulier de l'équation (29) est $u=0$. Suivant une observation déjà faite (p. 33), on sera assuré que les intégrales appartiennent effectivement à des exposants égaux aux racines de l'équation déterminante, si la différence de ces racines n'est pas un nombre pair. De là cette conséquence connue que *l'intégrale générale de* (29) *est uniforme si* A *a la forme*

$$A = -n(n+1),$$

n étant un nombre entier. Cette intégrale a été formée complètement par M. Hermite dans les deux cas $n=1$ et $n=2$. Voici comment, dans tous les cas, le calcul peut être fait.

Je remarque d'abord que : *Si une fonction* $\varphi(u)$ *de deuxième espèce, ayant le seul infini* $u=0$, *multiple d'ordre* n, *est telle qu'une combinaison linéaire de* $\varphi(u)$ *et de* $\varphi(-u)$ *ait le zéro* $u=0$ *multiple d'ordre* $(n+1)$, *alors* $\varphi(u)$ *et* $\varphi(-u)$ *sont les intégrales d'une équation de Lamé, dans laquelle* $A=-n(n+1)$.

Pour le prouver, soit $\varphi_1=\varphi(-u)$. J'envisage le déterminant $\varphi\varphi'_1-\varphi_1\varphi'$. D'après l'hypothèse, il n'est ni nul ni infini pour $u=0$. C'est d'ailleurs une fonction de deuxième espèce et, de plus, une fonction paire. Il se réduit donc à une constante. Ensuite le déterminant $\varphi'\varphi''_1-\varphi'_1\varphi''$ a le zéro double $u=0$. C'est une fonction doublement périodique et paire. Il a donc la forme $Ap(u)+B$. La proposition est donc prouvée.

D'autre part, l'équation (29) n'est pas altérée par le changement de u en $-u$; et, quand $A=-n(n+1)$, les intégrales appartiennent aux exposants $-n$ et $(n+1)$ relativement à u. Donc *les conditions que je viens de prouver être suffisantes sont aussi nécessaires*.

Pour former $\varphi(u)$, je prendrai l'élément simple $\psi(u)$,

$$\psi(u)=e^{au}\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)}.$$

Je poserai

$$\varphi(u)=\psi^{(n-1)}(u)+c\,\psi^{(n-2)}(u)+c'\,\psi^{(n-3)}(u)+\ldots.$$

Les inconnues à déterminer sont a, v, c, c', ...

Comme $\varphi(u)$ et $\varphi(-u)$ doivent avoir une combinaison linéaire qui appartienne à l'exposant $(n+1)$, il faudra que le développement

de $\varphi(u)$ suivant les puissances croissantes de u ne présente que des termes dont les exposants soient de la même parité que n jusqu'à l'exposant $+n$ inclusivement, et cette condition suffira. On aura donc d'abord

$$\varphi(u) = \psi^{(n-1)}(u) + c\,\psi^{(n-3)}(u) + c'\,\psi^{(n-5)}(u) + \ldots.$$

Si $n = 2\nu - 1$, cette formule contient ν termes. Pour faire disparaître ensuite les termes à exposants pairs depuis o jusqu'à $2\nu - 1$, on aura ν conditions entre les $(\nu - 1)$ coefficients $c, c', \ldots$ et les inconnues a, v. La fonction $\varphi(u)$ contient encore une arbitraire, dont il faudra trouver la liaison avec l'arbitraire α de l'équation (29). Le résultat est analogue quand n est pair.

18. En vue de simplifier les calculs, établissons d'abord une formule qui sera fort utile, non seulement ici, mais dans presque toutes les applications de l'intégration par les fonctions elliptiques. Voici en quoi consiste cette formule.

Soit $f(u)$ une fonction quelconque; soient aussi a, v deux constantes. Posons

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \mathrm{F}(u), \qquad a = x - \mathrm{F}(v),$$

et envisageons le développement suivant :

$$e^{\frac{u^2}{2}\mathrm{F}'(v) + \frac{u^3}{2.3}\mathrm{F}''(v) + \frac{u^4}{2.3.4}\mathrm{F}'''(v) + \ldots} = 1 + \star + \mathrm{P}_2\frac{u^2}{1.2} + \mathrm{P}_3\frac{u^3}{1.2.3} + \mathrm{P}_4\frac{u^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

En fonction des coefficients de ce développement, on obtient celui de $e^{au}f(u+v)$ sous la forme suivante

$$(30)\qquad \begin{aligned}\frac{1}{f(v)}e^{au}f(u+v) = 1 + \frac{x}{u} &+ (x^2 + \mathrm{P}_2)\frac{u^2}{1.2}\\ &+ (x^3 + 3\mathrm{P}_2 x + \mathrm{P}_3)\frac{u^3}{1.2.3} + \ldots\\ &+ (x + \mathrm{P})^{(m)}\frac{u^m}{1.2.3\ldots m} + \ldots.\end{aligned}$$

Le symbole $(x + \mathrm{P})^{(m)}$ désigne

$$x^m + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\mathrm{P}_2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}\mathrm{P}_3 + \ldots.$$

Cette formule se prouve très aisément ainsi. Mettons, pour un instant,

$$\mathrm{F}(u) = \varphi'(u);$$

alors

$$f(u) = e^{\varphi(u)}.$$

En conséquence, on a

$$\frac{1}{f(v)} e^{-F(v)u} f(u+v) = e^{\varphi(u+v)-\varphi(v)-u\varphi'(v)}$$

$$= e^{\frac{u^2}{2}F'(v)+\frac{u^3}{2.3}F''(v)+\ldots} = 1 + \star + P_2 \frac{u^2}{1.2} + P_3 \frac{u^3}{1.2.3} + \ldots.$$

D'où je déduis

$$\frac{1}{f(v)} e^{au} f(u+v) = e^{xu}\left(1 + \star + P_2 \frac{u^2}{1.2} + P_3 \frac{u^3}{1.2.3} + \ldots\right);$$

ce qui prouve la formule (30) dans sa généralité.

L'avantage d'employer cette formule (30) ici consiste en ce qu'elle amène immédiatement des fonctions doublement périodiques dans les coefficients du développement de l'élément simple $\psi(u)$ suivant les puissances croissantes de u. Si je prends $f(u) = \sigma(u)$, alors

$$F'(u) = \left[\frac{f'(u)}{f(u)}\right]' = -\,p(u).$$

J'ai ainsi pour les coefficients P_2, P_3, P_4, ... des fonctions doublement périodiques de v. D'autre part, l'inconnue a est remplacée par l'inconnue x.

Voici d'abord les premiers coefficients P_2, P_3, P_4, ... dont les expressions se simplifient au moyen des relations qui se déduisent de $p'^2(v) = 4p^3(v) - g_2 p(v) - g_3$:

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l}
P_2 = -\ p(v),\\
P_3 = -\ p'(v),\\
P_4 = -\ p''(v) + 3p^2(v),\\
P_5 = -\ p'''(v) + 10\,p(v)\,p'(v),\\
P_6 = -\ p^{\text{IV}}(v) + 15\,p(v)\,p''(v) + 10\,p'^2(v) - 15\,p^3(v),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
P_2 = -\ p(v),\\
P_3 = -\ p'(v),\\
P_4 = -\,3\,p^2(v) + \frac{1}{2}g_2,\\
P_5 = -\,2\ p(v)\,p'(v),\\
P_6 = -\,5\,p^3(v) + \frac{1}{2}g_2\,p(v) + 2g_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Nous devons considérer, d'autre part, le développement de $\frac{1}{\sigma(u)}$ pour composer celui de $\psi(u)$. Or on a

$$\sigma(u) = u + \star - \frac{1}{2}\frac{g_2}{5!}u^5 - \frac{6g_3}{7!}u^7 - \ldots.$$

J'en déduis

$$\frac{1}{\sigma(u)} = \frac{1}{u}\left(1 + \star + \frac{1}{2}\frac{g_2}{5!}u^4 + \frac{6g_3}{7!}u^6 + \ldots\right);$$

et enfin

$$(32)\quad \begin{aligned}\frac{1}{\sigma(v)}\psi(u) = {} & \frac{1}{u} + x + (x^2 + P_2)\frac{u}{2} + (x^3 + 3P_2x + P_3)\frac{u^2}{2.3} \\ & + \left(x^4 + 6P_2x^2 + 4P_3x + P_4 + \frac{g_2}{10}\right)\frac{u^3}{2.3.4} \\ & + \left(x^5 + 10P_2x^3 + 10P_3x^2 + 5P_4x + P_5 + \frac{1}{2}g_2x\right)\frac{u^4}{2.3.4.5} \\ & + \Big[x^6 + 15P_2x^4 + 20P_3x^3 + 15P_4x^2 \\ & \qquad + 6P_5x + P_6 + \frac{3}{2}g_2(x^2 + P_2) + \frac{6}{7}g_3\Big]\frac{u^5}{2.3.4.5.6} \\ & + \ldots\ldots\end{aligned}$$

Tel est le développement de $\psi(u) = e^{au}\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)}$ *quand on a posé* $a = x + \frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}$. *Les coefficients* P_2, P_3, ... *sont donnés par les formules* (31).

19. Le développement qui précède offre de réels avantages, au point de vue de la simplicité de forme, sur le développement analogue employé jusqu'à présent. Son emploi simplifie notablement l'intégration de l'équation de Lamé, au moins dans les premiers cas.

I. $n = 1$. L'intégrale est $\psi(u)$, dont la constante a doit être liée à v de telle sorte que le développement de $\psi(u)$ soit impair jusqu'au terme en u inclusivement

$$\frac{1}{\sigma(v)}\psi(u) = \frac{1}{u} + \star + \mathcal{A}u + \ldots.$$

D'après (32), j'en conclus $x = 0$. Il reste à trouver la liaison entre v et l'arbitraire α de l'équation (29). A cet effet, je prends le terme en $\frac{1}{u}$ dans le développement du premier membre de l'équation après

substitution de $\frac{1}{\sigma(u)}\psi(u)$ à y. Le coefficient de ce terme est

$$A\left[\frac{P_2}{2}+\frac{1}{2}p(w)\right], \qquad \text{où j'écris} \qquad \alpha = p(w).$$

D'après (31), on a $P_2 = -p(v)$. Donc $v = \pm w$. Donc, pour $A = -2$, l'intégrale générale de (29) est

$$(33) \qquad y = C\,e^{-u\zeta(w)}\frac{\sigma(u+w)}{\sigma(u)} + C'\,e^{u\zeta(w)}\frac{\sigma(u-w)}{\sigma(u)}.$$

J'ai posé

$$\zeta(w) = \frac{\sigma'(w)}{\sigma(w)}.$$

Cette solution est en défaut si $+w$ et $-w$ ne sont pas distincts, aux multiples des périodes près. Je laisse de côté le cas $w = 0$, qui ne pourrait être envisagé que comme un cas limite, puisque l'équation cesse alors d'exister. Il nous reste donc une formule en défaut pour $w \equiv \frac{\varpi}{2}, \frac{\varpi'}{2}, \frac{\varpi+\varpi'}{2}$. Une des solutions existe toujours en ce cas, l'autre se confondant avec celle-là. Pour ces valeurs de w, il est connu que $\psi\left(u+\frac{\varpi'}{2}\right)$ se confond avec l'une des trois fonctions

$$\mathrm{sn}\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}u\right), \quad \mathrm{cn}\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}u\right), \quad \mathrm{dn}\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}u\right),$$

où λ a la valeur indiquée précédemment [p. 70, équation (18)]. La vérification est facile. Voyons, par exemple, dans quel cas on aura l'intégrale

$$(34) \qquad y = \frac{1}{\mathrm{sn}\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}u\right)}.$$

On a

$$y'' = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{2}{\mathrm{sn}^3\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}u\right)} - \frac{1+k^2}{\mathrm{sn}\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}u\right)}\right].$$

Substituant dans (29) et remplaçant $p(u)$, $p(w)$ par leurs expressions en fonction de l'algorithme sn, faisant en outre, pour simplifier $\lambda = 1$, ce qui est permis, j'obtiens, pour $A = -2$,

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2 w} = 0.$$

Donc $w = \frac{1}{2}\varpi'$ (ϖ' est mis ici pour $2iK'$).

Dans ce cas particulier, la seconde intégrale se trouvera sans difficulté.

On sait effectivement que, y étant une intégrale, on en a une seconde y_1 en faisant

$$y_1 = y\int\frac{du}{y^2},$$

ce qui donne ici

$$y_1 = \frac{1}{\operatorname{sn}\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}u\right)}\int \operatorname{sn}^2\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}u\right)du,$$

ou encore

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\operatorname{sn}\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}u\right)}\int\frac{du}{\operatorname{sn}^2\left[\lambda^{-\frac{1}{2}}\left(u+\frac{\varpi'}{2}\right)\right]} \\ &= \frac{\lambda}{\operatorname{sn}\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}u\right)}\int du\left[\frac{1+k^2}{3}+\wp\left(u+\frac{\varpi'}{2}\right)\right]; \end{aligned}$$

donc enfin on a la seconde intégrale

$$(35)\qquad y_1 = \frac{1}{\operatorname{sn}\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}u\right)}\left[\frac{1+k^2}{3}u-\zeta\left(u+\frac{\varpi'}{2}\right)\right].$$

C'est un exemple de cas où une intégrale seulement est de deuxième espèce.

On remarquera que je ne me suis pas préoccupé de vérifier la solution (33); on est ici placé dans un des cas prévus page 68, et où la vérification est inutile; d'ailleurs le mode d'analyse inverse employé ici dispense de toute vérification.

Il n'y a aucune difficulté à appliquer cette solution au cas particulier (28) et de là à l'équation de Gauss. La constante w est alors racine de $\wp(w) = 0$. On remarquera que, dans un des cas d'application à l'équation de Gauss, le troisième cas de la page 79, il y a lieu d'appliquer les formules (34) et (35). Au point de vue de cette application, on peut aller un peu plus loin, comme il suit. De la solution

$$y = e^{-\zeta(w)u}\frac{\sigma(u+w)}{\sigma(u)}$$

je déduis

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{du} = \zeta(u+w)-\zeta(u)-\zeta(w).$$

La fonction doublement périodique de u qui est au second membre

de cette équation peut s'exprimer par la fonction p, suivant l'analyse employée pour l'addition de l'argument dans les *intégrales* de deuxième espèce. De la formule (23) (p. 72) on déduit

$$\frac{p'(u)}{p(u)-p(v)} = \zeta(u+v)-\zeta(v-u)-2\zeta(u),$$

$$\frac{-p'(v)}{p(u)-p(v)} = \zeta(u+v)+\zeta(v-u)-2\zeta(v),$$

$$\frac{1}{2}\frac{p'(u)-p'(v)}{p(u)-p(v)} = \zeta(u+v)-\zeta(u)-\zeta(v).$$

Mettant ϖ à la place de v, j'ai donc ici

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}\frac{p'(u)-p'(\varpi)}{p(u)-p(\varpi)}$$

et je peux me servir de cette formule pour avoir, dans les cas correspondant à $A=-2$, des expressions algébriques de $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ pour une intégrale y de l'équation de Gauss. Ainsi, pour l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{2}{3}\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\frac{1}{x-1}\right)\frac{dy}{dx}-\frac{2}{9}\frac{1}{x(x-1)}y=0,$$

on a

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3(x-1)},$$

et effectivement on vérifie immédiatement les intégrales

$$y=x^{\frac{1}{3}}, \qquad y=(x-1)^{\frac{1}{3}}.$$

Revenant à l'équation de Lamé, on a, pour ce cas,

$$y=[p'(u)\pm 1]^{\frac{1}{3}}.$$

C'est une fonction de deuxième espèce, dont les multiplicateurs sont des racines de l'unité. Il n'y a pas lieu d'insister autrement à ce sujet, et je passe à d'autres cas de l'équation de Lamé.

II. $n=2$. L'intégrale est $\psi'(u)$, sous la condition que le développement de cette fonction suivant les puissances croissantes de u manque du terme en u (p. 81). En différentiant la formule (32), je conclus

$$x^3+3P_2x+P_3=0. \tag{36}$$

Cette équation donne les valeurs de x en fonction de v, pour de telles fonctions $\psi'(u)$. Il faut maintenant avoir une relation entre v, x et la constante α de l'équation proposée. On l'obtient en égalant à zéro le coefficient du terme en $\frac{1}{u^2}$, après avoir substitué $\psi'(u)$ à la place de y dans l'équation

$$\frac{d^2 y}{du^2} - 6\left[p(u) + \frac{1}{2}\alpha\right] y = 0.$$

Le terme en $\frac{1}{u^2}$ vient uniquement de la dernière partie, c'est-à-dire du produit

$$-6\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{2}\alpha + \ldots\right)\left(-\frac{1}{u^2} + \frac{x^2 + P_2}{2} + \ldots\right).$$

J'ai donc l'équation

$$(37)\qquad x^2 + P_2 - \alpha = 0.$$

J'ai à résoudre le système (36), (37); ce qui est fort aisé. Je tire de (36)

$$x^2(x^2 + 3P_2)^2 = P_3^2,$$

et ensuite avec (37)

$$(\alpha - P_2)(\alpha + 2P_2)^2 = P_3^2.$$

Remplaçons maintenant P_2 et P_3 par $-p(v)$, $-p'(v)$, suivant les formules (31), et tenons compte de l'identité

$$p'^2(v) = 4p^3(v) - g_2 p(v) - g_3.$$

Il reste donc

$$(38)\qquad p(v) = -\frac{\alpha^3 + g_3}{g_2 - 3\alpha^2}.$$

On tire ensuite de (36), (37)

$$(39)\qquad x = -\frac{p'(v)}{2p(v) - \alpha}.$$

Les formules (38), (39) résolvent complètement la question en fournissant les éléments de deux intégrales

$$y = \frac{d}{du}\left[e^{[x - \zeta(v)]u}\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)}\right];$$

car la formule (38) donne pour v deux valeurs égales et de signes contraires. Elle est en défaut pour $\alpha = \sqrt{\frac{g_2}{3}}$. Dans ce cas, une inté-

grale est immédiatement visible : c'est

$$y = \mathrm{p}(u) - \frac{\alpha}{2}.$$

Car alors

$$y'' = \mathrm{p}''(u) = 6\,\mathrm{p}^2(u) - \frac{1}{2} g_2$$

et, par suite,

$$y'' - 6\left[\mathrm{p}(u) + \frac{1}{2}\alpha\right]\left[\mathrm{p}(u) - \frac{1}{2}\alpha\right] = \frac{3\alpha^2 - g_2}{2} = 0.$$

Je n'insiste pas sur l'application à l'équation de Gauss, qui aura précisément lieu dans le cas d'exception. Je poursuis l'étude de l'équation de Lamé en traitant le cas suivant.

III. $n = 3$. L'intégrale est $y = \psi''(u) + c\psi(u)$, où les constantes doivent être telles que le développement suivant les puissances croissantes de u soit de la forme

$$y = \frac{\mathrm{a}}{u^3} + \frac{\mathrm{b}}{u} + \star + \mathrm{c}\,u + \star + \mathrm{d}\,u^3 + \ldots.$$

Les étoiles marquent les termes qui doivent manquer. L'absence du terme en u^2 donne l'équation

(40) $$\frac{1}{10}\left(x^5 + 10\,P_2 x^3 + 10\,P_3 x^2 + 5\,P_4 x + P_5 + \frac{1}{2} g_2 x\right) + \frac{c}{6}(x^3 + 3\,P_2 x + P_3) = 0.$$

Celle du terme indépendant de u donne

(41) $$\frac{1}{3}(x^3 + 3\,P_2 x + P_3) + cx = 0.$$

Enfin, en égalant à zéro, dans le résultat de la substitution de y, le terme en $\frac{1}{u^3}$, j'obtiens

$$2c - 12(\alpha + c) = 0,$$

l'équation étant

$$\frac{d^2y}{du^2} - 12\left[\mathrm{p}(u) + \frac{\alpha}{2}\right] y = 0.$$

Ainsi donc c est immédiatement déterminé :

$$c = -\frac{6}{5}\alpha.$$

Il reste à résoudre les équations (40) et (41). Toutefois, le calcul étant un peu pénible, il convient de le simplifier par des artifices convenables, qui pourraient être utilisés dans les cas suivants.

Il est prouvé par l'analyse du n° 17 (p. 81) que, si l'on détermine c et x en fonction de v par les équations (40) et (41), alors y est intégrale d'une équation de Lamé, dans laquelle α a une valeur convenable. Cette valeur est $\alpha = -\frac{5}{6}c$. Donc α a autant de déterminations différentes que c, et les équations (40) et (41) montrent qu'il y en a six. D'autre part, α étant donné, v ne peut avoir que deux valeurs égales et opposées. Donc on est assuré que $p(v)$ est une fonction rationnelle de α dont les termes sont du sixième degré. L'homogénéité fait d'ailleurs voir que cette fraction aura la forme

$$(41\,bis)\quad p(v) = \frac{\alpha^6 + m_1 g_2 \alpha^4 + m_2 g_3 \alpha^3 + m_3 g_2^2 \alpha^2 + m_4 g_2 g_3 \alpha + m_5 g_2^3 + m_6 g_2}{n_0 \alpha^5 + n_1 g_2 \alpha^3 + n_2 g_3 \alpha^2 + n_3 g_2^2 \alpha + n_4 g_2 g_3}.$$

On simplifie la solution en cherchant séparément les termes de cette fraction. Mais préalablement il faut déterminer le coefficient n_0. En voici le moyen. De (40) et (41) je déduis, en éliminant c,

$$9x(x^5 + 10 P_2 x^3 + \ldots + P_5) - 5(x^3 + 3 P_2 x + P_3)^2 = 0,$$

équation du sixième degré donnant x en fonction de v.

Cherchons la somme des inverses et la somme des carrés de ses racines. On a, eu égard aux formules (31),

$$\sum \frac{1}{x} = \frac{9 P_5 - 30 P_2 P_3}{5 P_3^2} = -\frac{48}{5}\frac{p(v)}{p'(v)}.$$

$$\sum x^2 = -2 \sum xx = -30 P_2 = +30\, p(v).$$

Je déduis maintenant de (41) la somme des valeurs diverses de c :

$$\sum c = -6 P_2 - \frac{1}{3}\sum x^2 - \frac{1}{3} P_3 \sum \frac{1}{x} = 6\, p(v) - \frac{16}{5} p(v) - 10\, p(v),$$

$$\sum c = -\frac{36}{5} p(v)$$

et, par suite,

$$\sum \alpha = 6\, p(v).$$

Ceci détermine le coefficient $n_0 = -6$.

Pour déterminer le numérateur de la fraction, je ferai $p(v) = 0$

dans les équations (40) et (41). Eu égard aux formules (31), et posant $g_3 = -1$ pour simplifier l'écriture, j'ai

$$P_2 = 0, \qquad P_3 = \mp 1, \qquad P_4 = \frac{1}{2} g_2, \qquad P_5 = 0.$$

Le signe de P_3 dépend de celui de $p'(v)$. Mais il disparaît dans la suite du calcul, et l'on peut faire $P_3 = 1$.

Je tire de (40) et (41) les deux équations que voici :

$$(42) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^4 + 10x + 3g_2 - 5c^2 &= 0, \\ x^3 + 3cx + 1 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Il n'est pas nécessaire d'effectuer le calcul, et il suffit d'énoncer que *le numérateur de* (41 *bis*) *est le* RÉSULTANT *des équations* (42), *où l'on remplace* c *par* $-\frac{6}{5}\alpha$, *et* g_2 *par* $g_2 : (-g_3)^{\frac{2}{3}}$.

Je n'écris pas ici ce résultant; je l'ai calculé et me suis assuré qu'il a bien la forme prévue, mais ses coefficients numériques sont assez compliqués.

Quant au dénominateur de (41 *bis*), je le calculerai d'une autre manière, en cherchant les cas où la solution doit être en défaut. Ici se présente une circonstance qui ne pouvait s'offrir dans les deux cas précédents. Il est possible de construire une fonction de deuxième espèce $\varphi(u)$, appartenant au cas exceptionnel qu'a signalé M. Mittag-Leffler (p. 61), et de telle sorte que $\varphi(u)$ et $\varphi(-u)$ soient les intégrales d'une équation de Lamé pour le cas $n = 3$. Posant, comme à la page 61,

$$f(u) = e^{au}\zeta(u),$$

on aura la fonction suivante

$$(43) \qquad \varphi(u) = \mathcal{A}_0 e^{au} + f''(u) - a^2 f(u),$$

qui contient deux constantes $\mathcal{A}_0$, a, dont on pourra disposer de telle sorte que le développement de $\varphi(u)$ suivant les puissances ascendantes de u manque des termes de degré 0 et de degré 2. Cela étant, et suivant la proposition de la page 81, $\varphi(u)$ et $\varphi(-u)$ seront les intégrales d'une équation de Lamé répondant au cas $n = 3$. Il ne reste d'ailleurs dans $\varphi(u)$ aucune arbitraire. Donc la constante α de l'équation sera entièrement déterminée. Les valeurs qu'elle aura dans de tels cas seront des racines du dénominateur de (41 *bis*).

Outre ce cas, peut-il s'en trouver d'autres où la formule (41 *bis*) doive être mise en défaut? S'il en existe, c'est qu'il n'y a pas d'intégrales *effectivement* de deuxième espèce. Une des intégrales est alors une fonction doublement périodique ordinaire qui, eu égard aux conditions du problème, ne peut être que $p'(u)$. Et, en effet, l'équation

$$y'' - 12\,p(u)y = 0,$$

qui appartient au cas $\alpha = 0$, a pour intégrale particulière $y = p'(u)$. Ainsi, outre les racines qui se déduisent du cas répondant à une intégrale de la forme (43), le dénominateur de (41 *bis*) a aussi la racine $\alpha = 0$. Examinons maintenant les conséquences de l'intégrale (43). On a le développement suivant pour $f(u)$:

$$f(u) = e^{au}\left(-\frac{1}{u} + \frac{g_2}{60}u^3 + \frac{g_3}{140}u^5 \ldots\right)$$
$$= -\frac{1}{u} - a - \frac{a^2 u}{2} - \frac{a^3 u^2}{6} + \left(\frac{g_2}{60} - \frac{a^4}{24}\right)u^3 + \left(\frac{g_2 a}{60} - \frac{a^5}{120}\right)u^4 + \ldots$$

et l'on en tire très facilement les deux conditions

$$\mathcal{A} = -\frac{2}{3}a^3, \qquad g_2 = 3a^4,$$

moyennant lesquelles $\varphi(u)$ satisfait aux conditions du problème. Substituant ensuite $\varphi(u)$ dans l'équation et égalant à zéro le coefficient du terme en $\frac{1}{u^3}$, j'obtiens

$$\alpha = \frac{5}{6}a^2.$$

D'où résulte la condition

$$2^2 3^3 \alpha^2 - 5^2 g_2 = 0,$$

caractérisant le cas où l'équation

$$\frac{d^2 y}{du^2} - 12\left[p(u) + \frac{\alpha}{2}\right]y = 0$$

s'intègre par la fonction (43).

J'ai ensuite cette autre conséquence : *Le dénominateur de* (41 *bis*) *est* $-\frac{1}{2^2 3^5}\alpha(2^2 3^3 \alpha^2 - 5^2 g_2)^2$.

20. J'arrête ici l'examen de ces cas généraux, et je veux main-

tenant examiner un cas dans lequel le rapport des intégrales est uniforme sans que les intégrales soient elles-mêmes uniformes. C'est pour des valeurs particulières de l'arbitraire α que l'équation de Lamé offre de tels exemples, et je me borne au seul cas suivant :

$$\frac{d^2 y}{du^2} = \frac{3}{4}\wp(u)y. \tag{44}$$

L'équation déterminante pour $u = 0$ a les racines $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}\cdot$ On a bien un exemple du cas cité : la différence des exposants est égale à 2; d'ailleurs, le développement de $p(u)$ offre une lacune par laquelle on est assuré que les intégrales appartiennent effectivement aux exposants dont il s'agit. Suivant la proposition de la page 59, et tenant compte de ce que $\psi_2(u) = -p'(u)$, on obtient une fonction uniforme z en posant

$$y = \left[\wp'\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} z.$$

Suivant la proposition XX, le rapport de deux intégrales quelconques y est une fonction doublement périodique ordinaire, ayant les périodes ϖ et ϖ' relativement à $\frac{u}{2}\cdot$

Relativement à u, les intégrales z appartiennent aux exposants -2 et 0. Comme ces fonctions sont doublement périodiques de première ou deuxième espèce, il y en a donc une qui reste toujours finie pour $\frac{u}{2} \equiv 0$, et une autre infinie du second ordre. D'ailleurs (p. 59) les fonctions z n'ont pas d'autre pôle. Donc l'une d'elle reste toujours finie. D'après la forme de l'équation différentielle, cette fonction doit être paire. C'est donc une simple constante. Quant à l'autre, on voit de même que c'est nécessairement $p\left(\frac{u}{2}\right)\cdot$

Ainsi l'équation (44) *a pour intégrales*

$$y = \left[\wp'\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad y = \left[\wp'\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \wp\left(\frac{u}{2}\right)\cdot$$

Cette solution trouve son application à plusieurs cas de l'équation de Gauss, comme je l'ai fait voir plus haut (p. 79). Dans ces cas, la solution est algébrique.

21. Il existe, pour chaque ordre, une équation présentant la plus

grande analogie avec l'équation (44), et fournissant, comme elle, une solution analytique du problème de la division de l'argument dans les fonctions elliptiques.

Prenons, par exemple, l'équation du troisième ordre

$$\frac{d^3y}{du^3} - \frac{4}{3}\,\mathrm{p}(u)\frac{dy}{du} - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \mathrm{p}'(u)y = 0. \tag{45}$$

L'équation déterminante relative à l'unique point singulier $u = 0$ est

$$s(s-1)(s-2) - \frac{4}{3}s + 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0,$$

dont les racines sont

$$-\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{3}+1, \quad -\frac{1}{3}+3.$$

Les différences impaires n'entraînent aucune condition subsidiaire, attendu que $\mathrm{p}(u)$ et $u\mathrm{p}'(u)$ sont des fonctions paires. Quant à la différence paire des deux dernières, elle est moindre que 4. La lacune qui existe dans les développements de $\mathrm{p}(u)$ et de $\mathrm{p}'(u)$ permet d'affirmer que les intégrales appartiennent effectivement à des exposants respectivement égaux à ces diverses racines. Suivant la proposition de la page 59, on obtient une fonction uniforme z en posant

$$y = \left[\psi_3\left(\frac{u}{3}\right)\right]^{-\frac{1}{3}} z.$$

Les intégrales z n'ont que les pôles $\frac{u}{3} \equiv 0$, et y appartiennent aux exposants -3, -2, 0. Pour les mêmes raisons que tout à l'heure, en tenant compte de la proposition XX, on conclut immédiatement que *l'intégrale générale de* (45) *est*

$$y = \left[\psi_3\left(\frac{u}{3}\right)\right]^{-\frac{1}{3}} \left[c + c'\,\mathrm{p}\left(\frac{u}{3}\right) + c''\,\mathrm{p}'\left(\frac{u}{3}\right)\right].$$

Je rappelle que

$$\psi_3(v) = \frac{\sigma(3v)}{\sigma^9(v)} = 3\,\mathrm{p}(v)\,\mathrm{p}'^2(v) - \frac{1}{4}\,\mathrm{p}''^2(v).$$

22. Prenons encore pour exemple l'équation du cinquième ordre

$$\frac{d^5y}{du^5} + \mathrm{A}\,\mathrm{p}(u)\frac{d^3y}{du^3} + \mathrm{B}\,\mathrm{p}'(u)\frac{d^2y}{du^2} + [\mathrm{C}\,\mathrm{p}''(u) + \mathrm{D}g_2]\frac{dy}{du} - \mathrm{E}\,\mathrm{p}'''(u)y = 0. \tag{46}$$

Pour $u=0$, l'équation déterminante a des racines que l'on peut égaler à des nombres arbitraires, moyennant un choix convenable de A, B, C, E, pourvu que la somme soit égale à 10; car cette équation est

$$(47)\qquad \begin{aligned} &s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\\ &\quad +As(s-1)(s-2)-2Bs(s-1)+6Cs-24E=0. \end{aligned}$$

Je détermine A, B, C, E *de telle sorte que les racines de l'équation* (47) *soient*

$$-\frac{1}{5},\quad -\frac{1}{5}+1,\quad -\frac{1}{5}+2,\quad -\frac{1}{5}+3,\quad -\frac{1}{5}+5.$$

Il n'y a qu'une seule des différences qui soit à la fois paire et non inférieure à 4; c'est la différence entre la seconde et la dernière. Aussi l'existence d'une intégrale appartenant à l'exposant $\left(-\frac{1}{5}+1\right)$ exige-t-elle une condition subsidiaire. On trouve cette condition (voyez p. 32) en subtituant dans l'équation

$$y=u^s+A_5u^{s+5}+\ldots \qquad \text{où} \qquad s=-\frac{1}{5}+1=\frac{4}{5}.$$

Ordonnant suivant les puissances croissantes de u et égalant à zéro le coefficient du terme en u^{s-1}, nous avons

$$\begin{aligned} \wp(u) &= \frac{1}{u^2}+\frac{g_2}{20}u^2+\ldots,\\ \wp'(u) &= -\frac{2}{u^3}+\frac{g_2}{10}u+\ldots,\\ \wp''(u) &= \frac{6}{u^4}+\frac{g_2}{10}\quad+\ldots,\\ \wp'''(u) &= -\frac{24}{u^5}\quad * \quad+\ldots. \end{aligned}$$

La condition est alors

$$(48)\qquad \frac{A}{20}(s-1)(s-2)+\frac{B}{10}(s-1)+\frac{C}{10}+D=0.$$

Je détermine D *par la condition que l'égalité* (48) *ait lieu pour* $s=\frac{4}{5}$.

Ceci fait, les intégrales appartiennent effectivement aux exposants ci-dessus. Le raisonnement déjà employé conduit encore à cette

conséquence, que *l'équation* (46), *où les constantes sont déterminées comme il vient d'être dit, a pour intégrale générale*

$$y = \left[\psi_5\left(\frac{u}{5}\right)\right]^{-\frac{1}{5}} \left[c + c'\,p\left(\frac{u}{5}\right) + c''\,p'\left(\frac{u}{5}\right) + c'''\,p''\left(\frac{u}{5}\right) + c^{\text{IV}}\,p'''\left(\frac{u}{5}\right)\right],$$

c'est-à-dire, au facteur $\left[\psi_5\left(\frac{u}{5}\right)\right]^{-\frac{1}{5}}$ près, *une fonction de* $\frac{u}{5}$ *aux périodes* ϖ, ϖ', *à* 5 *infinis et d'ailleurs arbitraire*.

23. Ceci peut être entièrement généralisé, et il n'est besoin d'aucun énoncé pour qu'on aperçoive cette généralisation, au moins en ce qui concerne les équations dont l'ordre est un nombre premier. Pour les autres cas, le résultat général a encore lieu, mais se présente sous une autre forme, dont il ne faut pas s'étonner, puisque la division de l'argument par un nombre composé peut être réduite à la division par les facteurs de ce nombre composé.

Je donne ici comme exemple l'équation du quatrième ordre suivante

$$(49) \qquad \frac{d^4 y}{du^4} + A\,p(u)\frac{d^2 y}{du^2} + B\,p'(u)\frac{dy}{du} + [C\,p''(u) + D\,g_2]y = 0,$$

dont je détermine les coefficients de telle sorte que l'équation

$$s(s-1)(s-2)(s-3) + As(s-1) - 2Bs + 6C = 0$$

ait les racines

$$-\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{4}+1, \quad -\frac{1}{4}+2, \quad -\frac{1}{4}+4$$

(dont la somme est 6, comme il convient), *et que la condition*

$$\frac{A}{20}s(s-1) + \frac{B}{10}s + \frac{C}{10} + D = 0$$

soit satisfaite pour $s = -\frac{1}{4}$.

La fonction uniforme z s'obtient en posant

$$y = \left[p'\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{4}} z,$$

et les intégrales z appartiennent pour $\frac{u}{2} \equiv 0$, qui est leur seul pôle,

aux exposants -1, 0, 1, 3. Suivant l'observation faite précédemment (voyez p. 75), il y a quatre intégrales z de deuxième espèce aux périodes ϖ, ϖ', relativement à $\frac{u}{2}$, et dont les multiplicateurs ne diffèrent entre eux que par les signes. On ne peut raisonner exactement comme dans les cas précédents, où les multiplicateurs des fonctions z étaient tous les mêmes. Mais voici comment on peut cependant achever la solution sans calcul. Soient μ, μ' les multiplicateurs d'une des quatre fonctions z_1. Soit z_2 celle qui a les multiplicateurs μ et $-\mu'$. Toute combinaison linéaire de ces deux fonctions a les multiplicateurs μ et μ'^2 pour les périodes ϖ et $2\varpi'$. Mais il existe une combinaison linéaire de *deux* quelconques des quatre fonctions z qui appartient à l'exposant 0, c'est-à-dire reste finie pour $u=0$. Il y a donc une combinaison linéaire de z_1 et z_2 qui reste constante ou bien est une exponentielle. Mais comme chacune des fonctions z qui est de deuxième espèce est paire ou impaire, la combinaison dont il s'agit ne peut être qu'une constante. Donc : 1° une des intégrales z est une constante; 2° les autres ont toutes les multiplicateurs ± 1. Cela suffit à les déterminer, et voici évidemment le résultat :

L'intégrale générale de (49) *est*

$$y = \left[p'\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{4}} \left\{ c + c' \operatorname{sn}\left[\lambda^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}+\frac{\varpi'}{2}\right)\right] + c'' \operatorname{cn}\left[\lambda^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}+\frac{\varpi'}{2}\right)\right] + c''' \operatorname{dn}\left[\lambda^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{2}+\frac{\varpi'}{2}\right)\right] \right\},$$

où λ a la valeur assignée [p. 70, équation (18)]; *ou, sous une autre forme*,

$$y = \left[p'\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{4}} \left[\sum c\, e^{\frac{au}{2}} \frac{\sigma\left(\frac{1}{2}u - \upsilon\right)}{\sigma\left(\frac{1}{2}u\right)} \right],$$

les constantes a, υ étant ainsi déterminées :

$$a = m\varepsilon + m'\varepsilon', \qquad \upsilon = \frac{m\varpi + m'\varpi'}{2} \qquad (m,\ m' = 0, 1).$$

J'arrête ici l'examen de ces applications, pour ainsi dire immédiates, des propositions contenues dans ce chapitre. J'y reviendrai plus loin cependant, après l'étude des nouveaux éléments qu'il con-

vient d'introduire dans la théorie des équations d'ordre supérieur au second, et je donnerai d'autres exemples d'équations se rattachant ainsi à la division de l'argument dans les fonctions elliptiques; en même temps, je ferai voir comment ces dernières équations envisagées dans le présent chapitre pouvaient être directement trouvées, si l'on avait pris leurs intégrales pour point de départ (chapitre IX).

24. Je terminerai ce chapitre par une observation qui concerne les équations qu'on peut envisager comme des *cas particuliers d'équations linéaires à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme*. Puisque ces dernières peuvent être intégrées par des fonctions finies portant sur les polynomes entiers, l'exponentielle et la fonction H de Jacobi, leurs cas particuliers peuvent certainement être intégrés par des fonctions finies portant sur les polynomes entiers et l'exponentielle. Il existe donc des caractères auxquels, sur une équation, cette propriété peut être discernée. L'étude de ces caractères ne rentre pas dans le cadre, déjà trop vaste, que je me suis ici tracé. Mais un exemple fera comprendre combien une pareille étude serait utile. A la vérité, M. Liouville a donné, dans de célèbres mémoires, des principes dont l'emploi, dans les cas particuliers, conduit à reconnaître si l'intégration d'une équation peut s'opérer sous forme finie et explicite par l'emploi des fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles. Mais, il faut le reconnaître, l'application de ces principes est extrêmement difficile; et, hors des cas très simples, où M. Liouville a pu les appliquer grâce aux inépuisables ressources d'un talent supérieur, personne n'a tenté d'en faire usage.

L'exemple que je choisis est précisément celui dont s'est occupé M. Liouville dans le mémoire intitulé *Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1[re] série, t. VI, p. 1). Il s'agit de l'équation de Riccati transformée en celle-ci

$$\frac{d^2y}{du^2} = \left(\frac{A}{u^2} + B\right)y. \tag{50}$$

M. Liouville a démontré que (B étant supposé différent de zéro) cette équation ne peut être intégrée sous forme finie et explicite que dans le seul cas où A a la forme $A = n(n+1)$, n étant un nombre entier. La méthode employée fait, en outre, voir que, dans ce cas,

l'intégration s'opère au moyen de l'exponentielle et des polynomes entiers seulement. En ce qui concerne la possibilité de l'intégration et la forme de l'intégrale dans ce cas particulier, ce sont là des résultats qu'on connaissait antérieurement, grâce à des artifices tout à fait spéciaux à l'équation (50). Il n'est cependant pas sans intérêt de remarquer que ce résultat peut être retrouvé si l'on envisage l'équation (50) comme un cas particulier de l'équation de Lamé

$$\frac{d^2 y}{du^2} = [A\, p(u) + B]\, y. \tag{51}$$

Effectivement, si l'on suppose $g_2 = g_3 = 0$, la fonction $p(u)$ se réduit à $\frac{1}{u^2}$; d'autre part, la fonction $\sigma(u)$ se réduit à u; et, puisqu'on a prouvé que, pour $A = n(n+1)$, l'équation (51) s'intègre sous forme finie par l'exponentielle, les polynomes entiers et la fonction $\sigma(u)$, il en résulte que l'équation (50), dans le même cas, s'intègre par l'exponentielle et les polynomes entiers. Allons plus loin, et déduisons l'intégrale de (50), dans les cas traités plus haut, de l'intégrale obtenue pour l'équation (51).

I. $A = 2$. Nous avons trouvé, pour (51), l'intégrale

$$y = e^{\pm\zeta(v)u} \frac{\sigma(u \mp v)}{\sigma(u)},$$

où v est déterminé par la condition $p(v) = B$. Or, supposons $g_2 = 0$, $g_3 = 0$, il s'ensuit

$$\sigma(v) = v, \qquad \zeta(v) = \frac{1}{v}, \qquad p(v) = \frac{1}{v^2}.$$

Donc

$$v = \frac{1}{\sqrt{B}}, \qquad \zeta(v) = \sqrt{B},$$

et nous avons l'intégrale de (50), pour $A = 2$,

$$y = e^{\sqrt{B}u} \frac{u\sqrt{B} - 1}{u\sqrt{B}},$$

ce qui est effectivement exact.

II. $A = 6$. Nous avons trouvé, pour (51), l'intégrale

$$y = \frac{d}{du}\left[e^{[x - \zeta(v)]u} \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)} \right],$$

où v, x sont déterminés ainsi $\left(\text{la constante } \alpha \text{ de la page 88 est ici } \frac{B}{3}\right)$:

$$p(v) = -\frac{B^3 + 27 g_3}{27 g_2 - 9 B^2}, \qquad x = -\frac{3 p'(v)}{6 p(v) - B}.$$

En faisant $g_2 = 0$, $g_3 = 0$, nous aurons

$$p(v) = \frac{1}{v^2} = \frac{B}{9}, \qquad v = \frac{3}{\sqrt{B}}, \qquad p'(v) = -\frac{2}{v^3} = -\frac{2}{27} B \sqrt{B},$$

$$x - \zeta(v) = -\sqrt{B},$$

$$y = \frac{d}{du}\left[e^{-\sqrt{B} u} \frac{\sqrt{B} u + 3}{u \sqrt{B}}\right].$$

Ce qui est encore exact. J'ai fait là une simple vérification, que l'on pourra poursuivre, et dont on pourrait, en sens inverse, se servir pour s'aider dans l'intégration de l'équation de Lamé; car, on le sait, l'intégration de l'équation (50), de proche en proche, pour $A = n(n+1)$, est extrêmement facile.

CHAPITRE III.

Invariants des équations différentielles linéaires et invariants différentiels. — Notions générales sur les invariants. — Formation de l'invariant V pour les équations de tous les ordres. — Forme canonique générale. — Formes canoniques exceptionnelles. — Comparaison entre les invariants des équations linéaires du troisième ordre et les invariants différentiels. — Usage des formes canoniques. — Exemple. — Conditions nécessaires et suffisantes pour la réduction d'une équation linéaire à une équation à coefficients constants; — à une équation dont l'intégrale générale soit rationnelle; — à une équation à coefficients doublement périodiques et dont l'intégrale générale soit uniforme. — Classes adjointes. — Étude des points critiques au moyen des invariants. — Deux applications

---

1. Dans les deux chapitres précédents, on a reconnu la possibilité, pour certains cas, de changer la variable et la fonction d'une équation linéaire de manière à transformer cette équation en une autre qui soit intégrable. Mais, si l'on veut pouvoir s'assurer avec pleine certitude que la transformation est possible ou impossible, il faut savoir mettre en relief les éléments de l'équation auxquels tient cette possibilité ou cette impossibilité, et qui doivent être indépendants, tant de la variable choisie que de la fonction arbitraire par laquelle on peut, pour la transformation, multiplier les intégrales. De tels éléments s'offrent d'eux-mêmes par les considérations suivantes, que, pour plus de simplicité, je présente d'abord à l'égard des équations du troisième ordre.

Soit une équation linéaire du troisième ordre, à variable x. J'en considère trois intégrales distinctes, y_1, y_2, y_3, dont les rapports à l'une d'entre elles constituent deux fonctions de x. Supposons x éliminé, il reste une équation entre ces rapports, ou *une relation homogène, indépendante de* x, *entre les trois intégrales* y_1, y_2, y_3; $f(y_1, y_2, y_3) = 0$. La fonction f dépend du choix des trois intégrales. Mais, si l'on change ces dernières, on effectue dans f une substitution linéaire et homogène sur les variables. Ainsi *les invariants absolus de* f sont des éléments dépendant de l'équation différentielle, mais de telle sorte que, d'une part, le choix des intégrales

est indifférent, d'autre part, ces invariants ne dépendent que du rapport des intégrales, et enfin ne dépendent pas non plus de la variable x et restent les mêmes si l'on change cette variable. Pour ces raisons, *les invariants absolus de f ne dépendent que de l'équation différentielle proposée, et restent invariables si à cette équation on en substitue une autre qui en soit la transformée, par un changement arbitraire de la variable et la multiplication des intégrales par une même fonction arbitraire.*

Toutefois, comme on ne connaît pas f, mais l'équation différentielle, il faut savoir quels sont ces invariants absolus de f que l'on pourra directement trouver sur l'équation différentielle.

On ne connaît pas les intégrales y_1, y_2, y_3; mais, aux environs d'une valeur arbitrairement choisie x_0 pour la variable, on sait, par l'équation même, développer ces intégrales en séries convergentes, ou, en d'autres termes, trouver leurs éléments infinitésimaux jusqu'à un ordre aussi élevé que l'on veut. C'est donc avec ces éléments qu'on doit composer les invariants dont il s'agit.

Regardons l'équation $f(y_1, y_2, y_3) = 0$ comme représentant une courbe plane, lieu du point dont les coordonnées homogènes sont y_1, y_2, y_3. L'équation différentielle nous fournit les éléments infinitésimaux de cette courbe en un point quelconque. Composons avec ces éléments une fonction qui reste invariable dans les substitutions homographiques. Ce sera une fonction satisfaisant aux conditions requises. On sait composer de telles fonctions. J'en ai, il y a quelques années, créé la théorie ([1]). Il en existe qui sont rationnelles par rapport aux coordonnées et à leurs dérivées; elles deviennent ici des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation différentielle et des dérivées de ces coefficients. La courbe que représente l'équation $f = 0$ peut être dite *attachée à l'équation linéaire du troisième ordre*. Elle ne change pas si l'on change la variable indépendante et la fonction par une substitution $X = f(x)$, $Y = \varphi(x)y$. Elle se transforme homographiquement si l'on change les intégrales.

Pour le quatrième ordre, on a une image géométrique de même nature. On peut concevoir deux relations homogènes

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0, \qquad F(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$$

([1]) Thèse *Sur les invariants différentiels*. [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 197.]

entre quatre intégrales, comme représentant une courbe gauche dont les invariants différentiels sont des fonctions des coefficients de l'équation différentielle, restant invariables par la substitution précédente.

Au delà du quatrième ordre, si l'image géométrique fait défaut, l'objet ne subsiste pas moins, et l'on conçoit encore l'existence de fonctions analogues. Pour préciser entièrement, *soit*

$$(1)\quad \frac{d^q Y}{dX^q} + q\,P_1 \frac{d^{q-1} Y}{dX^{q-1}} + \frac{q(q-1)}{1.2} P_2 \frac{d^{q-2} Y}{dX^{q-2}} + \ldots + q\,P_{q-1} \frac{dY}{dX} + P_q Y = 0$$

une équation d'ordre q, *où* $P_1, P_2, \ldots, P_q$ sont des fonctions de X (les coefficients du binome amènent quelques simplifications dans les formules). *On change de variable et de fonction, et l'on prend la variable* x, *la fonction* y, *en posant*

$$(2)\qquad \frac{dx}{dX} = \mu(X), \qquad Y = y\,u(X),$$

$\mu(X)$ *et* $u(X)$ *étant des fonctions indéterminées. L'équation se transforme alors en celle-ci*

$$(3)\quad \frac{d^q y}{dx^q} + q p_1 \frac{d^{q-1} y}{dx^{q-1}} + \frac{q(q-1)}{1.2} p_2 \frac{d^{q-2} y}{dx^{q-2}} + \ldots + q p_{q-1} \frac{dy}{dx} + p_q y = 0.$$

On nomme INVARIANT ABSOLU *une fonction des coefficients* P *et de leurs dérivées par rapport à* X, *telle que la même fonction, composée avec les coefficients* p *et leurs dérivées par rapport à* x, *lui soit toujours égale, quelles que soient les fonctions* $\mu(X)$ *et* $u(X)$, *en sorte qu'on ait, pour une telle fonction, l'identité*

$$\varphi\left(P_1, P_2, \frac{dP_1}{dX}, \cdots\right) = \varphi\left(p_1, p_2, \frac{dp_1}{dx}, \cdots\right),$$

dès qu'on remplace $p_1, p_2, \frac{dp_1}{dx}, \cdots$ *par leurs expressions en fonction de* $P_1, P_2, \ldots, \mu(X), u(X)$.

De telles fonctions existent, nous l'avons reconnu tout à l'heure. Je vais maintenant étudier leur formation, en faisant entièrement abstraction des invariants différentiels dont j'ai parlé, et déduisant toute la théorie de la considération des équations seules.

J'insisterai un instant sur les équations du troisième ordre pour montrer comment l'identité avec les invariants différentiels se retrouve jusque dans les détails de la théorie. En commençant cette exposi-

tion, je dois rappeler que les premiers traits en ont déjà été tracés, au sujet du troisième ordre et, en partie, du quatrième ordre, par M. Laguerre [1] et par M. Brioschi [2], sans que ces géomètres se soient cependant aperçus de l'identité de leurs résultats avec ceux que j'avais précédemment publiés au sujet des invariants différentiels. Quant à l'usage que je ferai plus loin de ces invariants, il constitue, je pense, un ordre de recherches entièrement nouveau.

2. Je prendrai pour point de départ une formule générale donnant le résultat du passage de l'équation (1) à sa transformée (3) par la substitution (2). Cette formule ne sera pas utile dans toutes ses parties; mais, après l'avoir énoncée, j'en signalerai les parties importantes pour l'objet actuel.

Je distingue par des accents les dérivées de $u(X)$ et de $\mu(X)$ prises par rapport à X, et j'écris simplement u, u', ..., μ, μ', ... au lieu de $u(X)$, $u'(X)$, $\mu(X)$, $\mu'(X)$, ...

Pour abréger l'écriture, je dénote par le symbole $B(s, k_1, k_2, \ldots)$ le coefficient numérique

$$B_r(s, k_1, k_2, \ldots) = \frac{s!\,(q-s)!}{(s-k_1-k_2\ldots)!\,(q-s-r)!\,k_1!\,k_2!\ldots},$$

où s, k_1, k_2, ... sont des nombres entiers.

Je compose avec la fonction $\mu(X)$ et ses dérivées la fonction suivante :

$$(4)\qquad M_{r,s} = \sum B_r(s, k_1, k_2, \ldots)\left(\frac{\mu'}{2\mu}\right)^{k_1}\left(\frac{\mu''}{6\mu}\right)^{k_2}\left(\frac{\mu'''}{2.3.4\,\mu}\right)^{k_3}\cdots,$$

où la sommation s'applique à tous les entiers positifs k_1, k_2, ... donnant $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots = r$.

Enfin avec $u(X)$ et ses dérivées, et la fonction $M_{r,s}$, je compose la nouvelle fonction

$$(5)\qquad R_{p,m} = \frac{u^{(p)}}{u} + \frac{p}{1} M_{1,q-m}\frac{u^{(p-1)}}{u} + \frac{p(p-1)}{1.2} M_{2,q-m}\frac{u^{(p-2)}}{u} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} M_{3,q-m}\frac{u^{(p-3)}}{u} + \ldots,$$

où q est l'ordre de l'équation différentielle.

(1) *Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 116 et 224. [*Œuvres de Laguerre*, t. I, p. 420.]

(2) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII, p. 105. [*Œuvres de Brioschi*, t. V, p. 255.]

Ces définitions posées, voici la formule de transformation :

$$(6)\quad p_m = \frac{1}{\mu^m}\Big[P_m + \frac{m}{1}R_{1,m}P_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}R_{2,m}P_{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}R_{3,m}P_{m-3} + \ldots + \frac{m}{1}R_{m-1,m}P_1 + R_{m,m}\Big].$$

Je n'en donne pas la démonstration, qui est très facile et n'exige aucune considération qui soit nouvelle. Voici les points qu'il convient d'y remarquer :

1° Les coefficients $R_{1,m}$, $R_{2,m}$, ... sont indépendants des coefficients P.

2° Chacun d'eux est homogène et de degré zéro par rapport à la lettre u, ainsi que par rapport à la lettre μ, abstraction faite des indices de dérivation.

3° Le coefficient $R_{p,m}$ est homogène et d'ordre p, par rapport aux indices de dérivation.

J'attribue à P_m, ainsi qu'à p_m, le poids m, et, plus généralement, à $\frac{d^n P_m}{dX^n}$ ainsi qu'à $\frac{d^n p_m}{dx^n}$ le poids $(m+n)$. A ce point de vue, nous pourrons dire que la formule (6) se compose ainsi :

$$(7)\qquad p_m = \frac{1}{\mu^m}(P_m + \mathcal{R}_{m-1}),$$

où $\mathcal{R}_{m-1}$ est une fonction des lettres P, dont tous les termes sont de poids au plus égal à $(m-1)$. Par différentiation, j'en conclus

$$(8)\qquad \frac{d^n p_m}{dx^n} = \frac{1}{\mu^{m+n}}\left(\frac{d^n P_m}{dX^n} + \mathcal{R}_{m+n-1}\right),$$

où encore, comme dans tout ce qui suit, $\mathcal{R}_\omega$ désigne une fonction des lettres P et de leurs dérivées, entière et ne contenant que des termes de poids au plus égal à l'indice ω. Je conserve d'ailleurs partout la même lettre $\mathcal{R}$, ce qui n'a pas d'inconvénient. Elle désigne un reste qui deviendra négligeable.

3. Je considère un invariant absolu rationnel, c'est-à-dire fonction rationnelle des coefficients P, $\frac{dP}{dX}$, ... Je mets en évidence, dans son numérateur et son dénominateur, le poids de chaque terme en l'écri-

vant ainsi :

$$\varphi\left(\mathrm{P}, \frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{X}}\cdots\right) = \frac{\mathrm{A}_m + \mathrm{A}_{m-1} + \cdots}{\mathrm{B}_n + \mathrm{B}_{n-1} + \cdots},$$

les indices m, n indiquant les poids des fonctions A_m, B_n, ..., qui sont homogènes chacune en ce qui concerne le poids.

Désignons par a_m, b_n, ..., les mêmes fonctions, où les lettres P, $\frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{X}}$, ... sont remplacées par les lettres p, $\frac{dp}{dx}$, ... Par définition, on doit avoir

$$\frac{\mathrm{A}_m + \mathrm{A}_{m-1} + \cdots}{\mathrm{B}_n + \mathrm{B}_{n-1} + \cdots} = \frac{a_m + a_{m-1} + \cdots}{b_n + b_{n-1} + \cdots}$$

dès qu'on remplace dans a_m, b_n, ... les lettres p, $\frac{dp}{dx}$, ... par leurs expressions déduites de la formule (6).

Prenons tout d'abord la simple substitution

$$\mathrm{Y} = y, \qquad \frac{dx}{d\mathrm{X}} = \frac{1}{\alpha},$$

où α est une constante. La formule de transformation est simplement

$$\frac{d^n p_m}{dx^n} = \alpha^{m+n} \frac{d^n \mathrm{P}_m}{d\mathrm{X}^n}.$$

On a donc

$$a_m = \alpha^m \mathrm{A}_m, \qquad a_{m-1} = \alpha^{m-1} \mathrm{A}_{m-1}, \qquad \ldots,$$

et l'identité ci-dessus se réduit à

$$\frac{\mathrm{A}_m + \mathrm{A}_{m-1} + \cdots}{\mathrm{B}_n + \mathrm{B}_{n-1} + \cdots} = \frac{\alpha^m \mathrm{A}_m + \alpha^{m-1} \mathrm{A}_{m-1} + \cdots}{\alpha^n \mathrm{B}_n + \alpha^{n-1} \mathrm{B}_{n-1} + \cdots},$$

qui doit avoir lieu, quel que soit α. J'en déduis que φ se réduit à $\frac{\mathrm{A}_m}{\mathrm{B}_m}$, c'est-à-dire que *tout invariant absolu est le quotient de deux fonctions entières dont chacune est la somme de termes homogènes quant au poids, et que ce poids est le même pour ces deux fonctions*. En d'autres termes, *un invariant absolu est homogène et du poids zéro*.

Dans a_m remplaçons p, $\frac{dp}{dx}$, ... par les expressions abrégées (7), (8). Nous avons ainsi

$$a_m = \frac{1}{\mu^m}(\mathrm{A}_m + \mathcal{R}_{m-1})$$

et de même

$$b_m = \frac{1}{\mu_m}(B_m + \mathcal{R}'_{m-1}).$$

On a donc l'identité

$$\frac{A_m + \mathcal{R}_{m-1}}{B_m + \mathcal{R}_{m-1}} = \frac{A_m}{B_m},$$

et cette identité exige manifestement que $\mathcal{R}_{m-1}$ et $\mathcal{R}'_{m-1}$ soient identiquement nuls. Ainsi *tout* INVARIANT ABSOLU *est le quotient de deux* INVARIANTS RELATIFS. Un invariant relatif est une fonction homogène, quant au poids, et jouissant de la propriété $A_m = \mu^m a_m$, où le nombre m est son poids.

Si les coefficients d'une équation satisfont identiquement à une relation $f\left(P, \frac{dP}{dX}, \cdots\right) = 0$, et que la transformée de cette équation, c'est-à-dire la relation qu'on en déduit pour les coefficients d'une transformée, soit encore $f\left(p, \frac{dp}{dx}, \cdots\right) = 0$, la fonction f est un invariant relatif. On le démontrera sans peine. De même aussi, si, considérant la relation $f\left(P, \frac{dP}{dX}, \cdots\right) = 0$ non comme une identité, mais comme définissant certaines valeurs de X, on cherche l'équation entre $p, \frac{dp}{dx}, \ldots$ qui donne les valeurs correspondantes de x, et que cette équation soit $f\left(p, \frac{dp}{dx}, \cdots\right) = 0$, la fonction f est encore un invariant relatif.

Il n'existe aucun invariant relatif qui ne contienne au moins trois coefficients différents. Car on peut, théoriquement du moins, disposer des fonctions $\mu(X)$ et $u(X)$ de manière à réduire à zéro deux coefficients quelconques. Un invariant relatif est homogène, quant au poids. Il ne contient donc aucun terme indépendant des coefficients, et se réduirait ainsi à zéro. Un tel invariant est donc toujours zéro, c'est-à-dire qu'il n'existe pas.

4. Je vais maintenant donner le moyen de former les invariants. Je prends pour point de départ, à cet effet, l'équation du second ordre, que j'écris ainsi :

$$z'' = az' + bz \tag{9}$$

et que je transforme en prenant pour inconnue nouvelle [1],

$$y = z^{q-1}.$$

Cette inconnue y satisfait à une équation linéaire d'ordre q. Si z_1, z_2 sont deux intégrales de (9), on a q intégrales distinctes de la nouvelle équation en prenant les divers termes d'un polynome homogène, de degré q, en z_1, z_2. Ainsi l'équation d'ordre q dont il s'agit admet n intégrales particulières satisfaisant aux $(q-2)$ relations

$$(9\ bis)\qquad \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4} = \ldots = \frac{y_{q-1}}{y_q},$$

qui sont homogènes et ne contiennent pas la variable indépendante.

Pour former l'équation en y, on écrit successivement

$$\begin{aligned}
&y' = (q-1)z^{q-2}z',\\
&y'' - ay' - (q-1)by = (q-1)(q-2)z^{q-3}z'^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&y^{(m)} + \Pi_1 y^{(m-1)} + \Pi_2 y^{(m-2)} + \ldots + \Pi_m y\\
&\qquad = (q-1)(q-2)\ldots(q-m)z^{q-m-1}z'^m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La dernière de ces équations est celle que l'on cherche. On démontre très aisément que, dans chacune des équations précédentes, le coefficient Π_r est homogène et du poids r, si l'on regarde $a^{(m)}$, $b^{(m)}$ comme étant des poids $m+1$, $m+2$. De la sorte, dans l'équation finale

$$y^{(q)} + qp_1 y^{(q-1)} + \frac{q(q-1)}{1.2} p_2 y^{(q-2)} + \ldots + qp_{q-1}y' + p_q y = 0,$$

chaque coefficient est homogène et d'un poids marqué par son indice.

Les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_q$ ne dépendent que de $a, b, a', b', \ldots$. Entre $p_1, p_2, \ldots$ et leurs dérivées, on pourra trouver, par l'élimination de $a, b, a', b', \ldots, (q-2)$ relations identiques. Nous pouvons prévoir la forme de ces relations.

Le coefficient p_3 contient autant de termes qu'on peut former de combinaisons du poids 3 avec a, a', a'', b, b', qui sont des poids 1, 2, 3, 2, 3. On peut former pareil nombre de combinaisons de ce

---

[1] L'idée de cette transformation est empruntée à M. Liouville : *Sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. IV, p. 423).

même poids 3 avec p_1, p', p'_1, p''_1, p_2, p'_2. Il y a, par suite, une relation linéaire et homogène entre p_3 et ces dernières combinaisons, c'est-à-dire une relation du poids 3 entre p_1, p_2, p_3 et leurs dérivées.

Soit $v_3 = 0$ cette relation.

Il y a de même une relation du poids 4 entre p_1, p_2 et p_4. Cette relation contient les dérivées de p_1 jusqu'au troisième ordre, celle de p_2 jusqu'au second seulement. Au moyen de $v_3 = 0$, on peut faire disparaître p'''_1 sans changer le poids, et obtenir une relation du poids 4 entre p_1, p_2, p_3, p_4, mais ne contenant pas de dérivée au delà du second ordre.

Soit $v_4 = 0$ cette relation.

On peut de même obtenir une suite de relations $v_5 = 0$, $v_6 = 0$, ..., $v_q = 0$ qui ne contiennent que les dérivées jusqu'au second ordre, et ont les poids 5, 6, ..., q.

Ces relations, prises ensemble, caractérisent les équations d'ordre q pour lesquelles les intégrales sont liées par les relations (9 *bis*). Ces relations ne dépendent que des rapports des intégrales, non des intégrales elles-mêmes. Elles ne contiennent pas la variable indépendante. Donc, dans leur ensemble, elles expriment une propriété invariante.

Considérons maintenant, pour une équation quelconque

$$\frac{d^q Y}{dX^q} + q P_1 \frac{d^{q-1} Y}{dX^{q-1}} + \ldots + P_q Y = 0,$$

les fonctions V_3, V_4, ..., V_q, et, d'autre part, pour la transformée

$$\frac{d^q y}{dx^q} + q p_1 \frac{d^{q-1} y}{dx^{q-1}} + \ldots + p_q y = 0,$$

les fonctions v_3, v_4, ..., v_q. A cause de la propriété d'invariance, le système d'équations

$$V_3 = 0, \qquad V_4 = 0, \qquad V_5 = 0, \qquad \ldots, \qquad V_q = 0,$$

a pour transformé le système

$$v_3 = 0, \qquad v_4 = 0, \qquad v_5 = 0, \qquad \ldots, \qquad v_q = 0.$$

Prenons une de ces dernières quantités v_m, pour y substituer aux coefficients p leurs expressions déduites de la formule de transformation (6).

On aura ainsi

$$v_m = \frac{1}{\mu^m}(V_m + \lambda_1 W_{m-1} + \lambda_2 W_{m-2} + \ldots),$$

où W_{m-1}, W_{m-2}, ... sont des fonctions des seules quantités P, homogènes quant au poids, et de poids marqués par leurs indices, tandis que les coefficients λ_1, λ_2, ... ne contiennent que u, u', ..., μ, μ', ... et sont, de leur côté, homogènes quant aux indices de dérivation, et, à ce point de vue, d'un ordre égal chacun à leur indice.

Il suffit d'envisager l'ensemble des relations analogues pour conclure que les quantités W_{m-1}, W_{m-2}, ... sont des combinaisons formées avec les seules quantités V_3, V_4, ...

Prenons maintenant la formule qui concerne la première des quantités v, c'est-à-dire v_3. Comme elle est du moindre poids, on peut conclure

$$v_3 = \frac{1}{\mu^3} V_3.$$

Donc *la première des fonctions v est un invariant.* Il n'en est pas de même des autres, qu'on peut appeler des *pseudo-invariants.*

Nous avons ainsi reconnu l'existence d'un invariant du poids 3. Je supprime maintenant son indice et le désigne par la seule lettre v. Je le formerai effectivement, et, au moyen de ce seul invariant v, je parviendrai à la notion de tous les autres par une autre voie, mieux appropriée à notre but. Je fais cependant observer que l'on pourrait fonder également la composition des invariants sur les pseudo-invariants v_4, v_5, ..., v_q.

5. Je ne cherche pas la composition de v dans l'analyse ci-dessus, ce qui entraînerait à un calcul pénible. Je vais avoir recours à l'*équation adjointe* de Lagrange. Je rappelle que, si y_1, y_2, ..., y_q sont des intégrales distinctes d'une même équation d'ordre q, on obtient une intégrale z de l'adjointe en divisant par le déterminant $U = (y_1 y'_2 y''_3 \ldots y_q^{(q-1)})$ un déterminant analogue contenant les dérivées jusqu'à l'ordre $(q-2)$ seulement, en sorte que z a la forme

$$z = \frac{1}{U}\begin{vmatrix} A_1 & y_1 & y'_1 & \ldots & y_1^{(q-2)} \\ A_2 & y_2 & y'_2 & \ldots & y_2^{(q-2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ A_q & y_q & y'_q & \ldots & y_q^{(q-2)} \end{vmatrix},$$

où A_1, A_2, ..., A_q sont des constantes arbitraires. Les intégrales z sont des covariants de l'équation proposée, au point de vue de la substitution générale

$$\frac{dx}{dX} = \mu(X), \qquad Y = y\,u(X).$$

Par suite, *tout invariant d'une équation est aussi un invariant de l'équation adjointe.*

Si dans l'invariant v on remplace les coefficients p par ceux de l'équation adjointe, on obtient un autre invariant de la proposée. Or, d'après la forme de l'équation adjointe, forme que je vais rappeler dans un instant, ce nouvel invariant, comme v, sera du poids 3 et ne contiendra que p', p'_1, p''_1, p_2, p'_2, p_3. D'ailleurs p_3 y entrera linéairement comme dans v. Avec cet invariant et v on pourra former une combinaison linéaire ne contenant plus p_3, et qui sera encore un invariant. Or il n'existe aucun invariant ne contenant que p_1 et p_2, ainsi que je l'ai fait observer plus haut (p. 107). Cette combinaison se réduit donc à zéro. Autrement dit, *l'invariant v se transforme en lui-même* (à un facteur numérique près) *quand on y substitue aux coefficients de l'équation proposée ceux de son adjointe.*

Prenons d'abord l'équation sous la forme

$$y^{(q)} + \frac{q(q-1)}{2} p_2 y^{(q-2)} + \frac{q(q-1)(q-2)}{2.3} p_3 y^{(q-3)} + \ldots + p_q y = 0,$$

où manque le coefficient p_1. L'adjointe est

$$z^q + \frac{q(q-1)}{2}(p_2 z)^{(q-2)} - \frac{q(q-1)(q-2)}{2.3}(p_3 z)^{(q-3)} + \ldots \pm p_q z = 0$$

ou développée

$$z^q + \frac{q(q+1)}{2} p_2 z^{(q-2)} - \frac{q(q-1)(q-2)}{2.3}(p_3 - 3p'_2) z^{(q-3)} + \ldots = 0,$$

en sorte que p_2, p_3 sont remplacés par p_2 et $(p_3 - 3p'_2)$.

Dans cette hypothèse, $p_1 = 0$, l'invariant v, du poids 3, se réduit à deux termes, et je l'écris

$$v = mp'_2 - 2p_3,$$

m étant un coefficient inconnu. Je substitue à p_2, p_3 les coefficients

de l'adjointe, et j'ai

$$(v) = mp'_2 + 2(p_3 - 3p'_2).$$

Par suite,

$$(v) = -v, \qquad m = 3.$$

Ainsi *pour* $p_1 = 0$, *l'invariant* v *se réduit à* $(3p'_2 - 2p_3)$.

Cette expression pourrait suffire; mais il est bien aisé de le compléter. On n'a, pour y parvenir, qu'à effectuer, dans une équation quelconque, une transformation qui fasse disparaître le second terme. On y parvient par le seul changement de la fonction.

Les formules se rapportant à ce cas simple sont :

$$p_1 = P_1 + \frac{u'}{u},$$

$$p_2 = P_2 + 2\frac{u'}{u}P_1 + \frac{u''}{u},$$

$$p_3 = P_3 + 3\frac{u'}{u}P_2 + 3\frac{u''}{u}P_1 + \frac{u'''}{u},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Que l'on fasse alors

$$\frac{u'}{u} = -P_1,$$

on en déduit

$$\frac{u''}{u} = -P'_1 + P_1^2,$$

$$\frac{u'''}{u} = -P''_1 + 3P_1P'_1 - P_1^3,$$

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = P_2 - P'_1 - P_1^2, \qquad p_3 = P_3 - 3P_1P_2 + 2P_1^3 - P''_1, \qquad \dots.$$

Donc enfin, en substituant dans $(3p'_2 - 2p_3)$,

$$(10) \qquad V = -P''_1 + 3(P'_2 - 2P_1P'_1) - 2(P_3 - 3P_1P_2 + 2P_1^3).$$

6. Voici donc obtenue explicitement l'expression de l'invariant V; elle présente cette curieuse circonstance de ne pas contenir l'ordre de l'équation. Je ferai usage de cet invariant V pour réduire une équation quelconque à une *forme canonique*, par un choix convenable des fonctions u, μ qui entrent dans la transformation.

Je choisis ces fonctions de telle sorte que l'invariant transformé v soit l'unité, et que le coefficient transformé p_1 soit nul. Cela fait, je prendrai des notations spéciales pour les coefficients de la forme canonique ainsi définie. Je désignerai par $\frac{1}{3}h$ le coefficient p_2,

par s_4, s_5, s_6, ... les coefficients p_4, p_5, p_6, ... Quant au coefficient p_3, voici son expression :

L'invariant v étant réduit à l'unité, p_1 à zéro, p_2 à $\frac{1}{3}h$, on a

$$1 = \frac{dh}{dx} - 2p_3,$$

d'où

$$p_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dx} - 1\right).$$

La forme canonique d'une équation d'ordre q est donc

$$(11)\quad \frac{d^q y}{dx^q} + \frac{q(q-1)}{2}\frac{h}{3}\frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dx}-1\right)\frac{d^{q-3}y}{dx^{q-3}} + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4}s_4\frac{d^{q-4}y}{dx^{q-4}} + \ldots + s_q y = 0.$$

Pour l'obtenir, on prendra la formule

$$v = \frac{1}{\mu^3}V,$$

et l'on conclura

$$\frac{dx}{dX} = V^{\frac{1}{3}}.$$

D'autre part, la formule (6) donne pour $m = 1$ ce cas particulier :

$$p_1 = \frac{1}{\mu}\left[P_1 + \frac{u'}{u} + (q-1)\frac{\mu'}{2\mu}\right].$$

Faisant $p_1 = 0$, $\mu = V^{\frac{1}{3}}$, je conclus

$$\frac{u'}{u} = -(q-1)\frac{\mu'}{2\mu} - P_1 = -\frac{q-1}{6}\frac{V'}{V} - P_1.$$

Ainsi *la forme canonique* (11) *s'obtient si l'on fait*

$$(12)\qquad \frac{dx}{dX} = V^{\frac{1}{3}}, \qquad y = YV^{\frac{q-1}{6}}e^{\int P_1\,dX}.$$

C'est sous la forme

$$\mu = V^{\frac{1}{3}}, \qquad \frac{u'}{u} = -\frac{q-1}{6}\frac{V'}{V} - P_1$$

que ces formules nous seront utiles; on y voit que *la mise sous forme canonique s'obtient sans quadrature; les coefficients* h,

$\frac{dh}{dx}$, s_4, s_5, ..., s_q *s'expriment explicitement en fonction des coefficients de l'équation proposée*. J'ajoute que s_m *a la forme*

$$s_m = \frac{1}{V^{\frac{4m}{3}}} t_m,$$

où t_m *est une fonction* ENTIÈRE *des coefficients de l'équation proposée et de leurs dérivées*.

Effectivement, on voit aisément que $\frac{\mu^{(n)}}{\mu}$ et $\frac{u^{(n)}}{u}$ sont des fonctions rationnelles de ces mêmes quantités, ayant pour dénominateur V^n. La formule (6) fait voir alors immédiatement la justesse de la proposition que je viens d'énoncer.

Ceci s'étend aussi à h et $\frac{dh}{dx}$, qui sont les quotients de fonctions entières par $V^{\frac{8}{3}}$ et V^4.

Il est manifeste que *les coefficients de la forme canonique* (11) *sont des invariants absolus;* ils sont irrationnels, mais leurs cubes sont rationnels. Leurs numérateurs sont des invariants relatifs rationnels. Comme le *poids* de V est égal à 3, on conclut que *le poids du numérateur de* h *est égal à* 8, *le poids du numérateur de* $\frac{dh}{dx}$ *est égal à* 12, *le poids du numérateur de* s_m *est égal à* $4m$.

On peut calculer, mais assez péniblement, les numérateurs de h, $\frac{dh}{dx}$, s_4, ... par la formule (6). A titre d'exemple, je donne le résultat du calcul pour le numérateur de h. Je l'appelle Δ et j'obtiens

$$(13)\qquad \Delta = 27\,V^2(P_2 - P_1^2 - P_1') + \frac{7(q+1)}{4} V'^2 - \frac{3(q+1)}{2} VV''.$$

En fonction de cet invariant Δ, on a

$$(14)\qquad h = \frac{1}{9}\frac{\Delta}{V^{\frac{8}{3}}}.$$

Quant à $\frac{dh}{dx}$, on l'obtient immédiatement en fonction de Δ et de V. Je lui donne un autre nom, l, et j'ai

$$(15)\qquad \frac{dh}{dx} = l = \frac{3\,V\Delta' - 8\,\Delta V'}{27\,V^4}.$$

Il ne faut pas oublier que x est la *variable canonique*, et que les accents dénotent les dérivées prises par rapport à la variable donnée X, en fonction de laquelle les coefficients P, et, par suite, V, Δ sont explicitement connus.

Pour le calcul effectif des invariants dont il s'agit, il y a d'autres méthodes qui conduisent plus aisément au but, et qui font voir aussi l'existence d'autres invariants plus simples, en ce sens qu'ils ne contiennent pas de dérivée au delà du second ordre (pour les équations *du quatrième ordre, au moins*). Mais ces considérations m'entraîneraient beaucoup trop loin, et les notions précédentes me suffiront d'ailleurs pour les applications que je désire développer ici.

7. La réduction à la forme canonique (11) est impossible si l'invariant V est identiquement zéro. Si l'équation est du troisième ordre, la condition $V = 0$ exprime (p. 109) que l'équation est une transformée d'équation du second ordre. Cette équation du second ordre s'obtiendra alors très aisément. Si l'équation est d'ordre supérieur au troisième, on pourra trouver une autre forme canonique, que j'appellerai *exceptionnelle*. Pour la définir, on aura recours au pseudo-invariant V_4 (p. 110), qui, dès que V_3 est identiquement nul, devient un invariant; c'est ce que montre bien l'analyse du n° 4. Cela posé, on définira la forme canonique exceptionnelle par cette condition que le coefficient du second terme soit nul, comme précédemment, et que V_4 se réduise à l'unité.

A son tour, cette forme canonique exceptionnelle est impossible si à la fois V_3 et V_4 sont identiquement nuls. Si l'équation est du quatrième ordre, alors elle se ramène au second. Si elle est d'ordre supérieur au quatrième, une nouvelle forme canonique est possible, définie par la condition que le coefficient du second terme soit nul, et que V_5 soit l'unité, et ainsi de suite.

En résumé, pour une équation d'ordre q, il existe une forme canonique définie par ces conditions : le coefficient du second terme est nul, et parmi les pseudo-invariants V_3, V_4, ..., V_q, le premier de ceux qui ne sont pas identiquement nuls est réduit à l'unité. Cette forme canonique devient impossible si toutes les quantités V sont nulles. Mais alors l'équation se réduit aisément à une équation du second ordre.

8. Pour connaître les formes canoniques exceptionnelles, un des procédés les plus simples consiste dans l'emploi de l'analyse qui a servi à définir les quantités V (p. 109). Le calcul se simplifie beaucoup si l'on réduit à zéro le second terme, en prenant pour point de départ l'équation du second ordre sous la forme

$$z'' = bz.$$

Par exemple, en posant $y = z^3$, on en déduit

$$y^{\text{IV}} - 10by'' - 10b'y' + 3(3b^2 - b'')y = 0,$$

et cette équation, étant comparée à

$$y^{\text{IV}} + 6p_2 y'' + 4p_3 y' + p_4 y = 0,$$

donne

$$3p_2 = -5b, \qquad 2p_3 = -5b', \qquad p_4 = 3(3b^2 - b'').$$

Et j'en tire les relations

$$0 = v_3 = 3p_2' - 2p_3, \qquad 0 = v_4 = p_4 - \frac{3}{5}\left(2p_3' + \frac{27}{5}p_2^2\right).$$

Ce sont là les expressions à quoi se réduisent V_3, V_4 pour $p_1 = 0$. Supposons donc une équation du quatrième ordre pour laquelle V_3 soit identiquement zéro, mais non V_4. On changera de variable en posant $\frac{dx}{dX} = V_4^{\frac{1}{4}}$, et de fonction, de manière à rendre nul le coefficient p_1. Si alors on désigne par $\frac{H}{3}$ le coefficient p_2, on aura, à cause de $v_3 = 0$, $v_4 = 1$,

$$v_3 = \frac{dH}{dx} - 2p_3 = 0, \qquad v_4 = p_4 - \frac{3}{5}\left(\frac{d^2H}{dx^2} + \frac{3}{5}H^2\right) = 1.$$

Ainsi, *pour les équations du quatrième ordre dans lesquelles* V_3 *est identiquement nul, mais non* V_4, *on a la forme canonique exceptionnelle*

$$(16) \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + 2H\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dH}{dx}\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{3}{5}\frac{d^2H}{dx^2} + \frac{9}{25}H^2\right)y = 0.$$

En raisonnant comme plus haut, on verra *que* H, $\frac{dH}{dx}$ *ont leurs puissances quatrièmes rationnellement exprimables en fonction des coefficients de l'équation proposée et des dérivées de ces coefficients.*

9. Avant de m'occuper de l'emploi de ces formes canoniques dans l'étude des équations, je veux m'arrêter un instant sur le cas particulier des équations du troisième ordre, et faire entièrement le rapprochement entre ces invariants et ceux que j'ai désignés par le nom d'*invariants différentiels*.

Reprenons, pour le cas du troisième ordre, les résultats ci-dessus. Nous avons prouvé que, pour l'équation

$$(17) \qquad \frac{d^3 Y}{dX^3} + 3 P_1 \frac{d^2 Y}{dX^2} + 3 P_2 \frac{dY}{dX} + P_3 Y = 0,$$

la quantité V

$$(18) \qquad V = - P_1'' + 3(P_2' - 2 P_1 P_1') - 2(P_3 - 3 P_1 P_2 + 2 P_1^3)$$

est un invariant, et que, si V est identiquement zéro, il existe trois intégrales particulières satisfaisant à la relation

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Y_2}{Y_3}.$$

Nous pouvons plus généralement dire que trois intégrales distinctes quelconques sont liées par une relation quadratique homogène. Reprenons la notion de la *courbe attachée* à l'équation, c'est-à-dire la courbe dont l'équation en coordonnées homogènes est la relation $f(Y_1, Y_2, Y_3) = 0$, homogène et indépendante de X, qui lie trois intégrales; et concluons que, *si* V *est nul, la courbe attachée est une conique*. En d'autres termes, $V = 0$ *est l'équation différentielle des coniques*.

Pour retrouver par cette voie l'équation différentielle des coniques sous la forme d'une relation entre deux coordonnées cartésiennes ξ, η, on n'a qu'à supposer l'équation (17) transformée de telle sorte que la variable ξ soit le rapport de deux intégrales de (17), $Y_1 : Y_3$, et qu'une de ces intégrales η soit $Y_2 : Y_3$. Les trois intégrales sont alors 1, ξ, η; les coefficients P_2 et P_3 sont nuls, et l'on a

$$p_1 = -\frac{1}{3} \frac{\eta'''}{\eta''},$$

les dérivées étant prises par rapport à ξ. L'équation $V = 0$ devient alors

$$(19) \qquad 0 = V = \frac{1}{3}\left(\frac{\eta'''}{\eta''}\right)'' - \frac{2}{3} \frac{\eta'''}{\eta''}\left(\frac{\eta'''}{\eta''}\right)' + \frac{4}{27}\left(\frac{\eta'''}{\eta''}\right)^3.$$

Pour reconnaître dans cette équation celle des coniques telle que je l'ai donnée, ıut introduire la notation employée dans ma théorie des invariants différentiels. Cette notation consiste dans la convention

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n\eta}{d\xi^n}=a_n.$$

En outre, j'ai employé la lettre U pour désigner a_2, qui est un invariant différentiel. Ainsi

$$U=a_2=\frac{1}{2}\eta''.$$

En introduisant ces quantités et développant le second membre de (19), on trouve aisément

$$V=\frac{20}{U^3}(a_2^2a_5-3a_2a_3a_4+2a_3^3).$$

La quantité qui est ici entre parenthèses est précisément l'invariant différentiel que je nommais V, et que, pour éviter toute confusion, j'appelle ici V_1 ([1]). Ainsi *l'invariant* V *de l'équation du troisième ordre et l'invariant différentiel* V_1 *sont liés par la relation*

$$V=\frac{20V_1}{U^3} \tag{20}$$

Pour édifier ma théorie, j'ai introduit dès l'abord un autre invariant différentiel, dénoté par Δ, et que je désignerai ici par Δ_1, pour le comparer et l'identifier, comme on va voir, avec l'invariant Δ, numérateur de h, que j'ai défini précédemment [équation (13), p. 114]. L'invariant différentiel Δ_1, dont l'expression par les symboles a_n est assez compliquée ([2]), est caractérisé par la propriété suivante :

Si l'on désigne par y_1, y_2, y_3 trois polynomes du premier degré $(a_1\eta+b_1\xi+c_1)$, ... à coefficients a, b, c, *arbitraires*, qu'on envisage la courbe

$$y_1=y_2^\lambda y_3^{1-\lambda}, \tag{21}$$

où λ est racine de l'équation $\lambda^2-\lambda+1=0$, et qu'on cherche

([1]) Thèse *Sur les invariants différentiels*, p. 27. [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 221.]

([2]) Thèse *Sur les invariants différentiels*, p. 12. [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 206.]

l'équation différentielle de cette courbe par l'élimination des constantes a, b, c, ..., cette équation est $\Delta_1 = 0$.

Si ensuite on considère de nouveau la courbe (21), où maintenant λ est une constante quelconque donnée, et qu'on cherche encore l'équation différentielle de cette courbe dans les mêmes conditions, on obtient pour résultat

$$(22) \qquad \frac{\Delta_1^3}{V_1^8} = \frac{3^3.5^2}{2^4.7^3} \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{[(\lambda - 2)(2\lambda - 1)(\lambda + 1)]^2} \quad (^1).$$

En invoquant ce résultat, il va être bien aisé de voir que cet invariant différentiel absolu $\Delta_1^3 : \Delta_1^8$ ne diffère pas de l'invariant absolu h^3 de l'équation linéaire du troisième ordre.

Si h est une constante, l'équation canonique se réduit à

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + h\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y = 0.$$

Soient α_1, α_2, α_3 les racines de l'équation

$$\alpha^3 + h\alpha - \frac{1}{2} = 0,$$

les intégrales sont

$$y_1 = e^{\alpha_1 x}, \qquad y_2 = e^{\alpha_2 x}, \qquad y_3 = e^{\alpha_3 x},$$

liées entre elles par la relation homogène

$$y_1^{\alpha_2 - \alpha_3} y_2^{\alpha_3 - \alpha_1} y_3^{\alpha_1 - \alpha_2} = 1,$$

qui représente la courbe attachée à l'équation et coïncide avec (21 si l'on pose

$$\lambda = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}.$$

Donc déjà les équations $\Delta_1^3 : V_1^8 =$ const. et $h =$ const. coïncident. Pour achever le rapprochement, observons que, si la constante h est nulle, on a à la fois

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$
$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = 0,$$

---

(1) Thèse *Sur les invariants différentiels*, p. 30. [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 224.]

et il s'ensuit

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_2)^2}{(\alpha_2 - \alpha_3)^2}$$
$$= \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_3 - \alpha_3\alpha_1}{(\alpha_2 - \alpha_3)^2} = 0.$$

Ainsi h s'évanouit en même temps que $\Delta_1^3 : V_1^8$, et c'en est assez pour conclure à l'identité, sauf un facteur numérique, de l'invariant différentiel en question et de h^3.

J'ai calculé aisément ce facteur, et j'ai trouvé

$$h^3 = \frac{1}{3^6}\frac{\Delta^3}{V^8} = -\frac{2^2.7^3}{5^2}\frac{\Delta_1^3}{V_1^8},$$

d'où résulte, à cause de (20),

$$\Delta = -2^6.3^2.5^2.7\frac{\Delta_1}{U^8}. \tag{23}$$

Telle est la relation entre l'invariant Δ de l'équation linéaire du troisième ordre et l'invariant différentiel Δ_1.

Le rapprochement entre Δ et Δ_1 a été tiré ici, non de l'expression analytique de ces invariants, mais de leurs propriétés. Cependant j'ai donné de l'invariant différentiel Δ_1 [1] une expression déduite de considérations différentes, et que l'on transforme aisément en l'expression analytique (13), que nous avons trouvée plus haut pour Δ. Je ne m'arrête pas à ce point, et je cite encore un autre rapprochement. J'ai considéré [2] la quantité $(3V_1\Delta_1' - 8\Delta_1 V_1')$, et prouvé que c'est un invariant différentiel, divisible par U^4; je l'ai désigné par U^4T. J'ai ensuite introduit l'invariant absolu $\frac{U^4T}{V_1^4}$. Ce n'est pas autre chose que notre invariant absolu $\frac{dh}{dx}$, et l'on prouve aisément que l'on a

$$l = \frac{dh}{dx} = -\frac{7}{3.5}\frac{U^4T}{V_1^4}. \tag{24}$$

10. Le rapprochement que je viens de faire entre deux théories, différentes d'aspect, identiques au fond, n'est pas ici un pur objet de curiosité. Il permet notamment de traduire en des résultats

---

(1) *Loco citato*, p. 34. [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 228.]
(2) *Loco citato*, p. 41. [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 234.]

relatifs à l'intégration d'équations linéaires du troisième ordre les résultats obtenus au sujet des invariants différentiels. J'en donnerai tout à l'heure un exemple simple. Pour éviter de longs détails, je passerai sous silence le plus important exemple; mais je dois dire que ce sont mes résultats antérieurs au sujet des invariants différentiels des courbes du troisième degré [1] qui, me faisant connaître l'équation (45) de la page 94 du chapitre précédent, m'ont amené à trouver les curieuses propriétés dont jouissent les équations linéaires à coefficients doublement périodiques, et qui deviennent à intégrales uniformes, moyennant un changement dans l'inconnue et dans les périodes.

L'équation (45) dont je parle est, en effet, telle que *la courbe qui lui est attachée est la courbe générale du troisième degré.* Nous avons trouvé pour ses intégrales les rapports

$$\frac{y_1}{1} = \frac{y_2}{p\left(\frac{u}{3}\right)} = \frac{y_3}{p'\left(\frac{u}{3}\right)},$$

et nous en pouvons conclure

$$y_3^2 y_1 - 4y_2^3 - g_2 y_2 y_1^2 - g_3 y_1^3.$$

C'est l'équation de la courbe attachée : sauf changement des coordonnées, c'est une courbe quelconque du troisième degré.

Par la même occasion, je ferai observer que la courbe gauche attachée à l'équation (49) de la page 96 n'est autre que *la courbe biquadratique générale, intersection de deux surfaces du second degré.*

11. Je vais maintenant expliquer l'usage que j'entends faire des invariants et de la forme canonique pour l'étude des équations.

Une *classe* d'équations est définie par l'équation canonique

$$\frac{d^q y}{dx^q} + \frac{q(q-1)}{2}\frac{h}{3}\frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dx} - 1\right)\frac{d^{q-3}y}{dx^{q-3}}$$
$$+ \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4}s_4\frac{d^{q-4}y}{dx^{q-4}} + \ldots = 0,$$

(1) Thèse *Sur les invariants différentiels*, p. 52, et *Recherches sur les courbes planes du troisième degré* (*Mathematische Annalen*, t. XV, p. 371). [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 242 et p. 332.]

qu'il est permis, sauf les cas d'exception signalés précédemment, de substituer à toute autre.

On y peut envisager h, s_4, s_5, ... comme des fonctions données de la variable x. Mais cette manière de procéder serait plus propre à masquer les propriétés des équations qu'à les faire connaître. Car h, s_4, s_5, ... sont explicitement connus en fonction d'une variable initiale X, dont x est une fonction transcendante donnée par

$$x = \int V^{\frac{1}{3}}\, dX,$$

V étant encore une fonction explicite de X. Je procéderai tout autrement. Remplaçant comme précédemment $\frac{dh}{dx}$ par un symbole l, j'envisagerai h, l, s_4, ... *comme liées par* $(q-2)$ *relations données, qui caractérisent entièrement la classe d'équations linéaires d'ordre* q *dont on voudra s'occuper.*

Effectivement, h, l, s_4, s_5, ..., s_q sont au nombre de $(q-1)$ quantités. Si on les donne liées par $(q-2)$ relations, elles sont fonctions d'une seule variable. En posant alors

$$x = \int \frac{dh}{l},$$

on aura défini la variable canonique et, par suite, l'équation canonique.

Soit maintenant α une variable quelconque par laquelle, en vertu des $(q-2)$ relations données, on exprime h, l, s_4, s_5, ..., s_q. On pourra supposer ainsi

$$h = f(\alpha), \qquad l = \varphi(\alpha), \qquad s_4 = \psi(\alpha), \qquad \ldots,$$

et l'on aura ensuite

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{l}\left(\frac{dh}{d\alpha}\right).$$

Maintenant, cette dernière quantité étant aussi une fonction explicite de α, on pourra aisément prendre α pour variable et former l'équation à variable α, dont les intégrales sont celles de l'équation canonique.

Dans cet ordre d'idées, l'équation canonique n'est plus qu'une figuration d'une quelconque des équations de la classe envisagée. Je l'emploierai pour représenter sous une forme concise l'équation que

l'on obtiendrait si l'on prenait α pour variable; α sera d'ailleurs une variable quelconque, choisie, dans chaque cas, suivant la nature des relations qui ont lieu entre h, l, s_4, s_5, ...

Pour les équations du troisième ordre, on n'a que deux quantités à envisager, h, l. Donner une relation entre h, l, c'est définir une classe d'équations du troisième ordre. C'est aussi définir la courbe attachée, sauf les transformations homographiques. Ceci concorde entièrement avec le résultat que j'ai trouvé dans la théorie des invariants différentiels [1] : *toute équation différentielle invariante du huitième ordre consiste en une relation entre les deux quantités* $\frac{U^4 T}{V_1^4}$ *et* $\frac{\Delta_1^3}{V_1^8}$ (que j'ai montrées tout à l'heure coïncider avec l et h^3).

En somme, il y a identité absolue entre ces deux problèmes : *intégrer une équation différentielle linéaire du troisième ordre; intégrer une équation différentielle invariante du huitième ordre.*

De même *intégrer une équation différentielle linéaire du quatrième ordre, ou un système de deux équations invariantes du septième ordre*, c'est un seul et même problème.

12. Pour en finir avec ces rapprochements entre la théorie des équations linéaires et une autre théorie, donnons un exemple de la manière d'utiliser les résultats acquis au sujet des invariants différentiels. J'emprunte à la théorie des invariants [2] le résultat suivant :

Pour une courbe du troisième degré unicursale, les deux invariants différentiels absolus $\xi = \frac{U^4 T}{V_1^4}$ *et* $\eta = \frac{\Delta_1^3}{V_1^8}$ *sont liés par la relation*

$$(2^8 . 3^2 \eta + \xi^2 - 2 . 3^3 \xi - 3^5)^2 + 2^6 . 3 . \xi^3 = 0,$$

qui est l'équation différentielle de ces courbes. Cette relation résulte de l'élimination d'un paramètre t entre celles-ci :

$$= -3\left(\frac{t^3 - 1}{t^3 + 1}\right)^4, \qquad \eta = \frac{t^3(1 + t^3 + t^6)}{(1 + t^3)^8};$$

---

[1] Thèse *Sur les invariants différentiels*, p. 44. [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 237.]

[2] *Loco citato*, p. 44. Je change ici très légèrement la représentation de la courbe. [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 237.]

et les coordonnées homogènes d'un point de la courbe peuvent être ainsi exprimées

$$z_1 = t, \qquad z_2 = t^2, \qquad z_3 = t^3 - 1.$$

Les expressions de ξ, η ne sont pas ici sous la forme la plus simple; on le prévoit, puisque la relation entre ξ, η résultant de l'élimination de t^3 est du quatrième degré, tandis que, d'après la forme de ξ, η, elle semblerait devoir être du huitième degré. Il existe donc une autre variable donnant lieu pour ξ, η à des expressions plus simples (¹). Effectivement, si l'on pose

$$\left(\frac{t^3 - 1}{t^3 + 1}\right)^2 = \alpha,$$

on obtient

$$\xi = -3\alpha^2, \qquad \eta = \frac{(1-\alpha)(3+\alpha)^3}{2^8}.$$

Au moyen des formules (20), (23), (24), je remplace ξ, η par des invariants d'équation linéaire du troisième ordre, et je conclus :

Si l'on définit une classe d'équations linéaires du troisième ordre par les relations suivantes entre les invariants absolus h, l et un paramètre α,

$$(25) \qquad l = \frac{7}{5}\alpha^2, \qquad h^3 = \frac{7^3}{2^6 . 5^2}(\alpha - 1)(\alpha + 3)^3,$$

on a, pour la courbe attachée à cette classe, la courbe unicursale du troisième ordre.

En modifiant très légèrement la forme des relations (25), j'ai été conduit, avec ce point de départ, à considérer une classe d'équations du troisième ordre, et des classes analogues pour les ordres supérieurs qui offrent les plus grandes analogies avec l'équation de Gauss. Il en sera question dans la suite de ce mémoire. Pour le moment, j'achève l'examen de la classe définie par (25), *en cherchant les intégrales de l'équation du troisième ordre à variable α, transformée de l'équation canonique par le simple changement de la variable.*

(¹) Voyez à ce sujet un Mémoire de M. Lüroth, *Beweis eines Satzes über rationale Curven* (*Mathematische Annalen*, t. IX, p. 163).

Les intégrales sont proportionnelles à z_1, z_2, z_3, coordonnées d'un point de la courbe attachée. Il n'y a donc qu'à trouver le facteur u par lequel on doit multiplier ces coordonnées. Ce facteur doit être tel que le déterminant $(y_1, y'_2, y''_3)_x$ soit une constante, puisque l'équation canonique manque du second terme. Par cette notation $(y_1, y'_2, y''_3)_x$, que j'emploierai souvent, j'entends le déterminant dont les éléments diagonaux sont y_1, y'_2, y''_3, et l'indice x exprime la variable par rapport à laquelle les derivées sont prises.

Soient

$$y_1 = u z_1, \qquad y_2 = u z_2, \qquad y_3 = u z_3;$$

on aura

$$(y_1 y'_2 y''_3)_x = u^3 (z_1 z'_2 z''_3)_x = u^3 (z_1 z'_2 z''_3)_t \left(\frac{dt}{dx}\right)^3 = \text{const.}$$

Ainsi

$$u = c\,\frac{dx}{dt}(z_1 z'_2 z''_3)_t^{-\frac{1}{3}}.$$

L'intégration, comme on le voit, n'exige que des opérations algébriques. Les voici :

$$(z_1 z'_2 z''_3)_t = 2(t^3 - 1),$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\alpha} &= \frac{h'}{l} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{3}\,\frac{1}{\alpha(\alpha-1)^{\frac{2}{3}}} \\ \frac{d\alpha}{dt} &= 12\,\frac{t^2(t^3-1)}{(t^3+1)^3} \end{aligned}\right| \quad \frac{dx}{dt} = 4.5^{\frac{1}{3}}\,\frac{t^2(t^3-1)}{(t^3+1)^3}\,\frac{1}{(\alpha-1)^{\frac{2}{3}}} = (20)^{\frac{1}{3}}\,\frac{t^3-1}{(t^3+1)^{\frac{5}{3}}}\,\frac{1}{\alpha},$$

$$u = \mathrm{C}\,\frac{1}{(t^3-1)\alpha^{\frac{1}{6}}}.$$

En conséquence, l'intégrale de l'équation canonique définie par les relations (25) *est*

$$y = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{6}}(t^3-1)}\left[c(t^3-1) + c't + c''t^2\right],$$

quand on a posé

$$\alpha = \left(\frac{t^3-1}{t^3+1}\right)^2.$$

13. Au moyen des invariants, nous sommes en mesure de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que, dans une classe, existent des équations possédant des propriétés données. Par exemple, il est manifeste que nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Proposition XXI. — *Étant donnée une équation linéaire*

d'ordre supérieur à 3, pour qu'il existe une substitution

$$\frac{dx}{dX} = \mu(X), \qquad Y = y\,u(X)$$

qui la transforme en une équation à coefficients constants, il faut et il suffit que ses invariants absolus soient tous constants.

Comme il ne sera plus question de pareils cas dans tout le cours de ce mémoire, je donne ici un exemple assez curieux.

Soit l'équation

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \lambda y,$$

où λ est fonction de x. On demande quelle forme doit avoir λ pour que cette équation puisse être transformée en une équation à coefficients constants.

Pour répondre à cette question, il suffit de calculer l'invariant h et de le supposer constant, ce qui donne

$$\frac{7\lambda'^2 - 6\lambda\lambda''}{\lambda^{\frac{8}{3}}} = 2^{\frac{2}{3}} 9h.$$

Il n'y a plus qu'à intégrer cette équation en envisageant h comme une constante donnée. L'intégration est très facile et conduit au résultat suivant :

$$\lambda = \frac{A}{(x-\alpha)^3(x-\beta)^3},$$

où A, α, β sont des constantes assujetties à la relation

$$(\alpha - \beta)^6 + 4A^3h^3 = 0.$$

Ainsi l'équation

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{A}{(x-\alpha)^3(x-\beta)^3}\,y$$

est intégrable. Dans le *Journal de M. Liouville* (1re série, t. IX, p. 336), on trouve énoncé, sous le nom de M. Besge, le même résultat relativement à l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{A}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}\,y.$$

Ce rapprochement m'a conduit à reconnaître que plus généralement

l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{A}{(x-\alpha)^n (x-\beta)^n} y$$

est intégrable, et est une transformée d'équations à coefficients constants (¹).

Bien que ce soit ici étranger au sujet, je demande la permission d'en fournir la preuve.

Je considère la fonction

$$z = (x-\alpha)^\mu (x-\beta)^\nu,$$

dont la dérivée logarithmique est

$$\frac{z'}{z} = \frac{(\mu+\nu)x - \mu\beta - \nu\alpha}{(x-\alpha)(x-\beta)}.$$

Il est visible qu'on a généralement

$$\frac{z^{(n)}}{z} = \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^n (x-\beta)^n},$$

$\varphi(x)$ étant un polynome entier. Développons z suivant les puissances décroissantes de x; le développement aura la forme

$$z = x^{\mu+\nu} + B_1 x^{\mu+\nu-1} + B_2 x^{\mu+\nu-2} + \ldots.$$

Supposons maintenant $\mu+\nu = n-1$, et prenons la dérivée d'ordre n; son développement sera

$$z^{(n)} = (-1)^n 1.2\ldots n \frac{B_n}{x^{n+1}} + \ldots.$$

Par suite,

$$\frac{z^{(n)}}{z} = (-1)^n 1.2\ldots n B_n \frac{1}{x^{2n}} + \ldots.$$

Donc, *sous la condition* $\mu+\nu = n-1$, *le polynome entier* $\varphi(x)$ *se réduit à la simple constante* $(-1)^n 1.2.3\ldots n B_n$; z est donc une intégrale de l'équation ci-dessus, pourvu que les constantes μ, ν soient calculées de telle sorte qu'on ait

$$(-1)^n 1.2.3\ldots n B_n = A, \qquad \mu+\nu = n-1.$$

(¹) J'ai, depuis que ce mémoire a été écrit, généralisé ce résultat (*Comptes rendus*, t. XCII, p. 779). [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 467.]

Or il est aisé de calculer B_n, ou plutôt de trouver d'une autre manière la relation entre les constantes μ, ν, α, β et la constante donnée A. A cet effet, je décompose $\frac{z^{(n)}}{z}$ en fractions simples, et je cherche seulement une de ces fractions simples, celle dont le dénominateur est $(x-\alpha)^n$. Il est aisé de prouver que cette fraction est

$$\frac{z^{(n)}}{z} = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{(x-\alpha)^n} + \ldots$$

D'autre part, la fraction analogue dans le second membre

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n(x-\beta)^n}$$

est

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n(x-\beta)^n} = \frac{A}{(\alpha-\beta)^n}\,\frac{1}{(x-\alpha)^n} + \ldots$$

La relation cherchée est donc

$$\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1) = \frac{A}{(\alpha-\beta)^n}.$$

Par suite, *l'intégrale générale se compose des n intégrales particulières*

$$y = (x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{n-\mu-1}$$

obtenues en prenant successivement pour μ les diverses racines de cette dernière équation.

En écrivant y ainsi :

$$y = (x-\beta)^{n-1}\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{\mu},$$

on peut se convaincre aisément que, si l'on prenait pour fonction inconnue $\frac{y}{(x-\beta)^{n-1}}$, et pour variable $\log\frac{x-\alpha}{x-\beta}$, la transformée serait à coefficients constants.

14. Au moyen des invariants, je vais maintenant chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que, dans une classe donnée, existent des équations offrant diverses propriétés données.

Tout d'abord, résolvons ce problème : *Étant donnée une équation différentielle linéaire à variable* X, *à inconnue* Y, *et d'ordre supérieur au second, trouver les conditions nécessaires et suffi-*

santes pour qu'il existe un changement de la variable et de la fonction $\frac{dx}{dX} = \mu(X)$, $Y = yu(X)$ *tel que l'équation transformée ait pour coefficients des fonctions algébriques de la variable nouvelle* x.

La solution est celle-ci : *Il faut et il suffit que les relations entre les invariants absolus de l'équation soient algébriques.*

1° La condition est nécessaire. Car, si l'on a une transformée algébrique, les invariants seront des fonctions algébriques de la variable correspondante, et, par suite, ils seront liés entre eux par des relations algébriques.

2° Elle est suffisante. Car, si h, l, s_4, s_5, ... sont exprimés en fonction algébrique d'une variable α, alors en posant

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{l}\frac{dh}{d\alpha},$$

et passant de l'équation canonique à celle qui a pour variable α, on aura une équation à coefficients algébriques.

La démonstration se fait de même pour le cas des formes canoniques exceptionnelles.

15. Nous aurons une proposition plus précise en envisageant le *genre* des relations algébriques qui lient les invariants entre eux. On sait que la définition du *genre* d'un ensemble de $(m-1)$ relations algébriques entre m variables est la suivante. Soit $f(\alpha, \beta) = 0$ la relation algébrique entre deux variables auxiliaires, choisies de telle sorte que les m variables données s'expriment rationnellement en fonction de α, β, et que $f(\alpha, \beta) = 0$ soit du plus petit *genre* possible. Soit p ce genre; c'est aussi celui des $(m-1)$ relations données.

Si l'on envisage n fonctions d'une même variable α, on appelle aussi *genre* de cet ensemble de n fonctions le genre minimum d'une relation algébrique $f(\alpha, \beta) = 0$ choisie de telle sorte que les n fonctions données s'expriment rationnellement en α, β.

Dans une équation différentielle linéaire d'ordre q, envisageons l'ensemble des coefficients, au nombre de q, et qui sont des fonctions d'une même variable, la variable indépendante. S'il s'agit de fonctions algébriques, cet ensemble de fonctions a un *genre*, qui vient d'être

défini, et que je prendrai pour le *genre de l'équation différentielle* elle-même.

Ainsi une équation linéaire du genre zéro sera une équation à coefficients rationnels par rapport à la variable indépendante; une équation linéaire du genre 1 aura ses coefficients rationnellement exprimés en fonction de la variable et de la racine carrée d'un polynome entier du quatrième degré par rapport à cette variable.

Cette définition posée, on peut demander : *Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation linéaire donnée soit transformable, par des substitutions de la forme*

$$\frac{dx}{dX} = \mu(X), \qquad Y = y u(X),$$

en une équation du genre p?

Voici la réponse : *Il faut et il suffit que les* $(q-2)$ *relations par lesquelles sont liés les* $(q-1)$ *invariants absolus*

$$(26) \qquad h^3, \quad l, \quad hs_4, \quad h^2 s_5, \quad s_6, \quad hs_7, \quad h^2 s_8, \quad s_9, \quad hs_{10}, \quad \ldots$$

soient algébriques et du genre p.

C'est ce que je vais prouver. J'ai démontré au n° 6 (p. 114) que l'invariant s_m a la forme

$$S_m = \frac{1}{\sqrt{\frac{4m}{3}}} t_m,$$

où t_m est une fonction rationnelle des coefficients de l'équation proposée et des dérivées de ces coefficients, et ceci s'applique à h et à l, si on les considère comme étant s_2 et s_3, en sorte que l est rationnelle, et h l'est aussi, sauf le facteur $\frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}}}$. De là résulte que les quantités (26) sont toutes rationnelles par rapport aux coefficients de l'équation et aux dérivées de ces coefficients.

Si donc on prend une équation linéaire à coefficients algébriques par rapport à la variable indépendante, et du genre p, les quantités (26) sont, par rapport à cette même variable, algébriques et du genre p, *au plus*. Elles sont donc liées entre elles par des relations dont l'ensemble est au plus du genre p. Ainsi une condition *nécessaire* pour la transformation demandée, c'est que les invariants (26)

soient liés par des relations algébriques dont le genre p' doit être au plus égal à p; $p' \leq p$. Prenons maintenant la question en ordre inverse, et supposons donné entre les quantités (26) un ensemble de $(q-2)$ relations du genre p'. Par ces relations, nous définissons une classe d'équations d'ordre q. Une de ces équations est l'équation canonique

$$\frac{d^q y}{dx^q} + \frac{q(q-1)}{1.2} \frac{h}{3} \frac{d^{q-2} y}{dx^{q-2}} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3} \frac{1}{2}(l-1) \frac{d^{q-3} y}{dx^{q-3}} + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4} s_4 \frac{d^{q-4} y}{dx^{q-4}} + \ldots + s_q y = 0,$$

où la variable canonique x est définie par $dx = \frac{dh}{l}$.

Suivant l'hypothèse, on peut trouver une variable α telle que les quantités (26) soient simultanément des fonctions de α algébriques et du genre p'.

Transformons l'équation canonique en prenant pour nouvelle variable α et sans changer y. Dénotons par des accents les dérivées prises par rapport à α, et servons-nous de la formule générale de transformation (6) [p. 105], en y envisageant $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m, \ldots, p_q$ comme étant $0, \frac{h}{3}, \frac{1}{2}(l-1), s_m, \ldots, s_q$ et $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_q$ comme les coefficients de la transformée en α, coefficients que nous cherchons. Nous aurons ces derniers en résolvant par rapport aux lettres P la suite des équations telles que (6).

Nous ne changeons pas y; les coefficients R de la formule (6) se réduisent aux coefficients M. La fonction de transformation μ est ici

$$\frac{dx}{d\alpha} = \mu = \frac{h'}{l}.$$

De là résulte

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{h''}{h'} - \frac{l'}{l} = -\frac{2}{3} \frac{(h^3)'}{h^3} + \frac{(h^3)''}{(h^3)'} - \frac{l'}{l}.$$

Ainsi $\frac{\mu'}{\mu}$ et, par suite, $\frac{\mu''}{\mu}, \frac{\mu'''}{\mu}, \ldots$ sont des fonctions de la variable α dans lesquelles aucune irrationnalité nouvelle ne s'introduit. Elles sont donc *au plus* du genre p'. Donc dans la formule (6) tous les coefficients R sont des fonctions de α au plus du genre p'. Chassant le dénominateur μ^m, et le remplaçant par son expression, je déduis

de (6)

$$P_m + \frac{m}{1} R_{1,m} P_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} R_{2,m} P_{m-2} + \ldots = \left[\frac{1}{3}\frac{(h^3)'}{lh^3}\right]^m h^m s_m.$$

J'ai mis, comme il convient, s_m au lieu de p_m. Pour $m = 2$, il faut mettre $\frac{h}{3}$ au lieu de s_2; et, pour $m = 3$, $\frac{1}{2}(l - 1)$ au lieu de s_3.

Dans cette formule, il n'entre aucune irrationnalité nouvelle. L'ensemble des formules analogues depuis $m = 1$ jusqu'à $m = q$ donne donc pour les coefficients $P_1, P_2, \ldots, P_q$ des fonctions de α qui, prises simultanément, sont *au plus* du genre p'.

Ainsi, quand les invariants (26) sont liés par des relations du genre p', la classe ainsi définie comprend une équation à coefficients algébriques du genre $p \leqq p'$.

Nous avons démontré précédemment l'inégalité inverse $p' \leqq p$. Nous pouvons donc conclure $p = p'$. La proposition est ainsi prouvée.

16. Me voici maintenant en mesure, grâce à ces derniers résultats et aux propositions des chapitres I et II, de répondre aux questions qui font l'objet principal de ce mémoire. Voici la première :

Étant donnée une équation linéaire, trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que, par une substitution

$$\frac{dx}{dX} = \mu(X), \qquad Y = yu(X),$$

on puisse transformer cette équation en une autre dont l'intégrale générale soit une fonction rationnelle de la nouvelle variable x.

Tout d'abord, la transformée, si elle existe, sera à coefficients rationnels, elle sera donc du *genre zéro*. D'après la dernière proposition, il est donc nécessaire que les relations entre les invariants (26) soient du genre zéro, c'est-à-dire que ces invariants soient rationnellement exprimables en fonction d'une seule et même variable α.

Soient donc ainsi

$$h^3 = f(\alpha), \qquad l = \varphi(\alpha), \qquad hs_4 = \psi(\alpha), \qquad h^2 s_5 = \theta(\alpha), \qquad \ldots,$$

les fonctions $f, \varphi, \psi, \theta, \ldots$ étant rationnelles. La variable α n'est

pas entièrement définie. Car, si l'on a trouvé une telle variable α, on peut en prendre une autre η en posant $\alpha = F(\eta)$, F étant une fonction rationnelle; les quantités précédentes seront encore des fonctions rationnelles de η. Il importe de préciser α, en disant que α *est choisie de telle sorte qu'à un système de valeurs des fonctions* f, φ, ψ, θ, ... *ne corresponde qu'une seule valeur de* α. Ce choix est toujours possible, ainsi que l'a prouvé M. Lüroth dans un mémoire que j'ai déjà cité. Une telle variable α est caractérisée en un mot quand on dit qu'elle correspond *uniformément* à f, φ, ψ, θ, ... Il demeure entendu que α n'est pas encore entièrement déterminée, mais la seule substitution qu'on puisse opérer sur α sans troubler l'uniformité de la correspondance consiste à remplacer α par $\frac{m\alpha + n}{m'\alpha + n'}$. Cette substitution permet d'attribuer à α des valeurs à volonté pour trois systèmes de valeurs des fonctions f, φ, ψ, θ, ...

Les intégrales transformées y doivent être des fonctions rationnelles d'une variable x, qui peut différer de α. Mais les invariants h^3, l, hs_4, ... doivent s'exprimer rationnellement en fonction de x. Donc il faut que la variable α soit fonction rationnelle de x. Faisons maintenant disparaître la fonction arbitraire de transformation $u(X)$ en prenant les rapports des intégrales, et nous avons déjà ce premier résultat, qui est entièrement débarrassé de toute inconnue :

Il faut que les rapports des intégrales et la variable α *soient rationnellement exprimables en fonction d'une même variable.*

Soit x cette variable, en sorte qu'on ait $\alpha = F(x)$, F étant une fonction rationnelle, dont je désigne par M le degré des termes. Pour chaque valeur de α, il y a M racines x.

Prenons α pour variable, et transformons l'équation canonique. D'après l'analyse du numéro précédent, la transformée est à coefficients rationnels. Je raisonne maintenant sur cette transformée (A).

Je suppose qu'effectivement les rapports des intégrales soient des fonctions rationnelles de x; ainsi à chaque valeur de α correspondent M valeurs différentes pour un de ces rapports, que je désigne par ζ et qui est entièrement défini, si je l'ai astreint à un certain nombre de conditions initiales.

Étudions les points singuliers de l'équation (A), et retenons seulement ceux qui sont critiques pour les rapports des intégrales. Soit $\alpha = a$ un de ces points. Il sera algébrique d'après les hypo-

thèses. Soient

$$s,\quad s+\frac{b}{m},\quad s+\frac{b'}{m},\quad s+\frac{b''}{m},\quad \ldots$$

les exposants auxquels les intégrales appartiennent relativement à $(x-a)$. Les lettres m, b, b', b'', ... désignent des entiers positifs. Les entiers b, b', ... sont tous différents, et n'ont ensemble, avec m, d'autre commun diviseur que l'unité. Dans ces conditions, m est l'ordre du point critique a, pour les rapports des intégrales, et nous supposons essentiellement $m > 1$, sans quoi le point ne serait pas critique.

Pour une valeur non critique de x, les M valeurs de ζ s'obtiennent par une formule telle que

$$\zeta = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \ldots}{B_1 y_1 + B_2 y_2 + B_3 y_3 + \ldots},$$

ou plutôt par M formules analogues où les coefficients A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ... ont M systèmes de valeurs différentes entièrement déterminées par les conditions initiales qui définissent ζ.

Mais pour la valeur critique $x = a$, ou plutôt pour une valeur de x voisine de a, une fonction ainsi composée avec les intégrales y_1, y_2, y_3, ... est susceptible de m déterminations distinctes. Donc nécessairement pour $x = a$ les M valeurs de ζ se répartissent en $\frac{M}{m}$ cycles, dont chacun contient m de ces valeurs.

On voit donc que ζ est une fonction de x satisfaisant entièrement aux conditions relatées dans l'énoncé de la proposition VIII (p. 29). Donc on peut appliquer les conclusions contenues dans cette proposition. Si l'on tient compte de la proposition VII (p. 28), on a la réponse complète à la question posée.

Proposition XXII. — *Pour qu'il existe une substitution*

$$\frac{dx}{dX} = \mu(X), \qquad Y = yu(X),$$

transformant une équation linéaire (d'ordre égal ou supérieur à trois), *à variable* X *et à inconnue* Y, *en une autre, à variable x et à inconnue y, dont l'intégrale générale soit une fonction rationnelle de x, les conditions nécessaires et suffisantes sont les suivantes :*

1° *Les relations entre les invariants* h^3, l, hs_4, $h^2 s_5$; ... *doivent être du genre zéro. Soit alors* α *une variable en fonction de laquelle ces quantités s'expriment rationnellement, et qui leur corresponde uniformément.*

2° *Les rapports des intégrales, considérés comme fonctions de* α; *doivent ne posséder que des points critiques algébriques, au nombre de deux au plus, et alors quelconques; ou au nombre de trois, et alors les ordres* m, n, p *de ces points critiques doivent satisfaire à la condition* $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}>1$.

Comme on le voit, il n'intervient dans cet énoncé que des éléments dont la recherche ne dépend absolument que d'opérations algébriques.

17. Voici maintenant la seconde question :

Étant donnée une équation linéaire d'ordre égal ou supérieur à trois, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que, par une substitution de la forme $\frac{dx}{dX}=\mu(X)$, $Y=yu(X)$, *on puisse transformer cette équation en une autre dont les coefficients soient des fonctions doublement périodiques* (aux mêmes périodes) *et uniformes de la variable nouvelle* x, *et que l'intégrale générale* y *soit une fonction uniforme de* x?

En raisonnant comme tout à l'heure, et tenant compte de ce fait que *plusieurs fonctions uniformes d'une variable doublement périodiques et aux mêmes périodes sont liées entre elles par des relations algébriques du genre zéro ou du genre* 1, on conclut immédiatement à la *nécessité* de la condition suivante : *Les invariants* h_3, l, hs_4, ... *doivent être liés entre eux par des relations algébriques du genre zéro ou du genre un.* Deux cas sont donc à distinguer, et je suppose d'abord :

Premier cas : Les invariants h_3, l, hs_4, ... *sont liés par des relations du genre un.* La discussion est ici très simple. Les invariants peuvent être exprimés par des fonctions uniformes et doublement périodiques, aux mêmes périodes, d'une variable x. Cette variable peut être changée, mais uniquement par les substitutions qui consistent à remplacer x par $mx+n$. On connaît donc la variable indé-

pendante dont l'intégrale générale y doit être une fonction uniforme; la fonction inconnue $u(X)$ peut être éliminée par la considération des rapports des intégrales. La condition *nécessaire* est donc que les rapports des intégrales soient des fonctions uniformes de x, ou, en d'autres termes, n'aient aucun point critique, l'infini non compris. D'autre part, on a déjà vu (proposition XVI, p. 55) que cette condition est suffisante. Le problème est donc résolu pour ce cas.

Deuxième cas : Les invariants h^3, l, hs_4, ... sont liés par des relations du genre zéro. Considérons, comme précédemment, la variable α en fonction de laquelle h^3, l, hs_4, ... s'expriment rationnellement, et de telle sorte que la correspondance soit uniforme. Nous supposons une équation appartenant à la même classe que la proposée, et ayant ses coefficients doublement périodiques par rapport à la variable correspondante x. Alors h^3, l, hs_4, ... sont des fonctions uniformes et doublement périodiques de x; donc α est aussi une telle fonction.

On a donc $\alpha = F(x)$, et F est une fonction uniforme et doublement périodique de x.

Considérons, comme précédemment, l'équation (A), transformée de l'équation canonique par le choix de la variable α, et envisageons encore le rapport ζ de deux intégrales. Si, comme on le suppose, ζ est une fonction uniforme de x, ζ peut avoir une infinité de déterminations pour chaque valeur de α. Mais si $\alpha = a$ est un point critique, algébrique et d'ordre m, pour les rapports des intégrales, les valeurs de ζ pour $\alpha = a$ se répartissent en cycles dont chacun contient m de ces valeurs. Il ne saurait d'ailleurs exister de points critiques non algébriques; car x, envisagée comme fonction de α, n'a que des points critiques algébriques, et ζ est une fonction uniforme de x. Donc, s'il existe une telle variable x dont α soit fonction uniforme et doublement périodique, et le rapport ζ de deux intégrales quelconques fonction uniforme, cette quantité ζ, envisagée comme fonction de α, est dans les conditions requises par l'énoncé de la proposition XIV (p. 53). Donc enfin voici la réponse complète à la question posée :

Proposition XXIII. — *Pour qu'il existe une substitution*

$$\frac{dx}{dX} = \mu(X), \qquad Y = y\,u(X),$$

transformant une équation linéaire (d'ordre égal ou supérieur à trois), *à variable* X *et à inconnue* Y, *en une autre, à variable x et à inconnue y, dont les coefficients soient uniformes et doublement périodiques, aux mêmes périodes, par rapport à x, et dont l'intégrale générale soit une fonction uniforme de x, les conditions nécessaires et suffisantes sont les suivantes* (si toutefois l'équation n'est pas transformable en une équation à coefficients rationnels, ce qu'enseigne l'application de la proposition XXII) :

1° *Les relations entre les invariants h^3, l, hs_4, h^2s_5, ... doivent être du genre zéro ou du genre un.*

2° *Si ces relations sont du genre un, alors h^3, l, hs_4, ... peuvent s'exprimer par des fonctions uniformes et doublement périodiques* (aux mêmes périodes) *d'une variable x. Alors il faut et il suffit que les rapports des intégrales, envisagés comme fonctions de x, n'aient aucun point critique, l'infini non compris.*

3° *Si ces relations sont du genre zéro; soit alors α une variable en fonction de laquelle h^3, l, hs_4, ... s'expriment rationnellement, et qui leur corresponde uniformément. Il faut et il suffit que les rapports des intégrales, considérés comme des fonctions de α, n'aient que des points critiques algébriques* (l'infini compris), *que ces points critiques soient au nombre de trois ou de quatre; s'il y en a trois, leurs ordres m, n, p doivent satisfaire à la relation $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1$; s'il y en a quatre, ils doivent être tous du second ordre.* (S'il y en a trois et que $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}>1$, ou s'il y en a moins de trois, on est dans le cas de la proposition précédente.)

Ici encore la question est pleinement résolue au moyen d'éléments dont la recherche tient uniquement à des opérations purement algébriques.

18. Aux énoncés XXII et XXIII il convient d'ajouter que : *si l'équation proposée est dans un des cas où la forme canonique générale ne s'applique pas, on a des propositions analogues dans lesquelles, au lieu de h^3, l, hs_4, ..., il faut envisager les coefficients de la forme canonique exceptionnelle, qui trouve alors son emploi.*

Si enfin tous les invariants sont nuls, l'équation peut se transformer en une équation du second ordre.

Ayant ainsi résolu les questions que j'avais posées dans toute leur généralité, j'ai maintenant à faire des applications. Avant d'y procéder, j'ai encore quelques observations générales à présenter, portant sur le détail des recherches. J'ai d'abord quelques mots à dire au sujet de l'équation adjointe, et ensuite à parler de l'étude des points critiques, telle qu'on doit la faire au moyen des invariants.

19. Supposons une équation linéaire d'ordre q qui puisse être mise sous la forme canonique générale

$$\frac{d^q y}{dx^q} + \frac{q(q-1)}{1.2}\frac{h}{3}\frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\frac{1}{2}(l-1)\frac{d^{q-3}y}{dx^{q-3}} + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4}s_4\frac{d^{q-4}y}{dx^{q-4}} + \ldots = 0,$$

dans laquelle

$$l = \frac{dh}{dx}.$$

Cette équation canonique a pour adjointe

$$\frac{d^q z}{dx^q} + \frac{q(q-1)}{1.2}\frac{h}{3}\frac{d^{q-2}z}{dx^{q-2}} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\frac{1}{2}(l+1)\frac{d^{q-3}z}{dx^{q-3}} + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4}s_4\frac{d^{q-4}z}{dx^{q-4}} + \ldots = 0.$$

Cette dernière n'a pas la forme canonique, mais un très petit changement la lui fait acquérir. Faisons, en effet,

$$x_1 = -x, \qquad l_1 = -l,$$

et l'équation devient

$$\frac{d^q z}{dx_1^q} + \frac{q(q-1)}{1.2}\frac{h}{3}\frac{d^{q-2}z}{dx_1^{q-2}} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\frac{1}{2}(l_1-1)\frac{d^{q-3}z}{dx_1^{q-3}} + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4}s_4\frac{d^{q-4}z}{dx_1^{q-4}} + \ldots = 0.$$

La relation $\frac{dx}{dh} = l$ devient d'ailleurs $\frac{dx_1}{dh} = l_1$. L'équation est donc bien sous forme canonique.

A partir de s_5, les coefficients de l'adjointe ne reproduisent plus ceux de la proposée. Mais, *pour le troisième et le quatrième ordre*,

on a ce résultat très simple : *Si dans les relations entre* h, l, s_4 *on change le signe de* l, *on définit une classe d'équations qui sont les adjointes des équations contenues dans la classe proposée.*

Pour le troisième ordre, notamment, ce résultat est entièrement concordant avec celui-ci, qui appartient à la théorie des invariants différentiels : *Dans une équation différentielle invariante du huitième ordre, il suffit de changer le signe de* T *pour obtenir l'équation corrélative* [1].

Il y a des cas particulièrement remarquables où les deux classes adjointes coïncident; c'est ce qui a lieu si les relations entre h, l, s_4 ne changent pas par le changement de l en $-l$. Comme exemple curieux, je citerai l'équation du troisième ordre définie par la relation

$$h^3 = A\, l^2 + B,$$

où A, B sont des constantes données. J'étudierai bientôt cet exemple, et je montrerai que l'intégration peut s'effectuer par les fonctions elliptiques toutes les fois que A a la forme $\frac{1-n^2}{4}$, n étant un nombre entier, et B étant d'ailleurs quelconque.

Des propriétés analogues ont lieu pour les équations qui ne sont pas susceptibles de la forme canonique générale, mais d'une forme canonique exceptionnelle. Prenons, par exemple, la forme canonique exceptionnelle des équations du quatrième ordre (p. 116) :

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 2\,\mathrm{H}\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{d\mathrm{H}}{dx}\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{3}{5}\frac{d^2\mathrm{H}}{dx^2} + \frac{9}{25}\mathrm{H}^2\right)y = 0.$$

L'adjointe est

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 2\frac{d^2}{dx^2}(\mathrm{H}y) - 2\frac{d}{dx}\left(y\frac{d\mathrm{H}}{dx}\right) + \left(1 + \frac{3}{5}\frac{d^2\mathrm{H}}{dx^2} + \frac{9}{25}\mathrm{H}^2\right)y = 0.$$

Mais on a

$$\frac{d^2}{dx^2}(\mathrm{H}y) - \frac{d}{dx}\left(y\frac{d\mathrm{H}}{dx}\right) = \mathrm{H}\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d\mathrm{H}}{dx}\frac{dy}{dx}.$$

D'où l'on voit que, dans le cas de la forme canonique exceptionnelle, chaque équation du quatrième ordre appartient à la même classe que son adjointe.

---

(1) *Thèse*, p. 57. [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 250.]

20. Au moyen d'une équation canonique, on peut étudier les points critiques par le seul examen des invariants. Il n'est besoin pour cela d'aucun principe nouveau. Je veux seulement mettre ici en évidence quelques résultats généraux, dont l'usage se reproduira plusieurs fois dans les applications qui suivront.

Je suppose qu'il s'agisse d'une équation linéaire telle que les rapports des intégrales, envisagés comme fonctions d'une certaine variable α, *n'aient que des points critiques algébriques, et que les invariants absolus* h^3, l, hs_4, ... *soient des fonctions uniformes de* α.

On a vu (p. 131) que la transformée de l'équation canonique, transformée obtenue en prenant α pour variable, a pour coefficients des fonctions uniformes de α. Soit

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^q y}{d\alpha^q} + q\,\mathrm{P}_1 \frac{d^{q-1} y}{d\alpha^{q-1}} + \frac{q(q-1)}{1.2}\mathrm{P}_2 \frac{d^{q-2} y}{d\alpha^{q-2}} + \ldots + \mathrm{P}_q y = 0$$

cette équation. Suivant l'hypothèse que les rapports des intégrales, considérés comme des fonctions de α, n'ont que des points critiques algébriques, *pour chaque point singulier de* (A) *les intégrales appartiennent toutes à des exposants commensurables.* Effectivement, leurs rapports appartiennent à des exposants commensurables, en sorte qu'on peut écrire pour ces intégrales

$$y_1 = u z_1, \qquad y_2 = u z_2, \qquad y_3 = u z_3, \qquad \ldots,$$

$z_1, z_2, z_3, \ldots$ étant des fonctions de α appartenant à des exposants commensurables. D'ailleurs $y_1, y_2, \ldots$ sont les intégrales de l'équation canonique, qui est privée du second terme. On a donc

$$(y_1 y'_2 y''_3 \ldots y_q^{(q-1)})_x = \text{const.}$$

Par suite,

$$u^q (z_1 z'_2 z''_3 \ldots z_q^{(q-1)})_\alpha \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^{\frac{q(q-1)}{2}} = \text{const.}$$

D'autre part, on a

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{1}{l}\frac{dh}{d\alpha}.$$

Il résulte donc des hypothèses que le facteur u appartient à un exposant commensurable. Il en est donc de même des intégrales y.

En conséquence, si $\alpha = a$ est un point singulier de l'équation (A), *nécessairement* (p. 32) chaque coefficient P_m est, pour $\alpha = a$, infini *au plus* de l'ordre m, égal à son indice, ou, en d'autres termes, appartient à un exposant égal ou supérieur à $-m$ relativement à $(\alpha - a)$. Par suite aussi, $\frac{d^n P_m}{d\alpha^n}$ appartient à un exposant égal ou supérieur à $(n+m)$. Ce nombre $(n+m)$ est celui que, dans la composition des invariants, on doit envisager comme le *poids* de $\frac{d^n P_m}{d\alpha^n}$, et l'on a vu (p. 107) que tout invariant est homogène quant au poids.

Donc, dans l'hypothèse où nous sommes placés, c'est-à-dire *si les rapports des intégrales envisagés comme des fonctions de* α *n'ont que des points critiques algébriques, chaque invariant entier et de poids* m *appartient à un exposant égal ou supérieur à* $-m$, *en chacun de ces points critiques.*

Ainsi, l'invariant V appartient au moins à l'exposant -3; le numérateur Δ de h appartient au moins à l'exposant -8; etc.

21. Supposons que, relativement à $(\alpha - a)$, V appartienne effectivement à l'exposant -3. Il résulte immédiatement de ces hypothèses que chacun des invariants absolus qui sont les coefficients de l'équation canonique a, pour $\alpha = a$, une limite finie ou nulle. Car un quelconque de ces invariants absolus a la forme (p. 114)

$$s_m = \frac{t_m}{V^{\frac{4m}{3}}},$$

dans laquelle t_m est un invariant entier du poids $4m$, appartenant donc *au moins* à l'exposant $-4m$, tandis que le dénominateur appartient à l'exposant $-4m$. Donc s_m appartient *au moins* à l'exposant zéro. Ceci s'applique à l'invariant h envisagé comme étant s_2. Quant à l, qui est la dérivée de h par rapport à la variable canonique x, il a pour limite zéro. Car on a

$$\frac{dx}{d\alpha} = V^{\frac{1}{3}}, \qquad l = \frac{dh}{dx} = \frac{dh}{d\alpha}\,\frac{1}{V^{\frac{1}{3}}},$$

et le facteur $\frac{1}{V^{\frac{1}{3}}}$ appartient à l'exposant $+1$, tandis que $\frac{dh}{d\alpha}$ appartient à un exposant nul ou positif.

Désignons par H, S_4, S_5, ... les limites de h, s_4, s_5, ... pour $\alpha = a$, limites qui sont finies ou nulles. Avec ces quantités, il est aisé d'obtenir l'équation déterminante relative au point singulier $\alpha = a$, pour l'équation (A).

Soit, conformément à l'hypothèse,

$$V = \frac{\mu^3}{(\alpha - a)^3}\varphi,$$

φ étant un développement suivant les puissances croissantes et entières de $(\alpha - a)$, et commençant par l'unité

$$\varphi = 1 + A_1(\alpha - a) + A_2(\alpha - a)^2 + \ldots.$$

J'en déduis pour la variable canonique

$$\frac{dx}{d\alpha} = V^{\frac{1}{3}} = \frac{\mu}{\alpha - a}\psi,$$

ψ étant un développement analogue à φ; puis en intégrant,

$$\frac{1}{\mu}x = \log(\alpha - a) + \theta,$$

θ étant encore un développement analogue à φ. Posons

$$\xi = e^{\frac{x}{\mu}};$$

alors ξ est une variable qui a pour limite zéro avec $(\alpha - a)$, et dont le développement a encore la forme

$$\xi = (\alpha - a) + B_1(\alpha - a)^2 + B_2(\alpha - a)^3 + \ldots.$$

Supposons qu'une intégrale de l'équation (A) appartienne, relativement à $(\alpha - a)$, à l'exposant s, et soit ainsi

$$(27) \qquad y = (\alpha - a)^s[1 + M_1(\alpha - a) + M_2(\alpha - a)^2 + \ldots],$$

on pourra aussi la développer ainsi

$$(28) \qquad y = \xi^s[1 + N_1\xi + N_2\xi^2 + \ldots].$$

L'équation déterminante s'obtient (p. 32) en substituant dans (A), à la place de y, le premier terme du développement (27) et égalant à zéro le coefficient de $(\alpha - a)^{s-q}$ dans le résultat de la substitution. Si l'on transformait (A) en prenant ξ pour variable, on obtiendrait

cette même équation par la même opération faite sur cette transformée au moyen du développement (28). Or cette transformée provient de l'équation canonique à variable x, par le changement de variable $\xi = e^{\frac{x}{\mu}}$. On a

$$\frac{d^n}{dx^n}(\xi^m) = \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\frac{mx}{\mu}}\right) = \left(\frac{m}{\mu}\right)^n \xi^m.$$

L'équation canonique étant

$$\frac{d^q y}{dx^q} + \frac{q(q-1)}{1.2}\frac{h}{3}\frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\frac{1}{2}(l-1)\frac{d^{q-3}y}{dx^{q-3}} + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4}s_4\frac{d^{q-4}y}{dx^{q-4}} + \ldots = 0$$

et les coefficients h, l, s_4, ... ayant les limites H, 0, S_4, ... pour $\xi = 0$, je peux conclure que l'équation déterminante cherchée est

$$(29)\quad \left(\frac{s}{\mu}\right)^q + \frac{q(q-1)}{1.2}\frac{H}{3}\left(\frac{s}{\mu}\right)^{q-2} - \frac{1}{2}\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\left(\frac{s}{\mu}\right)^{q-3} + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4}S_4\left(\frac{s}{\mu}\right)^{q-4} + \ldots + S_q = 0.$$

Telle est l'équation déterminante relative à un point singulier en lequel l'invariant V *est infini du troisième ordre.*

L'équation (29) ne saurait avoir toutes ses racines réelles si H est nul. Donc, *si le point singulier est algébrique pour les rapports des intégrales, l'invariant absolu h a nécessairement une limite finie, différente de zéro.*

22. Supposons maintenant que, pour $\alpha = a$, V soit infini d'ordre moindre que 3, ou même fini ou nul, en sorte que V se développe ainsi

$$V = \mu^3(\alpha - a)^{-3+\lambda}[1 + A_1(\alpha - a) + A_2(\alpha - a)^2 + \ldots],$$

λ étant un nombre positif. Ce n'est pas un nombre commensurable quelconque, mais un nombre *entier*, d'après l'hypothèse que les coefficients de l'équation (A) sont des fonctions uniformes de α. Ainsi λ est un entier au moins égal à $+1$. On a maintenant

$$\frac{dx}{d\alpha} = V^{\frac{1}{3}} = \mu(\alpha - a)^{\frac{\lambda}{3}-1}[1 + B_1(\alpha - a) + B_2(\alpha - a)^2 + \ldots].$$

Et, en supposant x s'évanouissant avec $(\alpha - a)$,

$$x = \frac{3\mu}{\lambda}(\alpha - a)^{\frac{\lambda}{3}}[1 + C_1(\alpha - a) + C_2(\alpha - a)^2 + \ldots].$$

De là je tire le développement de $(\alpha - a)$ suivant les puissances entières et croissantes de $x^{\frac{3}{\lambda}}$:

$$\alpha - a = \left(\frac{\lambda}{3\mu}x\right)^{\frac{3}{\lambda}}\left(1 + K_1 x^{\frac{3}{\lambda}} + K_2 x^{\frac{6}{\lambda}} + \ldots\right).$$

En substituant ce développement dans les expressions de h, l, s_4 ... supposées données en fonctions de α, on aura les développements des coefficients de l'équation canonique suivant les puissances croissantes de x. De là je tire cette première conséquence :

Si $\lambda = 1$, et que h, l, s_4, ... ne soient pas infinis pour $\alpha = a$, le point $x = 0$ n'est pas singulier pour l'équation canonique; par conséquent, les intégrales appartiennent, relativement à x, aux exposants $0, 1, 2, 3, \ldots, q$, et relativement à $(x - a)$, aux exposants 0, $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{q}{3}$.

Si λ diffère de l'unité, on ne peut plus tirer pareille conséquence, même si h, l, s_4, ... restent finis. Car les coefficients de l'équation canonique restent finis, il est vrai, mais ne sont pas des fonctions uniformes de x, leurs développements contenant des puissances fractionnaires. Toutefois, dans des cas spéciaux, comme, par exemple, si $\lambda = 3$ et que h, $\star s_4$, s_5, $\star s_7$, s_8, $\star s_{10}$, ... restent *finis et différents de zéro*, on peut encore appliquer la conclusion précédente. C'est notamment ce qui arrive pour une valeur *arbitraire* $\alpha = a$.

Il y a cependant des conséquences à tirer de cette étude pour le cas que nous examinons en ce moment. Suivant l'hypothèse, il est nécessaire que le coefficient s_m de l'équation canonique ne soit pas infini d'ordre supérieur à m relativement à x; et ceci s'appliquant à h envisagé comme s_2, j'en conclus que, relativement à $(\alpha - a)$, h appartient au moins à l'exposant $-\frac{2\lambda}{3}$, et s_m au moins à l'exposant $-\frac{m\lambda}{3}$. Quant à l, on a

$$l = \frac{dh}{dx} = \frac{dh}{d\alpha}\frac{1}{V^{\frac{1}{3}}}.$$

Comme h appartient au moins à l'exposant $-\frac{2\lambda}{3}$, et V à l'exposant $(\lambda-3)$, l appartient au moins à l'exposant $-\frac{2\lambda}{3}-1-\frac{\lambda-3}{3}=-\lambda$, ce qui est bien la condition requise.

Si de là nous passons aux numérateurs de invariants absolus tels que s_m, nous voyons que t_m appartient au moins à l'exposant $-\frac{m\lambda}{3}+\frac{4m(\lambda-3)}{3}$ ou $m(\lambda-4)$, et le numérateur Δ de h au moins à l'exposant $2(\lambda-4)$.

Désignons par $\mathfrak{H}$ la limite de $(\alpha-a)^{\frac{2\lambda}{3}}h$, limite qui est finie ou nulle, et de même par $\mathcal{S}_m$ la limite de $(\alpha-a)^{\frac{m\lambda}{3}}s_m$, limite qui est encore finie ou nulle. La limite de $(\alpha-a)^\lambda l$ est $-\frac{2\lambda}{3}\frac{\mathfrak{H}}{\mu^8}$; si l'on introduit x au lieu de $(\alpha-a)$, on a, suivant les puissances croissantes de x,

$$h=\left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^2\frac{\mathfrak{H}}{x^2}+\ldots,$$

$$l=-2\left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^2\frac{\mathfrak{H}}{x^3}+\ldots,$$

$$s_m=\left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^m\frac{\mathcal{S}_m}{x^m}+\ldots,$$

et les coefficients $\mathfrak{H}$, $\mathcal{S}_m$, ... sont finis ou nuls. Pour avoir l'équation déterminante, raisonnons comme dans le cas précédent, en disant que, si une intégrale se développe ainsi

$$(30)\qquad y=(\alpha-a)^s[1+M_1(\alpha-a)+M_2(\alpha-a)^2+\ldots],$$

on pourra aussi la développer suivant les puissances croissantes de x. Son premier terme sera du degré

$$r=\frac{3s}{\lambda},$$

et r sera donné par l'équation

$$(31)\quad\begin{cases} r(r-1)(r-1)\ldots(r-q+1) \\ \quad+\frac{q(q-1)}{2}\frac{1}{3}\left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^2\mathfrak{H}\,r(r-1)\ldots(r-q+3) \\ \quad-\frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^2\mathfrak{H}\,r(r-1)\ldots(r-q+4) \\ \quad+\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4}\left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^4\mathcal{S}_4 r(r-1)\ldots(r-q+5)-\ldots+\left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^q\mathcal{S}_q=0; \\ \qquad s=\frac{\lambda}{3}r. \end{cases}$$

C'est ainsi qu'on obtient les exposants s auxquels les intégrales appartiennent relativement à $(\alpha - a)$, *quand pour* $\alpha = a$ V_α *est infiniment grand d'ordre* $3 - \lambda$, *moindre que* 3, *ou bien est fini ou nul* (pour $\lambda \geqq 3$).

Il y a lieu de faire quelques observations à ce sujet pour les deux cas particuliers $q = 3$, $q = 4$, sur lesquels porteront les applications ultérieures.

1° *Cas des équations du troisième ordre*, $q = 3$. — L'équation (31) devient

$$r(r-1)(r-2) + \left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^2 \mathfrak{H}(r-1) = 0;$$

et ses racines donnent pour s les valeurs suivantes :

$$s = \frac{\lambda}{3}(1-n), \qquad s = \frac{\lambda}{3}, \qquad s = \frac{\lambda}{3}(1+n), \qquad n = \sqrt{1 - \left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^2 \mathfrak{H}^2}.$$

Elles sont en progression arithmétique, ce qui peut avoir lieu dans le cas $\lambda = 0$, traité dans le numéro précédent; cette propriété se conserve si l'on change s en $s + k$, k étant arbitraire, par suite, si l'on multiplie les intégrales par une même fonction.

Ainsi, dans le cas des équations du troisième ordre, les coefficients étant des fonctions uniformes de α, si les intégrales appartiennent à des exposants qui ne soient pas en progression arithmétique, on peut affirmer que V_α est *infini d'ordre égal à* 3; si, au contraire, les exposants sont en progression arithmétique, on peut affirmer que V_α est infini d'ordre moindre que 3.

2° *Cas des équations du quatrième ordre*, $q = 4$. — Ici l'équation devient

$$r(r-1)(r-2)(r-3) + 2\left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^2 \mathfrak{H} r(r-1) - 4\left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^2 \mathfrak{H} r + \left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^4 \mathfrak{S}_4 = 0$$

ou encore

$$r(r-3)\left[(r-1)(r-2) + 2\left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^2 \mathfrak{H}\right] + \left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^4 \mathfrak{S}_4 = 0,$$

équation qui devient bicarrée si l'on pose

$$r = \frac{3}{2} + \nu$$

et se change en

$$\left(\nu^2 - \frac{9}{4}\right)\left[\nu^2 - \frac{1}{4} + 2\left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^2 \mathfrak{H}\right] + \left(\frac{3\mu}{\lambda}\right)^4 \mathfrak{S}_4 = 0,$$

en sorte que les racines de cette dernière étant $-\nu_0, -\nu_1, +\nu_1, +\nu_0$, supposées rangées dans l'ordre croissant, les racines s sont

$$s=\lambda\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu_0}{3}\right),\ \lambda\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu_1}{3}\right),\ \lambda\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu_1}{3}\right),\ \lambda\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu_0}{3}\right).$$

Si, pour chaque cas, on écrit ainsi les quatre racines

$$s,\quad s+c,\quad s+c+\gamma,\quad s+c+\gamma+c',$$

où c, γ, c' sont des nombres *positifs*, on a, dans le cas actuel :

$$c=c'=\frac{\nu_0-\nu_1}{3}.$$

Ainsi, *dans le cas où* V *n'est pas infiniment grand du troisième ordre, les deux nombres* c, c' *sont égaux. En d'autres termes, la somme de deux exposants est égale à la somme des deux autres.*

23. La discussion que je viens de faire permet, dans certains cas, de prévoir assez facilement la forme des invariants, sans calcul, pour une équation dont les intégrales sont connues et, par conséquent, de construire l'équation au moyen de ses intégrales.

J'aurai surtout à faire usage de telles considérations pour les équations qui s'intègrent par des fonctions rationnelles, et je vais immédiatement tirer de la discussion précédente quelques conséquences pour ce cas spécial.

Soient $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_q$ des polynomes entiers, et du degré d, d'une variable η. Afin d'écarter toute discussion relativement aux circonstances qui pourraient s'offrir pour η infiniment grand, je donne aux polynomes z l'origine suivante. Dans des polynomes donnés $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_q$, d'une variable η', et dont un au moins est du degré d, je substitue au lieu de η'

$$\eta'=\frac{a\eta+n}{a_1\eta+n_1},$$

a, a_1, n, n_1 étant des constantes arbitraires, qu'on peut laisser littérales. Je prends maintenant pour $z_1, z_2, \ldots, z_q$ les polynomes $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_q$ ainsi transformés et préalablement multipliés par $(a_1\eta+n_1)^d$. Relativement au binome arbitraire $\left(\eta'-\frac{a}{a_1}\right)$, les

combinaisons linéaires des polynomes ζ appartenaient aux exposants $0, 1, 2, \ldots, (q-1)$.

Donc, relativement à $\frac{1}{\eta}$, les combinaisons linéaires des polynomes z appartiennent aux exposants

$$-d, \quad -d+1, \quad -d+2, \quad \ldots, \quad -d+(q-1).$$

Il est d'ailleurs entendu que les polynomes z n'ont aucun facteur qui leur soit commun à tous.

Ceci entendu, je forme une équation (A) linéaire et d'ordre q, ayant $z_1, z_2, \ldots, z_q$ pour intégrales, et η pour variable. Relativement à tout binome $(\eta-\eta_0)$, un des polynomes z appartient à l'exposant zéro. Il n'y a donc de point singulier $\eta=\eta_0$ pour l'équation (A) que si, relativement à $(\eta-\eta_0)$, les polynomes z, ou plutôt leurs combinaisons linéaires, appartiennent à des exposants différents de $0, 1, 2, \ldots, q$ [1]; et, en outre, le point singulier $\eta=\infty$.

Pour $\eta=\infty$, il est facile de déterminer d'une manière sûre l'exposant auquel appartient chaque invariant. Effectivement, un invariant donné quelconque, calculé dans une équation dont $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ seraient les intégrales et η' la variable, a une valeur finie, différente de zéro, pour η' égale à l'arbitraire $\frac{a}{a_1}$. On est passé de $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ à $z_1, z_2, \ldots$ en multipliant les intégrales par un facteur, et en changeant la variable. Soit m le poids de l'invariant. Ce changement a eu simplement pour effet de multiplier l'invariant par $\left(\frac{d\eta'}{d\eta}\right)^m$ (p. 107), c'est-à-dire par $\frac{(an_1-a_1n)^m}{(a_1\eta+n_1)^{2m}}$. D'où résulte que, *pour $\eta=\infty$, un invariant quelconque* (choisi indépendamment des arbitraires a, a_1, n, n_1) *est infiniment petit d'ordre $2m$, si m est son poids.*

Considérons maintenant un binome $(\eta-\eta_0)$ relativement auquel les intégrales de (A) appartiennent à des exposants différents de $0, 1, 2, \ldots, (q-1)$. La discussion précédente montre que chaque invariant du poids m devient infini au plus d'ordre m pour $\eta=\eta_0$. C'est d'ailleurs une fraction rationnelle. Son dénominateur contient

---

[1] Dès que les combinaisons des z appartiennent aux exposants $0, 1, 2, \ldots, (q-1)$, tous les coefficients de (A) restent finis. En effet, ces coefficients ne contiennent en dénominateur que le déterminant $(z_1 z_2' z_3'' \ldots z_q^{(q-1)})_\eta$, lequel ne devient nul que si les exposants ne sont pas $0, 1, 2, \ldots, (q-1)$.

ainsi les seuls facteurs $(\eta - \eta_0)$, chacun au plus avec l'exposant m. En outre, dans certains cas, comme on l'a vu au n° 22, on peut reconnaître *a priori* que cet exposant est moindre que m.

On a donc là, au sujet de chaque invariant, par la connaissance des racines de son dénominateur et de la différence des degrés de son numérateur et de son dénominateur, des renseignements qui permettent dans les applications de prévoir sans calcul la forme de cet invariant. C'est ce qui deviendra clair par les exemples.

Au sujet des binomes $(\eta - \eta_0)$ eux-mêmes, on possède aussi un renseignement *a priori* concernant leur nombre, chacun d'eux étant compté avec un certain ordre de multiplicité. Si, en effet, on envisage le déterminant

$$U = (z_1 z_2' z_3'' \ldots z_q^{(q-1)})_\eta,$$

on reconnaît sans peine qu'il ne devient nul que si, pour $\eta = \eta_0$, les combinaisons des z cessent d'appartenir aux exposants $0, 1, \ldots, (q-1)$. *Si* $0, \alpha, \beta, \ldots$ *sont les exposants auxquels ces combinaisons appartiennent*, η_0 *est racine multiple d'ordre*

$$\left[\alpha + \beta + \ldots - \frac{q(q-1)}{2}\right]$$

du polynome entier U.

D'autre part, *ce polynome* U *est du degré* $q(d - q + 1)$. Ce nombre indique le nombre des racines η_0, chacune d'elles étant affectée de l'ordre de multiplicité qui lui est propre.

Des considérations de même nature s'appliquent aussi aux invariants des équations à coefficients doublement périodiques, dont on donne les intégrales. Mais je n'ai pas besoin d'y insister pour le moment; j'y reviendrai lors des applications.

24. En dernier lieu, je terminerai ce chapitre par deux applications relatives à l'étude des points critiques au moyen des invariants. Ces deux applications trouveront leur emploi dans la suite de ce mémoire. Elles concernent, l'une le troisième ordre, l'autre le quatrième ordre, et présentent une grande analogie entre elles.

Application concernant les équations du troisième ordre. — On donne les invariants h^3, l *en fonction d'une variable* α, *de telle sorte que, dans une certaine étendue, ces invariants soient développables suivant les puissances entières et croissantes de* α

sous la forme

$$h^3 = \quad r\alpha^{-4}(1 + 3R\alpha + R_1\alpha^2 + \ldots),$$
$$l = -q\alpha^{-2}(1 + \quad Q\alpha + Q_1\alpha^2 + \ldots).$$

On propose de chercher les conditions pour que, relativement à α, *les intégrales appartiennent à des exposants de la forme* s, $s + \frac{a}{2}$, $s + \frac{a + a'}{2}$; *les lettres* a, a' *représentent des entiers positifs, choisis de telle sorte que, des trois différences de ces exposants, une seule soit entière, et que cette différence soit l'unité.*

En prenant α pour variable, on a, pour l'invariant relatif V,

$$\text{(32)} \qquad V^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{l}\frac{dh}{d\alpha} = \frac{4}{3}\frac{r^{\frac{1}{3}}}{q}\alpha^{-\frac{1}{3}}\left[1 + \left(\frac{1}{4}R - Q\right)\alpha + \ldots\right].$$

En ce qui concerne l'équation déterminante, on est ici placé dans un des cas envisagés au n° 22 (p. 143). Les constantes μ, λ, $\mathfrak{H}$ sont ici

$$\mu = \frac{4}{3}\frac{r^{\frac{1}{3}}}{q}, \qquad \lambda = 2, \qquad \mathfrak{H} = r^{\frac{1}{3}}.$$

Donc (p. 146) les racines de l'équation déterminante sont

$$\text{(33)} \qquad s = \frac{2}{3}(1 - n), \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3}(1 + n)$$

avec

$$n^2 = 1 - \frac{4r}{q^2}.$$

Supposons $\frac{r}{q^2}$ choisi de telle sorte que les trois racines (33) satisfassent aux conditions données.

On ne peut pas en conclure que les intégrales appartiennent effectivement à des exposants respectivement égaux à ces racines, puisque, suivant l'hypothèse, il y a une couple de racines, et une seule, ayant une différence entière, égale à l'unité. Il faut donc satisfaire à une condition subsidiaire.

Envisageons les deux intégrales correspondantes qui, relativement à α, doivent appartenir aux exposants s, $s + 1$. Relativement à $x^{\frac{3}{2}}$, elles appartiennent aux exposants s, $s + 1$.

On pourra, au moyen de la seconde, mettre la première sous la forme

$$y = x^{\frac{3}{2}s}\left(1 \star + Mx^3 + M_1 x^{\frac{9}{2}} + \ldots\right)$$

avec une lacune au second terme. La condition subsidiaire s'obtient (voir chap. I, p. 29) si l'on substitue à y, $x^{\frac{3}{2}s}$, qu'on ordonne le résultat de la substitution dans l'équation canonique suivant les puissances croissantes de $x^{\frac{3}{2}s}$, et qu'on égale à zéro le coefficient du second terme, c'est-à-dire du terme en $x^{\frac{3}{2}s-\frac{3}{2}}$, le premier terme en $x^{\frac{3}{2}s-3}$ ayant déjà son coefficient nul, puisque s est racine de l'équation déterminante. Prenons donc l'équation canonique.

$$\frac{d^2y}{dx^3}+h\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dx}-1\right)y=0.$$

L'invariant h a la forme

$$h=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x^{\frac{1}{2}}}+\ldots$$

et, par suite,

$$l=-\frac{2A}{x^3}-\frac{B}{2x^{\frac{3}{2}}}+\ldots,$$

en sorte que le coefficient du second terme est

$$\frac{1}{2}B\left(3s-\frac{1}{2}\right).$$

En conséquence, il faut et il suffit que la racine s soit $s=\frac{1}{6}$. Il faut donc faire

$$s=\frac{2}{3}(1-n)=\frac{1}{6};\qquad n=\frac{3}{4},\qquad \frac{r}{q^2}=\frac{7}{2^6}.$$

Cela étant, les racines seront

$$s=\frac{1}{6},\qquad s=\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2},\qquad s=\frac{7}{6}=\frac{1}{6}+1.$$

Ainsi la solution de la question posée est celle-ci : *La condition cherchée est* $\frac{r}{q^2}=\frac{7}{2^6}$, *moyennant laquelle les intégrales appartiennent aux exposants* $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{6}$. Ceci constitue pour les rapports des intégrales un *point critique du second ordre;* car les rapports des intégrales sont des fonctions uniformes de $\alpha^{\frac{1}{2}}$.

25. *Application concernant les équations du quatrième ordre. — On donne les invariants h^3, l, s_4^3 sous la forme*

$$h^3 = \quad r\,\alpha^{-4}(1 + 3\,R\alpha + R_1\alpha^2 + \ldots),$$
$$l = -q\,\alpha^{-2}(1 + \quad Q\alpha + Q_1\alpha^2 + \ldots),$$
$$s_4^3 = n^3 r^2 \alpha^{-8}(1 + 3\,M\alpha + M_1\alpha^2 + \ldots).$$

On demande les conditions pour que, relativement à α, les intégrales appartiennent à des exposants dont les différences soient toutes des fractions à dénominateur 2, ou bien égales à l'unité.

L'équation déterminante est ici encore celle de la page 146; les constantes sont

$$\mu = \frac{4}{3}\frac{r^{\frac{1}{3}}}{q}, \qquad \lambda = 2, \qquad \mathfrak{H} = r^{\frac{1}{3}}, \qquad \mathfrak{S}_4 = nr^{\frac{2}{3}}.$$

Ainsi que je l'ai montré, les racines s sont

$$s = 1 - \frac{2}{3}\nu_0, \qquad 1 - \frac{2}{3}\nu_1, \qquad 1 + \frac{2}{3}\nu_1, \qquad 1 + \frac{2}{3}\nu_0,$$

ν_0, ν_1 étant les racines de l'équation bicarrée, qui est ici

$$(34) \qquad \left(\nu^2 - \frac{9}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{1}{4} + \frac{8r^2}{q}\right) + \frac{16nr^2}{q^4} = 0.$$

Examinons maintenant la condition subsidiaire qui doit être satisfaite relativement aux racines ayant pour différence l'unité, afin que les intégrales appartiennent aux exposants correspondants. Cette condition s'obtient facilement si l'on raisonne comme dans le cas qui précède. Les seconds termes des développements de h, l, s_4 interviennent. Posant, pour abréger l'écriture,

$$\xi = \frac{qx}{2r^{\frac{1}{3}}},$$

et tirant de l'équation (32) la variable canonique x, on a

$$dx = \frac{2r^{\frac{1}{3}}}{q}\,d\xi = V^{\frac{1}{3}}\,d\alpha = \frac{4r^{\frac{1}{3}}}{3q}\,\alpha^{-\frac{1}{3}}\,d\alpha\left[1 + \left(\frac{1}{4}R - Q\right)\alpha + \ldots\right],$$

et, en intégrant,

$$\xi = \alpha^{\frac{2}{3}}\left[1 + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}R - Q\right)\alpha + \ldots\right],$$
$$\alpha = \xi^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{4}R - Q\right)\xi^3 + \ldots.$$

De là

$$h = r^{\frac{4}{3}}\xi^{-2}\left(1 + \mathcal{A}\,\xi^{\frac{3}{2}} + \ldots\right), \qquad \mathcal{A} = \frac{2(3R - 2Q)}{5},$$

$$\frac{dh}{dx} = l = -q\,\xi^{-3}\left(1 + \mathcal{B}\,\xi^{\frac{3}{2}} + \ldots\right), \qquad \mathcal{B} = \frac{1}{4}\mathcal{A} = \frac{3R - 2Q}{10},$$

$$s_4 = n\,r^{\frac{2}{3}}\xi^{-4}\left(1 + \mathcal{C}\,\xi^{\frac{3}{2}} + \ldots\right), \qquad \mathcal{C} = \frac{2}{5}(R - 4Q) + M.$$

Pour avoir la condition subsidiaire, il faut substituer

$$y = \xi^{\frac{3}{2}s}$$

dans l'équation canonique

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 2h\frac{d^2 y}{dx^2} + 2(l-1)\frac{dy}{dx} + s_4 y = 0,$$

ordonner le résultat suivant les puissances croissantes de $x^{\frac{3}{2}}$, et égaler à zéro le coefficient du second terme, en $x^{\frac{3}{2}s - \frac{5}{2}}$; le coefficient du premier terme en $x^{\frac{3}{2}s - 4}$ est déjà nul, si s est racine de l'équation déterminante. Ayant posé comme précédemment

$$s = 1 + \frac{2}{3}\nu,$$

en tenant compte de la relation $\mathcal{B} = \frac{1}{4}\mathcal{A}$, on obtient ainsi la condition cherchée sous la forme

$$(35) \qquad \nu(2\nu + 3) + 4\frac{nr}{q^2}\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}} = 0.$$

La solution va résulter maintenant de l'examen des deux équations (34), (35). Soit ν_0 la racine de (34), en valeur absolue, la plus grande, et ν_1 l'autre racine. Faisons

$$\nu_0 = \frac{3}{2}a_0, \qquad \nu_1 = \frac{3}{2}a_1,$$

et, par ordre de grandeur,

$$s_0 = 1 - a_0, \qquad s_1 = 1 - a_1, \qquad s_2 = 1 + a_1, \qquad s_3 = 1 + a_0.$$

Les différences sont

$$s_1 - s_0 = s_3 - s_2 = a_0 - a_1,$$
$$s_2 - s_0 = s_3 - s_1 = a_0 + a_1,$$
$$s_3 - s_0 = 2a_0,$$
$$s_4 - s_1 = 2a_1.$$

Les conditions du problème exigent que ces différences soient ou

l'unité, ou des fractions ayant 2 pour dénominateur; en outre, a_0 et a_1 doivent être des nombres différents; sans quoi l'équation déterminante aurait des racines égales, ce qui rendrait le point critique de nature transcendante. Il est impossible que $(a_0 - a_1)$ et $(a_0 + a_1)$ soient toutes deux fractionnaires de la forme $\frac{1}{2}k$, $\frac{1}{2}k'$, k et k' étant impairs. Car alors les deux dernières différences $2a_0$, $2a_1$ seraient entières, inégales; elles ne pourraient donc être toutes deux égales à l'unité. D'ailleurs, $(a_0 - a_1)$ et $(a_0 + a_1)$ sont deux nombres essentiellement inégaux.

On doit supposer donc l'un des deux nombres $(a_0 - a_1)$, $(a_0 + a_1)$ égal à l'unité.

1° $a_0 + a_1 = 1$. Ce nombre $(a_0 + a_1)$ étant la différence $s_2 - s_0$, ainsi que la différence $s_3 - s_1$, la condition subsidiaire doit être satisfaite à la fois par s_0 et par s_1. L'équation (35) doit donc avoir pour racines

$$\frac{3}{2}(s_0 - 1), \quad \frac{3}{2}(s_1 - 1) \qquad \text{ou} \qquad -\frac{3}{2}a_0, \quad -\frac{3}{2}a_1,$$

dont la somme est, suivant l'hypothèse, égale à $-\frac{3}{2}$, nombre précisément égal à la somme des racines de l'équation (35).

D'autre part, les différences $2a_0$ et $2a_1$ devant seulement avoir pour dénominateur 2, et a_0, a_1, être inégales, il en résulte que ceci conduit à une solution unique

$$a_0 = \frac{3}{4}, \qquad a_1 = \frac{1}{4},$$

qui est effectivement possible et entraîne entre les données trois équations de condition, que j'écrirai tout à l'heure.

2° $a_0 - a_1 = 1$. L'équation (35) doit avoir pour racines

$$\frac{3}{2}(s_0 - 1), \quad \frac{3}{2}(s_2 - 1) \qquad \text{ou} \qquad -\frac{3}{2}a_0 \quad \text{et} \quad +\frac{3}{2}a_1,$$

dont la somme est bien $-\frac{3}{2}$, suivant l'hypothèse.

Soit alors b *un entier quelconque*, la solution sera

$$a_0 = \frac{2b+3}{4}, \qquad a_1 = -\frac{2b-1}{4},$$

qui fournit les racines

$$s_0 = -\frac{2b-1}{4}, \qquad s_2 = -\frac{2b-5}{4}, \qquad s_2 = \frac{2b+3}{4}, \qquad s_3 = \frac{2b+7}{4},$$

impose à (35) la condition d'avoir les racines

$$-\frac{3}{8}(2b+3) \quad \text{et} \quad \frac{3}{8}(2b-1),$$

et à (34) les racines

$$\pm\frac{3}{8}(2b+3), \quad \pm\frac{3}{8}(2b-1).$$

Les coefficients des équations (34), (35) sont ainsi pleinement déterminés.

On peut remarquer que, dans l'expression finale de ces conditions, les signes (supposés + dans notre analyse) de a_0, a_1 doivent disparaître, et les mêmes équations expriment les conditions pour le cas $a_0 + a_1 = 1$, et le cas $a_0 - a_1 = 1$. Il suffit de donner à b la valeur zéro pour faire rentrer le premier cas dans le second.

Le calcul fait, voici le résultat final :

En désignant par b un entier quelconque, on a pour les conditions cherchées

$$(36)\quad \begin{cases} \dfrac{r}{q^2} = \dfrac{44-9(2b+1)^2}{2^8}, \\ n = \dfrac{3^4(2b-1)(2b-5)(2b+3)(2b+7)}{[9(2b+1)^2-44]^2}, \\ 9(2b-5)(2b+7)(2R-8Q+5M) = 4[9(2b+1)^2-44](3R-2Q). \end{cases}$$

Moyennant ces conditions, les intégrales appartiennent, relativement à α, aux exposants

$$-\frac{2b-1}{4}, \quad -\frac{2b-5}{4}, \quad +\frac{2b+3}{4}, \quad +\frac{2b+7}{4},$$

ce qui constitue un point critique du second ordre pour les rapports des intégrales.

Comme cas particulier, si l'on a (ce cas répond à $a_0 + a_1 = 1$) $b = 0$, d'où résulte

$$\frac{r}{q^2} = \frac{5.7}{2^8}, \qquad n = \frac{3^5}{5.7}, \qquad 6R - 64Q + 45M = 0,$$

les intégrales appartiennent aux exposants

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{7}{4}.$$

CHAPITRE IV.

Applications. — Intégration de l'équation $h^3 = Al^2 + B$, quand $A = \frac{1-n^2}{4}$, n étant un entier non divisible par 3. — Cas où $B = 0$, intégration par les fonctions exponentielles et entières. — Intégration de l'équation binome $y''' = x^p y$, quand $p = -3\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, n étant un entier non divisible par 3. — Cas général où $B \gtrless 0$: intégration par les fonctions elliptiques. — Procédé général. — Exemples $n = 2$ et $n = 4$.

I. Je m'occuperai, dans ce chapitre, de l'intégration, pour un certain nombre de cas, des équations linéaires du troisième ordre contenues dans la classe définie par cette relation

$$(1) \qquad h^3 = A\,l^2 + B,$$

entre les invariants h, l. D'après la proposition de la page 130, il existe dans cette classe des équations à coefficients rationnels. Je vais étudier les points critiques suivant les procédés expliqués à la fin du chapitre précédent.

Au lieu de (1), j'écris les deux équations suivantes :

$$(2) \qquad \begin{cases} h^3 = r\alpha(\alpha - 1), \\ l = q(2\alpha - 1); \end{cases}$$

les constantes r, q sont liées à A, B, comme il suit :

$$(3) \qquad A = \frac{r}{4q^2}, \qquad B = -\frac{1}{4}r.$$

Des formules (2) je tire l'invariant V, relatif à la variable α

$$V_\alpha^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{l}\frac{dh}{d\alpha} = \frac{r^{\frac{1}{3}}}{3q}\,\frac{1}{(\alpha^2 - \alpha)^{\frac{2}{3}}}.$$

Pour $\alpha = 0$, et pour $\alpha = 1$, V est infiniment grand, du second ordre seulement, et h a pour limite zéro. C'est un cas examiné précédemment (p. 144); *les intégrales de l'équation canonique appar-*

tiennent aux exposants o, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ *relativement à* α, *aussi bien que relativement à* $(\alpha - 1)$.

Il ne reste qu'à envisager le point singulier $\alpha = \infty$. Changeant la variable en posant

$$\alpha = \frac{1}{\beta},$$

j'en déduis, pour l'invariant V_β relatif à la variable β,

$$V_\beta^{\frac{1}{3}} = V_\alpha^{\frac{1}{3}} \frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{r^{\frac{1}{3}}}{3q} \frac{1}{\beta^{\frac{2}{3}}(1-\beta)^{\frac{2}{3}}},$$

et l'on voit que V_β est infiniment grand du second ordre. C'est ici un exemple du cas général traité précédemment (p. 145). Les constantes sont actuellement

$$\lambda = 1, \qquad \mu = -\frac{r^{\frac{1}{3}}}{3q}, \qquad \mathfrak{H} = r^{\frac{1}{3}}.$$

L'équation déterminante a les racines

$$s = \frac{1}{3}(1-n), \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}(1+n),$$

n étant égal à $\sqrt{1 - \frac{r}{q^2}}$. Les différences des racines sont $\frac{2n}{3}$ et $\pm \frac{n}{3}$. Toutes les fois qu'on donnera à n une valeur commensurable, telle que $\frac{2n}{3}$ soit fractionnaire, le point singulier $\alpha = \infty$ sera critique, de nature algébrique. Nous avons déjà, relativement à α, deux points critiques o, 1, du troisième ordre. Faisons en sorte que le point $\alpha = \infty$ soit aussi du troisième ordre, et alors, suivant la proposition XV, nous pourrons obtenir une transformée à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme.

Le point singulier $\alpha = \infty$ sera critique du troisième ordre si *n est un entier premier à* 3.

La variable de transformation pour ce cas de trois points critiques du troisième ordre a déjà été employée précédemment (p. 76). On pose

$$2\alpha - 1 = p'(u),$$

après avoir choisi la fonction elliptique $p(u)$, pour laquelle $g_2 = 0$,

$g_3 = -1$, en sorte que

$$\wp'^2(u) = 4\,\wp^3(u) + 1.$$

On a alors

$$\alpha(\alpha - 1) = \wp^3(u).$$

De ces relations je conclus

$$2\frac{d\alpha}{du} = \wp''(u) = 6\,\wp^2(u) = 6(\alpha^2 - \alpha)^{\frac{2}{3}}.$$

J'en conclus l'invariant V_u, relatif à la variable u,

$$V_u^{\frac{1}{3}} = V_\alpha^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{du} = \frac{r^{\frac{1}{3}}}{q};$$

et puisque V_u est une constante, la variable u ne diffère que par le facteur $\frac{r^{\frac{1}{3}}}{q}$ de la variable canonique x, relativement à laquelle V_x est l'unité. Nous avons donc la transformée à variable u, en transcrivant l'équation canonique à peine modifiée.

Voici cette transformée :

$$(4) \qquad \frac{d^3y}{du^3} + (1 - n^2)\,\wp(u)\frac{dy}{du} + \frac{1}{2}[(1 - n^2)\,\wp'(u) - m]y = 0,$$

où j'ai posé

$$n^2 = 1 - \frac{r}{q^2}, \qquad m = \frac{r}{q^3}.$$

Je répète que *la fonction* $\wp(u)$ *est définie comme étant ce cas particulier de la fonction générale* (cas répondant à $g_2 = 0$, $g_3 = -1$) :

$$u = \int_\infty^{\wp(u)} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + 1}}.$$

Nous avons reconnu tout à l'heure que *l'intégrale générale de* (4) *est uniforme toutes les fois que* n *est un nombre entier premier avec* 3.

C'est au reste ce qui ce vérifie immédiatement sur la forme (4), grâce à l'observation faite plus haut (p. 33) au sujet des conditions subsidiaires qui disparaissent quand les coefficients développés présentent des lacunes. Car, dans le cas particulier $g_2 = 0$ où nous nous trouvons ici placés, $u^2\wp(u)$ et $u^3\wp'(u)$ se développent suivant les puissances entières de u^6 (voir p. 71).

2. Je m'occuperai plus loin de l'intégration effective. Mais je veux d'abord tirer une conséquence analogue à celle que j'ai signalée à la fin du chapitre II, au sujet de l'équation de Lamé, en faisant *dégénérer* la fonction elliptique $p(u)$.

A cet effet, je dois faire observer que l'hypothèse $g_3 = -1$ n'est ici nullement nécessaire. Je peux laisser g_3 arbitraire, pourvu que g_2 soit nul, et l'intégrale générale de (4) reste uniforme dès que n est un entier premier à 3. Faisant maintenant $g_3 = 0$, j'en conclus que *l'équation*

$$\frac{d^3y}{du^3} + \frac{(1-n^2)}{u^2}\frac{dy}{du} - \left(\frac{1-n^2}{u^3} + \frac{1}{2}m\right)y = 0 \tag{5}$$

peut être intégrée, sous forme finie et explicite, par les polynomes entiers et l'exponentielle, quand n est un entier premier à 3.

Ce résultat mérite d'être confirmé par une démonstration directe, que l'on peut faire au moyen d'un artifice, comme il suit.

Au lieu de (5), je prends l'équation plus générale

$$\frac{d^3y}{du^3} + \frac{A}{u^2}\frac{dy}{du} - \left(\frac{B}{u^3} + \frac{1}{2}m\right)y = 0, \tag{6}$$

et je change l'inconnue y en l'inconnue z, définie par

$$z = y'' + \frac{a}{u}y' + \frac{b}{u^2}y, \tag{7}$$

les dérivées par rapport à u étant dénotées par des accents.

En faisant usage de (6), je tire de là

$$z' - \frac{a}{u}z = \frac{b-a-a^2-A}{u^2}y' + \left(\frac{B-2b-ab}{u^3} + \frac{m}{2}\right)y.$$

Je poserai

$$\left\{\begin{aligned} b-a-a^2 &= A,\\ b(a+2) &= B,\end{aligned}\right. \tag{8}$$

et j'ai alors simplement

$$z' - \frac{a}{u}z = \frac{m}{2}y, \tag{9}$$

puis successivement

$$z'' - \frac{a}{u}z' + \frac{a}{u^2}z = \frac{m}{2}y',$$

$$z''' - \frac{a}{u}z'' + \frac{2a}{u^2}z' - \frac{2a}{u^3}z = \frac{m}{2}y''.$$

Portant ces valeurs de y, y', y'' dans (7) j'ai la transformée

$$z''' + \frac{A_1}{u^2} z' - \left(\frac{B_1}{u^3} + \frac{m}{2}\right) z = 0, \tag{10}$$

toute pareille à la proposée, sauf que les coefficients sont

$$A_1 = 2a + b - a^2,$$
$$B_1 = a(b + 2 - a),$$

relations qui, en vertu des équations (8), peuvent être écrites ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 = A + 3a, \\ B_1 = B - 2A - 3a^2, \end{array}\right. \tag{11}$$

et a est une racine de l'équation suivante, résultant de (8) :

$$a(a+1)(a+2) + A(a+2) - B = 0. \tag{12}$$

On peut, dès à présent, observer que, si l'on suppose $A = 0$, $B = 0$, l'équation (12) a la racine $a = -1$, qui donne $A_1 = B_1 = -3$. Nous possédons ainsi l'intégrale de l'équation (5) pour le cas $n = 2$; car, pour le cas $A = 0$, $B = 0$, l'équation est à coefficients constants, et s'intègre immédiatement.

Supposons maintenant $A = B = -3$, l'équation (12) a encore la racine $a = -1$; les équations (11) donnent, pour cette racine a, $A_1 = -6$, $B_1 = 0$; si l'on fait maintenant $A = -6$, $B = 0$, l'équation (12) a la racine $a = -3$, qui donne $A_1 = B_1 = -15$. Ainsi, en partant du cas $n = 2$, et faisant deux transformations successives, nous obtenons l'intégrale de l'équation (5) pour le cas $n = 4$.

Je vais maintenant prouver que, par une série de transformations, on peut passer des cas précédents à tous ceux où $A = B = 1 - n^2$, n étant un entier non divisible par 3.

Faisons $A = B = 1 - n^2$; l'équation (12) a la racine -1, et l'emploi de cette racine donne

$$A_1 = -(n^2 + 2), \qquad B_1 = n^2 - 4.$$

Faisons maintenant $A = -(n^2 + 2)$, $B = n^2 - 4$; l'équation (11) a la racine $a = -n$, et l'emploi de cette racine donne

$$A_1 = -(n^2 + 3n + 2), \qquad B_1 = 0.$$

Ainsi, par deux transformations, on passe du cas $A = B = 1 - n^2$

au cas

$$A = -(n+1)(n+2), \qquad B = 0.$$

Prenons enfin ce dernier cas; l'équation (12) a la racine

$$a = -(n+2),$$

qui donne

$$A_1 = B_1 = 1 - (n+3)^2.$$

Donc, en résumé, par trois transformations successives, on passe du cas $A = B = 1 - n^2$ au cas $A = B = 1 - (n+3)^2$.

Comme on a déjà intégré l'équation pour $n = 1$ et pour $n = 2$, son intégration en résulte pour n quelconque non divisible par 3.

En outre, pour $n = 1$, l'intégrale se composant des intégrales particulières $y = e^{\left(\frac{1}{2}m\right)^{\frac{1}{3}} u}$, on voit que, dans tous les cas, l'intégrale se compose des trois exponentielles $e^{\left(\frac{1}{2}m\right)^{\frac{1}{3}} u}$ et de polynomes entiers en $\frac{1}{u}$.

Voici les formules explicites auxquelles conduit cette analyse :

Désignons par y_n l'intégrale relative au cas $A = B = 1 - n^2$, et faisons

$$\frac{1}{2} n = \mu^3.$$

On a, pour le passage de y_n à y_{n+3},

$$(13) \quad y_{n+3} = \mu^3 y_n - \frac{2n+3}{u} y''_n + \frac{(2n+3)(n+1)}{u^2} y'_n - \frac{(2n+3)(n+1)}{u^3} y_n.$$

Cette formule (13) résout entièrement le problème. Car, en y faisant $n = -1$, on aura l'intégrale relative au cas $n = 2$; et des deux cas $n = 1$, $n = 2$, on passera successivement à tous les autres.

Voici les intégrales pour les deux premiers cas :

$$n = 2, \qquad y_2 = e^{\mu u}\left(\mu - \frac{1}{u}\right),$$

ce qui donne trois intégrales, à cause des trois déterminations de μ,

$$n = 4, \qquad y_4 = e^{\mu u}\left(\mu^3 - \frac{5\mu^2}{u} + \frac{10\mu}{u^2} - \frac{10}{u^3}\right).$$

3. C'est en partant de la relation (1) entre les invariants h, l que

nous avons défini les équations dont nous nous occupons ici. Inversement, de l'équation (4) nous pouvons déduire la relation (1). Pour avoir à la fois la relation qui convient aussi au cas particulier (5), je suppose g_3 quelconque.

Le calcul de h, l est immédiat; car, si dans l'équation

$$\frac{d^3y}{du^3}+(1-n^2)\,\mathrm{p}(u)\frac{dy}{du}+\frac{1}{2}[(1-n^2)\,\mathrm{p}'(u)-m]y=0,$$

on change de variable en posant $u=\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{3}}x$, cette équation devient

$$\frac{d^3y}{dx^3}+(1-n^2)\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\mathrm{p}(u)\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\left[(1-n^2)\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{d\,\mathrm{p}(u)}{dx}-1\right]y=0.$$

Cette dernière est sous forme canonique. On a donc

$$h^3=\frac{(1-n^2)^3}{m^2}\mathrm{p}^3(u),\qquad l=\frac{1-n^2}{m^{\frac{2}{3}}}\frac{d\,\mathrm{p}(u)}{dx}=\frac{1-n^2}{m}\mathrm{p}'(u),$$

et comme $\mathrm{p}'^2(u)=4\mathrm{p}^3(u)-g_3$, il en résulte

$$h^3=\frac{1-n^2}{4}l^2+\frac{(1-n^2)^3}{4m^2}g_3.$$

Écrivant cette relation ainsi

$$(14)\qquad h^3=\frac{1-n^2}{4}l^2+\mathrm{B},$$

nous pouvons dire que *les équations linéaires du troisième ordre appartenant à la classe définie par la relation* (14) *s'intègrent toutes les fois que* n *est un entier non divisible par* 3. *L'intégration se fait au moyen des fonctions entières, exponentielles et elliptiques, quand* B *n'est pas nul; au moyen des fonctions entières et exponentielles seulement, quand* B *est nul.*

Ici se place une observation qui montre bien l'utilité de l'emploi des invariants. Envisageons l'équation

$$\frac{d^3y}{d\xi^3}=\xi^p y.$$

Le calcul de ses invariants est extrêmement simple. On a d'abord

$$\mathrm{V}=2\xi^p,$$

et ensuite [p. 114, équation (13), $q=3$]

$$\Delta = 4p(p+6)\xi^{2(p-1)},$$

$$h^3 = \frac{1}{2^2.3^6}[p(p+6)]^3\xi^{-2(p+3)},$$

$$l = -\frac{p(p+6)(p+3)}{3^3}\xi^{-(p+3)};$$

d'où résulte la relation

(15) $$h^3 = \frac{p(p+6)}{2^2(p+3)^2}l^2;$$

qui est un cas de la relation (14).

De là cette conséquence du résultat précédent : *l'équation*

(16) $$\frac{d^3z}{d\xi^3} = \xi^p z$$

s'intègre par les fonctions algébriques et exponentielles quand l'exposant p a la forme

$$p = -3\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

n étant un entier non divisible par 3, positif ou négatif.

Il n'y a d'ailleurs aucun embarras pour trouver la substitution qui transforme l'équation (16) en équation (5). Nous avons :

pour (16),

$$V_\xi = 2\xi^p;$$

pour (5),

$$V_u = m.$$

D'ailleurs

$$V_\xi = V_u\left(\frac{du}{d\xi}\right)^3.$$

Donc

$$\frac{du}{d\xi} = \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{3}}\xi^{\frac{p}{3}} = \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{3}}\xi^{-1+\frac{1}{n}}, \qquad u = \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{n}\xi^{\frac{1}{n}}.$$

Si l'on prend pour point de départ l'équation (16), on peut choisir m arbitrairement; faisons, par exemple, $m=2$, et nous avons

$$u = \frac{1}{n}\xi^{\frac{1}{n}}.$$

Il faut aussi changer la fonction, en faisant $y = tz$, t étant une fonc-

tion de ξ. Si l'on prend trois intégrales, on a, en envisageant les équations (16) et (5),

$$(y_1 y'_2 y''_3)_u = \text{const.},$$
$$(z_1 z'_2 z''_3)_\xi = \text{const.}$$

D'ailleurs

$$(y_1 y'_2 y''_3)_u = (z_1 z'_2 z''_3)_\xi t^3 \left(\frac{d\xi}{du}\right)^3$$

Donc

$$t = \frac{du}{d\xi}.$$

Donc, *par la substitution*,

$$u = \frac{1}{n}\xi^{\frac{1}{n}}, \qquad y = \xi^{-1+\frac{1}{n}} z,$$

l'équation (16) *se change en l'équation* (5) (avec $m = 2$). L'intégration effective de (16) pour les cas cités ci-dessus en résulte.

4. Je reviens maintenant à l'équation (4) sous sa forme générale :

$$(17) \qquad \frac{d^3 y}{du^3} + (1 - n^2)\,p(u)\frac{dy}{du} + \frac{1}{2}[(1 - n^2)\,p'(u) - m]\,y = 0,$$

dans laquelle on suppose $g_2 = 0$, et j'en étudie les procédés d'intégration lorsque n est un entier non divisible par 3. L'intégrale générale a le seul pôle $u \equiv 0$, et l'ordre de multiplicité de l'infini correspondant est $(n - 1)$. Effectivement, les intégrales appartiennent, relativement à u, aux exposants $(1 - n)$, 1, $(1 + n)$.

Soit ω une racine cubique de l'unité, le changement de u en ωu ne change pas l'équation. Car, dans le cas $g_2 = 0$, les relations d'homogénéité des fonctions $\sigma(u)$, $p(u)$, $p'(u)$ donnent

$$\sigma(\omega u) = \omega\,\sigma(u),$$
$$p(\omega u) = \omega\,p(u),$$
$$p'(\omega u) = \;\; p'(u),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

sans changement de g_3. Si donc $f(u)$ est une intégrale, $f(\omega u)$ et $f(\omega^2 u)$ sont aussi des intégrales. En outre, dans ce cas spécial $g_2 = 0$, ϖ étant une période, $\omega\varpi$ et $\omega^2\varpi$ sont aussi des périodes. Donc l'équation a trois intégrales doublement périodiques de première ou de deuxième espèce, puisqu'elle en a toujours une (théorème de M. Picard, p. 62), à moins que cette intégrale ne reste inaltérée par le changement de u en ωu, ou ne se multiplie par un facteur ω

ou ω^2. Or il est aisé de voir que cette dernière circonstance ne peut se produire pour aucune des deux formes des éléments simples des fonctions de deuxième espèce. Donc, ou bien il y a une intégrale doublement périodique de première espèce, ou bien trois intégrales de deuxième espèce, $f(u)$, $f(\omega u)$, $f(\omega^2 u)$.

Dans ce dernier cas, envisageons $f(u)$ et $f(\omega u)$ qui ont l'infini $u = 0$ multiple d'ordre $(n-1)$. D'après les exposants auxquels appartiennent les intégrales, une combinaison linéaire de $f(u)$ et $f(\omega u)$ appartient à l'exposant 1. Ceci exige que, dans le développement de $f(u)$ suivant les puissances croissantes de u, les termes à exposants négatifs, y compris le terme à exposant zéro, n'existent que de trois en trois. Soit $\psi(u)$ l'élément simple, on aura donc

$$(18) \qquad f(u) = \psi^{(n-2)}(u) + c_1\,\psi^{(n-5)}(u) + c_2\,\psi^{(n-8)}(u) + \ldots.$$

Moyennant cette forme de $f(u)$, tous les termes disparaissent dans la combinaison $f(u) - \omega^{n-1} f(\omega u)$, y compris le terme d'exposant zéro, si n a la forme $3\nu + 1$; ce terme exclu, si n a la forme $3\nu + 2$. Ainsi, pour $n = 3\nu + 2$, il faut encore que dans $f(u)$ manque le terme d'exposant zéro.

Cela fait, envisageons la combinaison

$$f(u) + \omega f(\omega u) + \omega^2 f(\omega^2 u)$$

pour le cas où

$$n = 3\nu + 1$$

et la combinaison

$$f(u) + f(\omega u) + f(\omega^2 u)$$

pour le cas où

$$n = 3\nu + 2.$$

Ce sont ces combinaisons qui appartiennent à des exposants supérieurs à l'unité. D'après les conditions du problème, elles appartiennent à l'exposant $(n+1)$.

Dans le cas $n = 3\nu + 1$, la combinaison envisagée ne contient que des termes en u^2, u^5, u^8, ... qui doivent disparaître jusqu'à $u^{3\nu-1}$ inclusivement, ce qui fait ν conditions. L'expression de $f(u)$ contient seulement $(\nu - 1)$ coefficients. Pour que ces conditions soient remplies, les coefficients c_1, c_2, ... seront déterminés entièrement, et il restera encore une relation entre les deux constantes de l'élément simple.

Dans le cas $n = 3\nu + 2$, la combinaison envisagée ne contient que

les termes en u^3, u^6, ... qui doivent disparaître jusqu'à $u^{3\nu}$ inclusivement, ce qui fait ν conditions. L'expression de $f(u)$ contient ν coefficients c_1, c_2, ..., mais une condition est déjà imposée par l'absence du terme indépendant de u; le résultat est donc le même que dans l'autre cas.

En résumé, d'après les conditions du problème, *j'ai été conduit à reconnaître que l'on peut, en laissant encore arbitraire une des constantes de l'élément simple* $\psi(u)$, *déterminer complètement une fonction* $\psi(u)$ *sous la forme* (18), *de telle sorte que pour* $u=0$ *les combinaisons linéaires de* $f(u)$, $f(\omega u)$, $f(\omega^2 u)$ *appartiennent aux exposants* $1-n$, 1, $1+n$.

Je dis que $f(u)$ *étant ainsi déterminée satisfait certainement à une équation de la forme* (17) *dans laquelle* m *a une valeur qui dépend de la constante laissée arbitraire dans* $\psi(u)$.

Effectivement, $f(u)$ étant doublement périodique de deuxième espèce, l'équation linéaire du troisième ordre, à variable u, qui a $f(u)$, $f(\omega u)$, $f(\omega^2 u)$ pour intégrales, est à coefficients doublement périodiques avec le module $g_2=0$ comme la fonction $\sigma(u)$ qui sert à la construction de $f(u)$.

Les coefficients n'ont que le pôle $u=0$ comme $f(u)$.

On reconnaît aisément que le coefficient de $\frac{dy}{du}$ appartient à l'exposant -2, et celui de y à l'exposant -3, relativement à u.

L'équation ne change pas par le changement de u en ωu.

L'équation déterminante, pour $u=0$, a les racines $1-n$, 1, $1+n$.

D'après ces conditions, l'équation se peut construire, et a précisément la forme (17). C. Q. F. D.

En conséquence, pour chaque valeur de n, le problème de l'intégration de l'équation (17) se décompose en deux parties :

1° *Construire la fonction* $f(u)$ *d'après les conditions indiquées;*

2° *Chercher la relation entre la constante de* $f(u)$ *et la constante de l'équation*

Comme on le voit, cette solution est analogue à celle que j'ai donnée précédemment pour l'équation de Lamé (p. 81). Pour l'appliquer, il faut recourir aux formules (31) et (32) des pages 83 et 84; ces formules donnent les coefficients du développement de

l'élément simple

$$\psi(u) = e^{[x-\zeta(v)]u}\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)}$$

suivant les puissances croissantes de u. Dans le cas actuel, on fera $g_2 = 0$.

5. *Intégration de l'équation* (17) *pour* $n=2$.

La fonction $f(u)$ se réduit à $\psi(u)$, élément simple. Le terme du degré zéro doit manquer dans le développement. Donc $x = 0$.

Ainsi

(19) $$y = e^{-\zeta(v)u}\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)},$$

et il ne reste qu'à déterminer v en fonction de la constante m. C'est à quoi l'on parvient en substituant y dans l'équation et égalant à zéro le coefficient du terme en $\frac{1}{u}$, après développement suivant les puissances croissantes de u. L'équation est

$$y''' - 3\,\wp(u)y' - \frac{1}{2}[3\,\wp'(u) + m]y = 0.$$

On a ici, à cause de $x = 0$,

$$y = \quad \frac{1}{u} - \frac{1}{2}\wp(v)u - \frac{1}{6}\wp'(v)u^2 \ldots,$$

$$y' = -\frac{1}{u^2} - \frac{1}{2}\wp(v) \quad - \frac{1}{3}\wp'(v)u \ldots,$$

$-3\,\wp(u)y'$ contient le terme $+ \wp'(v)\frac{1}{u}$,

$-\frac{3}{2}\wp'(u)y$ » $-\frac{1}{2}\wp'(v)\frac{1}{u}$,

$-\frac{1}{2}my$ » $-\frac{1}{2}m\frac{1}{u}$.

Donc

(20) $$\wp'(v) = m.$$

Ainsi *l'intégrale générale se compose des trois intégrales particulières* (19) *obtenues en donnant à* v *pour valeurs celles des trois solutions de l'équation* (20).

On remarquera que l'identité $\wp'(\omega u) = \wp'(u)$ prouve que ces trois solutions sont v, ωv, $\omega^2 v$; d'où l'on conclura sans peine que, suivant les prévisions, les trois intégrales sont $f(u)$, $f(\omega u)$, $f(\omega^2 u)$.

On peut contrôler ce résultat avec la solution $y = e^{\mu u}\left(\mu - \frac{1}{u}\right)$, obtenue (p. 161) pour le cas particulier où la fonction elliptique dégénère par la supposition $g_3 = 0$. Cette supposition donne

$$\sigma(u) = u, \qquad p(u) = \frac{1}{u^2}, \qquad p'(u) = -\frac{2}{u^3}, \qquad \ldots.$$

Donc l'équation (20) donne ici

$$v = -\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Avec la notation employée page 161, ceci revient à

$$v = -\frac{1}{\mu}.$$

De là je conclus

$$\zeta(v) = \frac{1}{v} = -\mu$$

et

$$y = e^{\mu u}\frac{u - \frac{1}{\mu}}{u} = \frac{1}{\mu}e^{\mu u}\left(\mu - \frac{1}{u}\right),$$

ce qui est conforme, sauf le facteur constant μ, à la solution déjà trouvée.

6. *Intégration de l'équation* (17) *pour* $n = 4$.

L'intégrale aura la forme

$$y = \psi''(u),$$

qui, suivant les explications données, doit être telle que son développement suivant les puissances croissantes de u manque du terme en u^2.

Dans $\psi(u)$ doit donc manquer le terme en u^4. Suivant les formules (31), (32) [p. 83 et 84], ceci fournit l'équation

$$(21) \qquad x^5 - 10px^3 - 10p'x^2 - 15p^2x - 2pp' = 0,$$

où j'ai simplement écrit p, p', au lieu de $p(v)$, $p'(v)$. Si l'on raisonne comme je l'ai fait précédemment (p. 90) pour l'équation de Lamé, on doit prévoir que la relation entre les constantes v, m doit être de la forme $p'(v) = F(m)$, où F sera une fraction rationnelle du cinquième degré dans ses termes. D'après cette remarque, et si

l'on fait usage de la solution obtenue (p. 161) pour le cas particulier $g_3 = 0$, on pourrait abréger beaucoup le calcul. Toutefois, pour augmenter la confiance en ces nouvelles méthodes, je fais ici le calcul *in extenso*, en contrôlant ensuite les vérifications.

Je substitue $y = \psi''(u)$ dans l'équation, et je cherche le terme en $\frac{1}{u_3}$ pour égaler à zéro son coefficient. L'équation est

$$y''' - 15\,p(u)y' - \frac{1}{2}[15\,p'(u) + m]y = 0.$$

J'ai

$$y = \frac{2}{u^3} - \frac{1}{3}[p'(v) + 3\,p(v)x - x^3]\ldots,$$

et l'on voit que les termes en $\frac{1}{u_3}$ ne proviennent que de

$$-\frac{1}{2}[15\,p'(u) + m]y.$$

Dans $15\,p'(u)y$, on a le terme

$$+10[p'(v) + 3\,p(v)x - x^3]\frac{1}{u^3}$$

et, dans my, le terme

$$2m\frac{1}{u^3}.$$

L'équation cherchée est ainsi

$$x^3 - 3px - \left(p' + \frac{m}{5}\right) = 0. \tag{22}$$

Il nous faut résoudre les équations simultanées (21), (22), en tenant compte, pour simplifier les résultats, de la relation

$$p'^2 = 4p^3 - g_3. \tag{23}$$

Soient A, B les premiers membres des équations (21), (22); je fais la combinaison

$$A - x^2B + 7pB,$$

et j'écris $M = \frac{m}{5}$. J'obtiens ainsi cette équation du second degré

$$C = (9p' - M)x^2 + 36p^2x + p(9p' + 7M) = 0.$$

Je fais ensuite la combinaison

$$D = xC + (M - 9p')B = 36p^2x^2 + 4(9p' + M)px + (p' + M)(9p' - M) = 0,$$

puis

$$E = 9pD - (9p' + M)C = [M^2 + 81(4p^3 - p'^2)]x^2 - 16M^2p = 0.$$

A cause de (23), l'équation $E=0$ devient

$$(M^2+81g_3)x^2=16M^2p.$$

Écrivons, pour abréger,

$$x^2=\lambda p, \qquad \lambda=\frac{16M^2}{M^2+81g_3}.$$

Nous pouvons transformer alors $C=0$ en

$$36px+\lambda(9p'-M)+9p'+7M=0$$

et l'équation (22) en celle-ci :

$$(\lambda-3)px-(p'+M)=0.$$

L'élimination de x entre ces deux dernières conduit enfin à la relation demandée :

$$(24) \qquad p'(v)=\frac{m}{45}\frac{\lambda^2-10\lambda-15}{(\lambda-1)^2}$$

$$(25) \qquad x=\frac{1}{p(v)}\frac{5p'(v)+m}{5(\lambda-3)} \qquad \left(\lambda=\frac{16m^2}{m^2+45^2g_3}\right).$$

Ayant déterminé v par l'équation (24), *puis x par l'équation* (25), *on a pour l'équation* (17), *dans le cas $n=4$, l'intégrale*

$$y=\frac{d^2}{du^2}\left[e^{[x-\zeta(v)]u}\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)}\right].$$

L'équation (24) fournit, comme il convient, trois valeurs de v, de la forme v, ωv, $\omega^2 v$, ω étant une racine cubique primitive de l'unité.

La solution a bien la forme prévue; il reste à la contrôler au moyen de la solution trouvée dans l'hypothèse $g_3=0$. Or, pour ce cas, les formules (24) et (25) montrent que y se réduit à

$$y=\frac{d^2}{du^2}\left[e^{\mu u}\left(\mu-\frac{5}{u}\right)\right],$$

où l'on a posé $\mu^3=\dfrac{m}{2}$.

En développant cette dérivée, on reconnaîtra qu'elle coïncide avec l'expression y_4 donnée à la page 161.

7. Pour en finir avec cette intégration, il reste encore à exa-

miner les cas d'exception. La formule (25) semble être en défaut pour $p(v)=0$; mais il n'en est rien. D'après (23), en effet, ceci entraîne

$$p'(v)=\sqrt{-g_3};$$

et la formule (24) montre que ceci a lieu pour $\lambda=\infty$, en sorte que x conserve une valeur finie. C'est donc seulement pour $\lambda=1$, c'est-à-dire

(26) $$m^2=5.3^3 g_3,$$

que les formules sont en défaut. Dans l'équation

$$y'''-15\,p(u)y'-\frac{1}{2}[15\,p'(u)+m]y=0,$$

substituons

$$y=a+p'(u),$$

nous avons

$$\begin{aligned}
y' &= p''(u)=6\,p^2(u),\\
y'' &= p'''(u)=12\,p(u)\,p'(u),\\
y''' &= p^{\text{IV}}(u)=12\,p(u)\,p''(u)+12\,p'^2(u)=12[10\,p^3(u)-g_3].
\end{aligned}$$

Le résultat de la substitution est

$$-\frac{1}{2}(15a+m)\,p'(u)-\frac{1}{2}(ma+9g_3),$$

que l'on peut rendre nul, s'il est possible de poser à la fois

$$15a+m=0,\qquad ma+9g_3=0.$$

Cette circonstance s'offre si l'on a $m^2=5.3^3 g_3$, ce qui est la relation (26). Ainsi, *dans le cas* $n=4$ *et* $m^2=5.3^3 g_3$, *les formules* (24), (25) *sont en défaut. On a d'abord l'intégrale doublement périodique ordinaire*

$$y_1=p'(u)-\frac{m}{15}.$$

On vérifiera aisément cette seconde intégrale

$$y_2=2\,p(u)+uy_1.$$

L'intégration se complète par cette troisième intégrale

$$y_3=\left[1+\frac{15\,p'(u)}{m}\right][\zeta(u-w)+\zeta(u-\omega w)+\zeta(u-\omega^2 w)]+6\,\zeta(u),$$

dans laquelle ω *est une racine cubique imaginaire de l'unité, et* ϖ *une racine de l'équation*

$$p'(\varpi) + \frac{m}{15} = 0.$$

Je n'insiste pas sur la détermination de ces intégrales ; la deuxième étant vérifiée, on trouve la troisième par un procédé semblable à celui que j'ai employé page 86.

CHAPITRE V.

Applications. — Définition et étude générale d'une classe d'équations du troisième ordre qui offre cinq séries indéfinies de cas d'intégration, trois séries de cas par les fonctions rationnelles, deux séries par les fonctions elliptiques. — Méthode d'intégration pour une de ces dernières séries. — Exemple du calcul complet dans un cas particulier.

---

1. Je m'occuperai, dans ce chapitre et le suivant, de l'étude des cas d'intégration qu'offre une équation du troisième ordre, présentant par ses propriétés les plus grandes analogies avec l'équation de Gauss. Elle s'intègre algébriquement dans plusieurs séries indéfinies de cas, et par les fonctions elliptiques également dans deux séries indéfinies de cas.

Je vais d'abord définir cette équation et examiner succinctement ses points singuliers. Comme une série des cas où elle s'intègre par les fonctions elliptiques offre une grande analogie avec l'exemple qui a été traité dans le chapitre précédent, c'est par cette série que je commencerai l'étude.

Il s'agit de la classe d'équations du troisième ordre ainsi définie : la relation entre les invariants h^3, l est donnée sous la forme

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} h^3 &= r(\alpha-1)(\alpha+c)^3, \\ l &= q\alpha\left(\alpha+\frac{c-3}{4}\right), \end{aligned} \right.$$

dans laquelle α est une variable auxiliaire, r, q, c sont des constantes.

Il résulte de la proposition démontrée page 130 que dans cette classe sont comprises des équations à coefficients rationnels.

La variable canonique x est donnée par la relation

$$(2) \qquad \frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{l}\frac{dh}{d\alpha} = \frac{4}{3}\frac{r^{\frac{1}{3}}}{q}\frac{1}{\alpha(\alpha-1)^{\frac{2}{3}}}.$$

Ainsi *il s'agit des équations contenues dans la même classe que*

$$(3) \qquad \frac{d^3y}{dx^3} + h\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}(l-1)y = 0,$$

h, l, α étant liés à x par les relations (1) *et* (2).

L'invariant V_α, *relatif* à la variable α, est $\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^3$, c'est-à-dire

$$(4) \qquad V_\alpha = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{r}{q^3}\frac{1}{\alpha^3(\alpha-1)^2}.$$

Quand on voudra envisager la valeur $\alpha = \infty$, on changera α en $\frac{1}{\beta}$, et l'invariant V_β, *relatif* à la variable β, sera $V_\alpha\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^3$, ou

$$(5) \qquad V_\beta = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{r}{q^3}\frac{1}{\beta(\beta-1)^2}.$$

Pour l'étude des points singuliers, nous appliquons simplement les résultats de l'étude gé érale faite au chapitre III (n^os **21** et **22**).

1° Pour $\alpha = 0$, V_α est infiniment grand du troisième ordre. Il nous faut appliquer les résultats du n° **21**. La limite H de l'invariant h pour $\alpha = 0$ est ici

$$H = -r^{\frac{1}{3}}c.$$

L'équation déterminante (29), de la page 143, devient

$$\left(\frac{s}{\mu}\right)^3 - r^{\frac{1}{3}}c\,\frac{s}{\mu} - \frac{1}{2} = 0,$$

où μ^3 est la limite de $\alpha^3 V_\alpha$ pour $\alpha = 0$:

$$\mu = \frac{4}{3}\frac{r^{\frac{1}{3}}}{q}.$$

L'équation déterminante est donc finalement

$$(6) \qquad s^3 - \frac{16}{9}\frac{rc}{q^2}s - \frac{32}{27}\frac{r}{q^3} = 0.$$

2° Pour $\alpha = 1$, c'est le cas particulier ($\lambda = 1$) signalé au n° **22** (p. 144) : *relativement à* $(\alpha - 1)$, *les intégrales appartiennent aux exposants* $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

3° Pour $\alpha = \infty$, il faut envisager la variable inverse β, et consi-

dérer V_β donné plus haut (équation 5) On voit que V_β est infini du premier ordre. C'est le cas spécialement traité pour les équations du troisième ordre (p. 146). La constante λ étant égale à 2, les racines de l'équation déterminante sont

(7) $$s = \frac{2}{3}(1-n), \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3}(1+n),$$

(8) $$n^2 = 1 - \frac{4r}{q^2}.$$

Les points $\alpha = 0, 1, \infty$ sont les seuls points singuliers, et l'un d'eux est du troisième ordre. Aussi, conformément à la proposition XXII (p. 134), si nous pouvons disposer des constantes de telle sorte que les deux points $\alpha = 0$, $\alpha = \infty$ soient algébriques et que leurs ordres m_0, m_∞ satisfassent à la condition $\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_\infty} + \frac{1}{3} > 1$, l'intégration se fera par des fonctions rationnelles d'une variable auxiliaire. Si les ordres m_0, m_∞ satisfont à la relation $\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_\infty} + \frac{1}{3} = 1$, l'intégration se fera (proposition XXIII, p. 136) au moyen des fonctions elliptiques.

2. Je vais d'abord faire voir que, moyennant une seule condition, l'ordre m_∞ peut être rendu égal à 2. Si, effectivement, nous changeons α en $\frac{1}{\beta}$, nous avons, pour β voisin de zéro, et en développant suivant les puissances croissantes de β :

$$h^3 = r\beta^{-4} + \ldots,$$
$$l = q\beta^{-2} + \ldots.$$

Prenons le résultat obtenu à propos de l'application traitée à la fin du chapitre III (n° 24), et concluons que, *si l'on fait* $\frac{r}{q^2} = \frac{7}{2^6}$, *les intégrales appartiennent, relativement à* $\frac{1}{\alpha}$, *aux exposants* $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{6}$, *ce qui constitue pour les rapports des intégrales un point critique du second ordre.*

Et maintenant, $\frac{r}{q^2}$ étant connu, nous pouvons disposer des constantes q et c de manière à donner aux racines de l'équation (6), déterminante pour $\alpha = 0$, des valeurs à volonté. Si nous prenons ces racines de telle sorte que leurs différences soient commensurables et fractionnaires, les intégrales appartiendront effectivement aux expo-

sants correspondants. Le calcul explicite des conditions n'offre aucune difficulté, et j'en donne ici le résultat sous cette forme :

Soit la classe d'équations linéaires du troisième ordre définie par

$$h^3 = r(\alpha - 1)(\alpha + c)^3,$$
$$l = q\alpha\left(\alpha + \frac{c-3}{4}\right),$$

où α *est une variable auxiliaire, et où les constantes* r, q, c *sont déterminées comme il suit en fonction de deux nombres commensurables* $\frac{a}{m}$, $\frac{a'}{m}$:

$$(9)\quad \begin{cases} r = \dfrac{7^3}{2^8}\,\dfrac{m^6}{[(a'-a)(2a'+a)(2a+a')]^2}, \\ q = \dfrac{7}{2}\,\dfrac{m^3}{(a'-a)(2a'+a)(2a+a')}, \\ c = \dfrac{2^2 3}{7}\,\dfrac{a^2+a'^2+aa'}{m^2}. \end{cases}$$

Si, a, a', m *étant des entiers positifs,* $\frac{a}{m}$, $\frac{a'}{m}$, $\frac{a+a'}{m}$ *sont tous trois fractionnaires et ont pour plus petit commun dénominateur* m, a *et* a' *étant d'ailleurs différents;*

Les rapports des intégrales, envisagés comme des fonctions de α, *n'ont que les points critiques* ∞, 1, 0, *qui sont algébriques et respectivement d'ordre* 2, 3, m.

En conséquence : 1° *Si* m *est l'un des nombres* 3, 4, 5, *l'intégration peut s'effectuer algébriquement; les rapports des intégrales et la variable* α *s'expriment rationnellement en fonction d'une même variable;*

2° *Si* m *est égal à* 6, *l'intégration s'effectue par les fonctions elliptiques.*

3. En dehors des cas que mentionne cet énoncé, j'en trouve encore un autre où l'intégration est possible; c'est celui où les trois points sont tous du troisième ordre. Il est aussi aisé de calculer la forme explicite des coefficients, pour ce cas, et voici le résultat :

Si dans les équations

$$h^3 = r(\alpha - 1)(\alpha + c)^3,$$
$$l = q\alpha\left(\alpha + \frac{c-3}{4}\right),$$

on suppose les constantes r, q, c déterminées comme il suit en fonction de trois nombres entiers N, a, a', *non divisibles par* 3, a *et* a' *étant positifs et inégaux et ayant leur différence divisible par* 3 :

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} r &= \frac{3^6(4-N^2)^3}{2^2[(a'-a)(2a'+a)(2a+a')]^2}, \\ q &= \frac{2.3^3(4-N^2)}{(a'-a)(2a'+a)(2a+a')}, \\ c &= \frac{1}{3}\,\frac{a^2+a'^2+aa'}{4-N^2}, \end{aligned} \right.$$

alors les trois points critiques o, 1, ∞ *sont du troisième ordre, et l'intégration peut s'effectuer par les fonctions elliptiques.*

On ne manquera pas de remarquer que, dans ces deux énoncés, les nombres a, a' jouent un rôle symétrique, de telle sorte que leur échange a pour seul effet de changer le signe de l. Par suite (p. 139), l'échange de a, a' a pour effet de changer la classe en son adjointe

Dans ce chapitre, je vais m'occuper de l'intégration pour les cas compris dans le dernier énoncé. Les nombres N, a, a' sont ceux qui interviennent directement dans la détermination des exposants auxquels les intégrales appartiennent autour des deux points critiques o, ∞.

Relativement à $\frac{1}{\alpha}$, *les exposants auxquels les intégrales de l'équation canonique appartiennent sont*

$$\frac{2-N}{3},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{2+N}{3}.$$

Relativement à α, *ce sont*

$$-\frac{2a+a'}{9},\quad \frac{a-a'}{9},\quad \frac{a+2a'}{9}.$$

Si l'on prend la fonction elliptique $p(u)$ *pour laquelle* $g_2=0$, $g_3=-1$ *et qu'on pose*

$$p'(u)=2\alpha-1,$$

il en résulte

$$p^3(u)=\alpha(\alpha-1).$$

Relativement à $\frac{1}{\alpha}$, les intégrales de l'équation canonique appartiennent aux exposants $\frac{2-N}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2+N}{3}$. Donc, *relativement à* u, *les*

intégrales de l'équation canonique appartiennent aux exposants $(2-N)$, 2, $(2+N)$.

Il y a lieu de distinguer maintenant les deux racines de $p(w)=0$. Je les désigne par w et $-w$. Elles font acquérir à $p'(w)$ les valeurs ± 1. Je désigne par w celle qui donne

$$1+p'(w)=0.$$

Alors $\alpha=0$ correspond à $u=w$, et $\alpha=1$ à $u=-w$.

Relativement à $(\alpha-1)$, les intégrales appartiennent aux exposants $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. Donc, relativement à $(u+w)$, elles appartiennent aux exposants $0, 1, 2$.

Relativement à α, les intégrales appartiennent aux exposants

$$-\frac{2a+a'}{9},\quad \frac{a-a'}{9},\quad \frac{2a'+a}{9}.$$

Donc, relativement à $(u-w)$, *les intégrales appartiennent aux exposants*

$$-\frac{2a+a'}{3},\quad \frac{a-a'}{3},\quad \frac{2a'+a}{3},$$

qui sont des nombres entiers. Partout ailleurs, elles appartiennent aux exposants $0, 1, 2$. Ainsi l'intégrale générale de l'équation canonique est bien une fonction uniforme de u.

4. Avant d'aller plus loin, il me paraît opportun de bien préciser l'argument w qui rend $p(w)$ nul. Son triple est une période. On le vérifie d'abord très aisément en prenant la fonction $\psi_3(u)$ (p. 72) :

$$\psi_3(u)=3\,p(u)\,p'^2(u)-\frac{1}{4}\,p''^2(u).$$

Dans le cas actuel, on a

$$p'^2(u)=4\,p^3(u)+1,\qquad p''=6p^2$$

et, par conséquent,

$$\psi_3(u)=3\,p(u)\,[p^3(u)+1].$$

Ainsi $\psi_3(w)=0$. Mais [p. 72, équation (24)], $\psi_3(u)$ est le dénominateur de $p(3u)$. On a donc

$$3w\equiv 0.$$

Je peux le vérifier autrement et préciser w davantage. Comme on a ici

$$p(\omega u) = \omega\, p(u),$$

ω étant racine cubique de l'unité, et que w n'est pas zéro, il faut que w et ωw ne soient pas distinctes, aux multiples près des périodes.

Je peux prendre pour périodes ϖ et $\omega\varpi$, J'ai ainsi

$$\omega w = w + m\varpi + n\omega\varpi;$$

d'où je conclus :

$$w = \frac{n-2m}{3}\varpi - \frac{m+n}{3}\omega\varpi = \frac{\mu}{3}\varpi + \frac{\mu'}{3}\omega\varpi,$$

les nombres μ, μ' satisfaisant à la condition $\mu + \mu' \equiv 0 \pmod 3$. Je pourrai donc poser

(11) $$w = (1-\omega)\frac{\varpi}{3},$$

et j'aurai ainsi

$$\omega w = w + \omega\varpi,$$
$$\omega^2 w = w - \varpi.$$

5. La transformée à variable u et à inconnue y jouit manifestement de la propriété suivante : elle reste inaltérée par le changement de u en ωu, ω étant une racine cubique de l'unité. Car elle provient d'une équation dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de α, par la substitution

$$p'(u) = 2\alpha - 1,$$

que n'altère pas le changement de u en ωu. Jointe à la connaissance des propriétés précédentes, cette dernière achève de définir entièrement les intégrales. C'est ce que je vais prouver.

Soient y_1, y_2, y_3 trois fonctions uniformes de la variable u; on les prend pour intégrales d'une équation linéaire du troisième ordre, à variable u, et l'on suppose que, par la nature des fonctions y, cette équation (A) *jouisse des propriétés suivantes :*

1° *L'équation* (A) *a ses coefficients doublement périodiques; le rapport des périodes est une racine cubique de l'unité;*

2° *Elle reste invariable par le changement de u en ωu, ω étant une racine cubique de l'unité;*

3° *Son invariant relatif V_u est nul pour $u = 0$.*

En outre, $\mathrm{p}(u)$ étant la fonction elliptique aux modules $g_2 = 0$, $g_3 = -1$ qui répond aux périodes données, et w la racine de $1 + \mathrm{p}'(w) = 0$, on suppose que les combinaisons linéaires des fonctions y appartiennent, relativement à u, aux exposants $2 - \mathrm{N}$, 2, $2 + \mathrm{N}$, et, relativement à $(u - w)$, aux exposants $-\frac{2a + a'}{3}$, $\frac{a - a'}{3}$, $\frac{2a' + a}{3}$, a et a' étant des entiers différents, dont la différence soit divisible par 3; enfin, relativement à tout autre binome $(u - v)$, aux exposants 0, 1, 2.

Ces suppositions faites, je dis que l'équation (A) *appartient à la classe définie par l'énoncé du* n° 3 (p. 176), *les nombres* N, *a, a' conservant de part et d'autre une même signification.*

Pour le prouver, j'observe d'abord que les invariants entiers de l'équation (A) n'ont, d'après les suppositions, d'autre infini que $u \equiv 0$ et $u \equiv w$.

Pour $u \equiv w$, les exposants auxquels appartiennent les combinaisons des y ne sont pas en progression arithmétique; donc (chapitre III, p. 146) l'invariant V_u est infiniment grand du troisième ordre. Par hypothèse, V_u est nul pour $u \equiv 0$. Donc V_u a nécessairement la forme

$$\mathrm{V}_u = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}\,\mathrm{p}(u)}{1 + \mathrm{p}'(u)}.$$

Mais, par hypothèse, le changement de u en ωu ne change pas l'équation (A). Comme V_u est un invariant du poids 3, il s'ensuit que ce changement le laisse absolument inaltéré. Donc V_u se réduit à la forme

$$\mathrm{V}_u = \frac{\mathrm{A}}{1 + \mathrm{p}'(u)},$$

et, pour $u \equiv 0$, il est infiniment petit du troisième ordre. Il en résulte que le numérateur de h, c'est-à-dire l'invariant relatif Δ_u, a le zéro quadruple $u \equiv 0$, et le seul infini $u \equiv w$, multiple d'ordre 8, égal à son poids (p. 143). Il a donc quatre autres zéros Mais Δ_u doit être inaltéré, sauf un facteur ω, par le changement de u en ωu. Il a donc, avec un zéro b, les zéros ωb, $\omega^2 b$. Le quatrième zéro doit se reproduire par ce changement. Ce n'est ni 0, ni w. Ce ne peut donc être que $-w$. Donc, à un facteur près, de la forme $\mathrm{B}e^{nu}$, j'ai

$$\Delta_u = \frac{\sigma(u + w)\,\sigma(u - b)\,\sigma(u - \omega b)\,\sigma(u - \omega^2 b)\,\sigma^4(u)}{\sigma(u - w)^8},$$

que je peux encore écrire

$$\Delta_u = \frac{\frac{\sigma(u+w)}{\sigma(u)} \frac{\sigma(u-b)\sigma(u-\omega b)\sigma(u-\omega^2 b)}{\sigma(u)^3}}{\left[\frac{\sigma(u-w)}{\sigma(u)}\right]^8}.$$

Le facteur $\frac{\sigma(u-b)\sigma(u-\omega b)\sigma(u-\omega^2 b)}{\sigma(u)^3}$ est doublement périodiques il est donc de la forme $a+b\,p'(u)$, à cause des propriétés évidentes dont il jouit. Quant aux facteurs $\frac{\sigma(u\pm w)}{\sigma(u)}$, ils ne sont pas doublement périodiques; mais, à une exponentielle près, leurs cubes sont dans ce cas, et reproduisent $1\pm p'(u)$. Cette exponentielle se confond avec celle que j'ai négligé d'écrire; car Δ_u^3 est, suivant les hypothèses, doublement périodique. J'ai donc

$$\Delta_u^3 = \mathrm{K}\frac{[1-p'(u)][a+b\,p'(u)]^3}{[1+p'(u)]^8}.$$

Avec V_u et Δ_u^3, je peux maintenant former h^3, qui, sauf un facteur numérique, est $\Delta^3 : \mathrm{V}^8$. Donc

$$h^3 = \mathrm{C}[1-p'(u)][a+b\,p'(u)]^3.$$

Prenons maintenant pour variable α, en posant

$$p'(u) = 2\alpha - 1,$$

et changeons les dénominations des constantes, nous pourrons écrire

$$h^3 = r(\alpha-1)(\alpha+c)^3,$$

$$\mathrm{V}_u = \frac{\mathrm{A}}{2\alpha}.$$

Calculons l'invariant V_α relatif à la variable α, nous aurons

$$\mathrm{V}_\alpha = \mathrm{V}_u\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^3 = \frac{\mathrm{A}}{2\alpha}\left[\frac{1}{3\,p^2(u)}\right]^3 = \frac{\mathrm{A}}{2.3^3\,\alpha^3(\alpha-1)^2}.$$

Par un choix convenable de la constante q, cette dernière formule coïncide exactement avec la formule (4), et de même l'expression qu'on vient de trouver pour h^3 coïncide avec l'expression (1). D'ailleurs, l'invariant absolu I résulte immédiatement de h et de V_α. Il est donc prouvé que l'équation (A) appartient à la classe (1). J'ai

négligé la détermination des constantes; mais *a posteriori* il est manifeste qu'ici c'est le cas particulier relaté dans l'énoncé du n° 3 qui a lieu. La proposition est donc prouvée.

6. Ainsi le problème d'intégration est ramené à la construction des fonctions y_1, y_2, y_3 satisfaisant aux conditions que je viens d'énoncer au n° 5. L'existence de l'équation (A) montre d'ailleurs que cette construction peut être réalisée.

Pour effectuer la construction, je change d'inconnue en posant

$$z = y\left[\frac{\sigma(u-w)}{\sigma(u)}e^{nu}\right]^{\frac{2a+a'}{3}}.$$

Ce changement n'altère pas V_u, puisque V_u est un invariant. Les exposants, dans chacun des deux cas, $u \equiv 0$, $u \equiv w$, sont seuls modifiés par l'addition d'une constante :

Relativement à $(u-w)$, *les combinaisons des fonctions* z *doivent appartenir aux exposants* 0, a, $a+a'$;

Relativement à u, *aux exposants* $\left(2 - \mathrm{N} - \frac{2a+a'}{3}\right)$ *au moins, et* V_u *doit être nul pour* $u \equiv 0$.

D'ailleurs, le facteur par lequel je viens de multiplier y se reproduit, sauf une puissance de ω [1], par le changement de u en ωu. Donc, de même que pour les fonctions y, *les combinaisons linéaires des fonctions* z *doivent se transformer les unes dans les autres par le changement de* u *en* ωu. En outre, l'exposant $\frac{2a+a'}{3}$ étant entier, les *fonctions* z *sont uniformes*, *et intégrales d'une équation à coefficients doublement périodiques* (aux périodes ϖ, $\omega\varpi$).

7. Pour faire comprendre le mode d'application de cette solution, je me contenterai de traiter un exemple, le plus simple, celui pour lequel on a

$$a = 1, \qquad a' = 4, \qquad \mathrm{N} = 1.$$

---

(1) La constante n de e^{nu} peut être choisie de telle sorte que ce but soit atteint. Car on a (n° 4) $w = \frac{\varpi}{3} - \omega\frac{\varpi}{3}$. Il suffira de prendre alors $n = \frac{2(\varepsilon'-\varepsilon)}{3}$, ε et ε' étant les constantes relatives au changement de u en $(u+\varpi)$ ou $(u+\varpi')$ dans la fonction σ, savoir $\varepsilon = \zeta\left(\frac{\varpi}{2}\right)$, $\varepsilon' = \zeta\left(\frac{\omega\varpi}{2}\right) = \omega^2\varepsilon$. (Voyez p. 61.)

On observera d'ailleurs que, suivant la remarque faite précédemment (n° 3), du même coup est traité l'exemple corrélatif $a = 4$, $a' = 1$, $N = 1$.

Pour le cas que je vais traiter, on a

$$2 - N - \frac{2a + a'}{3} = -1.$$

Ainsi les fonctions z ont seulement l'infini simple $u \equiv 0$. Il n'est donc pas douteux qu'il existe une intégrale de la forme de l'élément simple $\psi(u)$. Il en existe alors nécessairement deux autres de la même forme $\psi(\omega u)$, $\psi(\omega^2 u)$; car le rapport des périodes étant ω, ces deux nouvelles fonctions sont encore doublement périodiques de deuxième espèce.

Employant les mêmes notations que précédemment, j'ai l'intégrale

$$(12) \qquad z = \psi(u) = e^{[x-\zeta(v)]u} \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)}.$$

J'aurai, en second lieu, l'intégrale

$$z_1 = \psi(\omega u) = e^{[\omega x - \omega\zeta(v)]u} \frac{\sigma(\omega u + v)}{\sigma(\omega u)}.$$

Comme on a

$$\sigma(\omega u) = \omega\,\sigma(u),$$

il en résulte

$$\zeta(\omega u) = \omega^2 \zeta(u),$$

et l'on peut écrire

$$z_1 = \psi(\omega u) = e^{[\omega x - \zeta(\omega^2 v)]u} \frac{\sigma(u + \omega^2 v)}{\sigma(u)},$$

ou encore

$$z_1 = \psi(\omega u) = e^{[x_1 - \zeta(v_1)]u} \frac{\sigma(u + v_1)}{\sigma(u)},$$

avec ces conditions :

$$x_1 = \omega x, \qquad v_1 = \omega^2 v.$$

On aura de même cette troisième intégrale

$$z_2 = \psi(\omega^2 u) = e^{[x_2 - \zeta(v_2)]u} \frac{\sigma(u + v_2)}{\sigma(u)},$$

avec ces conditions :

$$x_2 = \omega^2 x, \qquad v_2 = \omega v.$$

Ceci entendu, je vais d'abord chercher la relation entre les cons-

tantes x, v, moyennant laquelle l'invariant V_u est nul pour $u = 0$.

Soit, suivant les puissances ascendantes de u,

$$z = \psi(u) = \frac{Q_0}{u} + Q_1 + Q_2 u + Q_3 u^2 + Q_4 u^3 + Q_5 u^4 + \ldots.$$

On aura de même :

$$z_1 = \psi(\omega\ u) = \frac{Q_0 \omega^2}{u} + Q_1 + Q_2 \omega\ u + Q_3 \omega^2 u^2 + Q_4 u^3 + Q_5 \omega\ u^4 + \ldots,$$

$$z_2 = \psi(\omega^2 u) = \frac{Q_0 \omega}{u} + Q_1 + Q_2 \omega^2 u + Q_3 \omega\ u^2 + Q_4 u^3 + Q_5 \omega^2 u^4 + \ldots.$$

Avec ces quantités, je forme d'autres combinaisons linéaires :

$$\zeta_1 = \frac{1}{3}(z + \omega\ z_1 + \omega^2 z_2) = \frac{Q_0}{u} \ * \quad * \ + Q_3 u^2 \quad * \qquad * \ + \ldots,$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{3}(z + \quad z_1 + \quad z_2) = \ * \ Q_1 \ * \qquad * \ + Q_4 u^3 \quad * \ + \ldots,$$

$$\zeta_3 = \frac{1}{3}(z + \omega^2 z_1 + \omega\ z_2) = \ * \quad * \ Q_2 u \quad * \qquad * \ + Q_5 u^4 + \ldots.$$

Je peux prendre ces fonctions ζ_1, ζ_2, ζ_3 pour intégrales au lieu de z, z_1, z_2; cela ne change pas V_u.

Je fais encore un autre changement, j'introduis deux nouvelles quantités ξ, η, en posant

$$\frac{Q_0}{Q_1}\frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \xi, \qquad \frac{Q_0}{Q_2}\frac{\zeta_3}{\zeta_1} = \eta,$$

et je développe η suivant les puissances croissantes de ξ. A cet effet, j'écris d'abord les développements suivant les puissances croissantes de u :

$$\xi = u\left(1 + \frac{Q_4}{Q_1}u^3 + \ldots\right)\left(1 + \frac{Q_3}{Q_0}u^3 + \ldots\right)^{-1} = u\left[1 + \left(\frac{Q_4}{Q_1} - \frac{Q_3}{Q_0}\right)u^3 + \ldots\right],$$

$$\eta = u^2\left(1 + \frac{Q_5}{Q_2}u^3 + \ldots\right)\left(1 + \frac{Q_3}{Q_0}u^3 + \ldots\right)^{-1} = u^2\left[1 + \left(\frac{Q_5}{Q_2} - \frac{Q_3}{Q_0}\right)u^3 + \ldots\right].$$

De là je tire les deux premiers termes du développement cherché :

$$(13) \qquad \eta = \xi^2 + \left(\frac{Q_5}{Q_2} + \frac{Q_3}{Q_0} - 2\frac{Q_4}{Q_1}\right)\xi^5 + \ldots.$$

Pour peu qu'on se souvienne du rapprochement que j'ai fait, au chapitre III, entre la théorie des invariants des équations linéaires

et celle des invariants différentiels, on reconnaîtra, sans plus d'étude, que la condition cherchée est

$$\frac{Q_5}{Q_2}+\frac{Q_3}{Q_0}-2\frac{Q_4}{Q_1}=0. \tag{14}$$

Car la condition $V_u=0$ exprime le contact exceptionnel entre la courbe, lieu du point dont les coordonnées sont ξ, η, avec une conique, au point $\xi=\eta=0$. Mais sans faire appel à cette notion géométrique, nous pouvons raisonner autrement et arriver rapidement au même résultat.

Prenons pour inconnue Y la fonction $Y=\frac{\zeta}{\zeta_1}$, où ζ est une combinaison linéaire arbitraire de ζ_1, ζ_2, ζ_3. Prenons pour variable indépendante ξ. Nous aurons ainsi une transformée de notre équation ayant pour intégrales particulières

$$Y=1,\quad \xi,\quad \eta.$$

Cette équation se réduit donc à la forme

$$\frac{d^3Y}{d\xi^3}+3P_1\frac{d^2Y}{d\xi^2}=0.$$

Suivant un calcul déjà fait au chapitre III [p. 117, équation (19)], en accentuant les dérivées par rapport à ξ, on a

$$P_1=-\frac{\eta'''}{3\eta''},\qquad V_\xi=\frac{1}{3}\left(\frac{\eta'''}{\eta''}\right)''-\frac{2}{3}\frac{\eta'''}{\eta''}\left(\frac{\eta'''}{\eta''}\right)'+\frac{4}{27}\left(\frac{\eta'''}{\eta''}\right)^3.$$

Or on a, d'après (13),

$$\frac{\eta'''}{\eta''}=30\left(\frac{Q_5}{Q_2}+\frac{Q_3}{Q_0}-2\frac{Q_4}{Q_1}\right)\xi^2+\ldots.$$

Il en résulte immédiatement que la condition $V_\xi=0$ pour $\xi=0$ est précisément l'équation (14). Or cette condition ne diffère pas de la condition proposée $V_u=0$; car on a

$$V_u=V_\xi\left(\frac{d\xi}{du}\right)^3,$$

et, d'après le développement de ξ, $\frac{d\xi}{du}$ est égal à l'unité pour $u=0$.

De ce calcul nous pouvons même déduire une vérification du fait prouvé différemment au n° 5, à savoir que, si V_u est infiniment petit

pour $u = 0$, il est certainement infiniment petit du troisième ordre. Effectivement les développements précédents ne contiennent que des termes dont les exposants sont congrus entre eux (mod 3) dans un même développement. Donc V_u a la forme

$$V_u = \mathcal{A} + \mathcal{B} u^3 + \mathcal{C} u^6 + \ldots,$$

et si $\mathcal{A}$ est nul, V_u a le zéro triple $u \equiv 0$.

On ne manquera pas d'observer que ce calcul s'applique, pour ainsi dire sans modification, aux cas que je n'ai pas en vue de traiter ici. Exactement par le même procédé, on trouvera, dans tous les cas, et sous la même forme, l'équation de condition qui exprime la condition $V_u = 0$ pour $u \equiv 0$.

Seulement dans chaque cas les coefficients Q_0, Q_1, ... seront différents. Dans le cas actuel, ce sont les coefficients du développement de l'élément simple $\psi(u)$, dont nous nous sommes déjà servis plusieurs fois, et qui sont donnés par les formules (31) et (32) [p. 83 et 84]. C'est ici le cas particulier $g_2 = 0$. Mettant au lieu de Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 leurs expressions données par ces formules, j'obtiens la relation suivante, déduite de (14), où j'écris p, p' au lieu de $p(v)$, $p'(v)$:

$$\frac{1}{3.4.5}\,\frac{x^5 - 10px^3 - 10p'x^2 - 15p^2x - 2pp'}{x^2 - p} + \frac{1}{2.3}(x^3 - 3px - p') - \frac{1}{3.4}\,\frac{x^4 - 6px^2 - 4p'x - 3p^2}{x} = 0.$$

Cette équation se simplifie beaucoup et devient

$$(15) \qquad 2x^6 - 5px^4 - 4pp'x - 5p^3 = 0.$$

Telle est notre première équation de condition.

8. Il nous faut maintenant trouver la condition qui exprime que, relativement à $(u - w)$, les combinaisons des intégrales appartiennent aux exposants 0, a, $a + a'$, qui sont ici 0, 1, 5. Pour ce but, on formera, avec les fonctions envisagées, la combinaison linéaire qui, pour $u = w$, est infiniment petite d'ordre supérieur au premier; on devra exprimer que cette combinaison est d'ordre supérieur au second, et vérifier qu'alors elle sera bien du cinquième ordre. C'est, en effet, ce qui doit arriver, puisque nous ne disposons plus que d'une seule constante.

Reprenons les fonctions

$$z = \psi(u), \qquad z_1 = \psi(\omega u), \qquad z_2 = \psi(\omega^2 u),$$

et faisons

$$u = w + U,$$

U étant la nouvelle variable.

Rappelons-nous aussi les propriétés de l'argument w, savoir

(16) $$\omega w = w + \omega\varpi, \qquad \omega^2 w = w - \varpi.$$

Pour plus de clarté, posons

$$\psi(u) = \psi(w + U) = F(U).$$

Désignons par μ, μ_1, μ_2 les multiplicateurs relatifs à la période ϖ pour les fonctions $\psi(u)$, $\psi(\omega u)$, $\psi(\omega^2 u)$, en sorte que

$$\psi(u+\varpi) = \mu\,\psi(u), \qquad \psi[\omega(u+\varpi)] = \mu_1\,\psi(\omega u),$$
$$\psi[\omega^2(u+\varpi)] = \mu_2\,\psi(\omega^2 u);$$

les multiplicateurs ne sont pas indépendants; et il est très facile de voir qu'ils sont respectivement μ, μ^ω, μ^{ω^2}; mais cette propriété m'est ici inutile.

D'après ces définitions, nous avons

$$F(\omega U) = \psi(w + \omega U) = \psi[\omega(\omega^2 w + U)]$$

et, d'après la deuxième équation (16),

(17) $$F(\omega U) = \psi[\omega(U + w - \varpi)] = \frac{1}{\mu_1}\psi[\omega(U + w)].$$

Si, de même, en envisageant les intégrales $\psi(\omega u)$, $\psi(\omega^2 u)$, nous posons

$$\psi(\omega\, u) = \psi[\omega\,(w + U)] = F_1(U),$$
$$\psi(\omega^2 u) = \psi[\omega^2(w + U)] = F_2(U),$$

la relation (17) peut s'écrire

$$F(\omega\, U) = \frac{1}{\mu_1}F_1(U),$$

et de même

$$F(\omega^2 U) = \frac{1}{\mu_2}F_2(U).$$

Développement F(U) suivant les puissances croissantes de U, et

soit

$$F(U) = A_0 + A_1 U + A_2 U^2 + A_3 U^3 + A_4 U^4 + A_5 U^5 + \dots$$

ce développement. J'aurai les autres intégrales

$$\frac{1}{\mu_1} F_1(U) = A_0 + A_1 \omega\, U + A_2 \omega^2 U^2 + A_3 U^3 + A_4 \omega\, U^4 + A_5 \omega^2 U^5 + \dots,$$

$$\frac{1}{\mu_2} F_2(U) = A_0 + A_1 \omega^2 U + A_2 \omega\, U^2 + A_3 U^3 + A_4 \omega^2 U^4 + A_5 \omega\, U^5 + \dots$$

Avec ces trois quantités, on forme ainsi une combinaison qui, pour $U = 0$, est infiniment petite d'ordre supérieur au premier :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{3}\left(F + \frac{\omega}{\mu_1} F_1 + \frac{\omega^2}{\mu_2} F_2\right) = A_2 U^2 + A_5 U^5 + \dots.$$

La condition cherchée est $A_2 = 0$, et, comme on voit, la vérification s'effectue; car si A_2 est nul, la fonction $\mathcal{F}$ appartient à l'exposant 5, relativement à $U = (u - w)$.

Si maintenant nous remontons à la définition de F, nous concluons que la condition cherchée s'exprime ainsi :

Pour $u = w$, la dérivée seconde de $\psi(u)$ doit être nulle :

$$\psi''(w) = 0. \tag{18}$$

Telle est notre seconde équation de condition.

Il s'agit maintenant de transformer cette équation de condition de manière à y mettre en évidence les constantes x, $p(v)$, $p'(v)$, qui figurent déjà dans l'équation (15). Rappelons-nous la définition de $\psi(u)$, savoir :

$$\psi(u) = e^{[x - \zeta(v)]u} \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)}.$$

J'en déduis, suivant une formule déjà rappelée (p. 86) :

$$\frac{\psi'(u)}{\psi(u)} = x + \zeta(u+v) - \zeta(u) - \zeta(v) = x + \frac{1}{2}\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)},$$

$$\frac{\psi''(u)}{\psi(u)} = \left[x + \frac{1}{2}\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)}\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left[\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)}\right].$$

Le dernier terme $\frac{1}{2}\frac{d}{du}\left[\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)}\right]$ se réduit à $-\frac{1}{2}\frac{1 + p'(v)}{p(v)^2}$ pour $u = w$. Car on a

$$p'(w) = -1 \quad \text{et} \quad p''(w) = 6p^2(w) = 0.$$

L'équation (18) se transforme donc ainsi [j'écris p, p' au lieu de $p(v)$, $p'(v)$] :

$$\left(x + \frac{1}{2}\,\frac{1+p'}{p}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{1+p'}{p^2} = 0. \tag{19}$$

Nous n'avons plus qu'un problème purement algébrique : résoudre, par rapport aux inconnues x, p, p', le système composé de l'équation (19), de l'équation (15) et de l'équation

$$p'^2 = 4p^3 + 1. \tag{20}$$

Voici le détail de la solution.

9. Je transcris ici les équations (15), (19), (20), après avoir transformé au moyen de (20) l'équation (19) en celle-ci :

$$x^2 + \frac{1+p'}{p}x + p = 0, \tag{A}$$

$$2x^6 - 5px^4 - 4pp'x - 5p^3 = 0, \tag{B}$$

$$p'^2 = 4p^3 + 1. \tag{C}$$

Éliminant la première puissance de x entre (A) et (B) et faisant

$$x^2 = p\xi, \tag{D}$$

j'obtiens

$$2\xi^3 - 5\xi^2 + \frac{4p'}{1+p'}(\xi + 1) - 5 = 0. \tag{B'}$$

De (A) je déduis

$$(x^2 + p)^2 = \left(\frac{1+p'}{p}\right)^2 x^2.$$

Éliminant p et x de cette dernière au moyen de (C) et (D), j'obtiens

$$\xi^2 + 1 - 2\frac{p'+3}{p'-1}\xi = 0. \tag{A'}$$

Enfin, en éliminant p' entre (A') et (B'), j'obtiens l'équation suivante pour ξ :

$$(\xi^2 - 1)(2\xi + 3) = 0, \tag{E}$$

après avoir rejeté un facteur $(\xi - 1)^2$, ce qui doit se faire; car on a

pour p' cette expression tirée de (A') :

$$(F) \qquad p' = \frac{\xi^2 + 6\xi + 1}{(\xi - 1)^2}.$$

La solution $\xi = 1$ donne donc $p'(v) = \infty$, ou $v = 0$, ce qui est une solution à rejeter. Cette même solution existe encore une fois dans (E), il faut la rejeter encore. La solution $\xi = -1$ donne, en vertu de (F), $p' = -1$. Cette solution est à rejeter; car elle donne $v = w$, et les trois fonctions $\psi(u)$, $\psi(\omega u)$, $\psi(\omega^2 u)$, se confondant, ne donnent pas lieu à une équation du troisième ordre. Il ne reste donc que la solution $\xi = -\frac{3}{2}$, pour laquelle l'équation (F) nous donne

$$(21) \qquad p'(v) = -\frac{23}{25},$$

et l'équation (A) donne x sans ambiguïté, puisque $\xi = \frac{x^2}{p}$ est déjà connu :

$$(22) \qquad x = \frac{25}{4} p^2(v).$$

L'intégrale cherchée se compose des trois fonctions

$$z = e^{[x - \zeta(v)]u} \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)},$$

les constantes v, x étant déterminées par les équations (22) *et* (21), *qui ont trois solutions.*

On remarquera, à titre de vérification, que les trois systèmes de solutions v, x sont bien liés entre eux par les relations prévues (p. 183); car, en vertu de la relation $p(\omega u) = \omega p(u)$, ces systèmes sont

$$(v, x), \quad (\omega v, \omega^2 x), \quad (\omega^2 v, \omega x).$$

Revenant maintenant à l'inconnue primitive canonique y, *j'ai les trois solutions :*

$$y = \left[\frac{\sigma(u)}{\sigma(u-w)} e^{-nu}\right]^2 \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)} e^{[x - \zeta(v)]u}$$

ou, en réduisant et mettant pour n sa valeur,

$$(23) \qquad y = \frac{\sigma(u)\sigma(u+v)}{\sigma(u-w)^2} e^{\left[x - \zeta(v) + \frac{4(\varepsilon - \varepsilon')}{3}\right]u}.$$

Les constantes (v, x), *qui forment trois systèmes, sont données par les équations* (22), (21). *Telle est la solution* (23) *de l'équation canonique définie par l'énoncé du n°* 3, *dans le cas particulier* $a = 1$, $a' = 4$, $\mathrm{N} = 1$. *On a posé* $2\alpha - 1 = \wp'(u)$, *la fonction elliptique* $\wp(u)$ *satisfaisant à la relation* $\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) + 1$. *L'argument* w *répond à* $\alpha = 0$; *et* ϖ, ϖ' *étant les périodes, on a*

$$\varepsilon = \zeta\left(\frac{\varpi}{2}\right), \qquad \varepsilon' = \zeta\left(\frac{\varpi'}{2}\right).$$

Remarque. — En toute rigueur, on n'a pas encore prouvé entièrement que ces intégrales (23) sont les intégrales canoniques, mais seulement qu'elles leur sont proportionnelles, le rapport commun étant une exponentielle e^{mu}. Mais comme les intégrales canoniques doivent s'échanger les unes dans les autres par le changement de u en ωu, et que les intégrales (23) sont dans ce cas, il s'ensuit que l'exponentielle e^{mu} est une simple constante.

Je viens de traiter encore, comme dans le chapitre précédent, une application dans laquelle interviennent des fonctions elliptiques particulières, caractérisées par le module $g_2 = 0$, ou $1 - k^2 + k^4 = 0$.

D'après l'énoncé du n° 2, la classe générale d'équations définie par les relations (1) comprend encore des cas où l'intégration se fait au moyen de fonctions elliptiques qui sont aussi caractérisées par ce même module $g_2 = 0$. Je ne les traiterai pas à ce point de vue, et je montrerai au chapitre IX que ces cas sont compris dans une classe plus générale, où le module est quelconque.

CHAPITRE VI.

Applications. — Intégration des équations définies au commencement du chapitre V, dans les cas où cette intégration s'effectue par des fonctions rationnelles. — Méthode générale. — Exemples : trois exemples se rattachant à l'équation $X^2 + Y^3 + Z^3 = 0$. — Quatre exemples se rattachant à l'équation $X^2 + Y^3 + Z^4 = 0$. — Série nouvelle de cas d'intégration, contenant un paramètre arbitraire. — Deux exemples se rattachant à l'équation $X^2 + Y^3 + Z^5 = 0$.

---

1. Je m'occuperai, dans ce chapitre, des équations mentionnées dans l'énoncé du n° 2 du chapitre précédent, et qui sont intégrables par des fonctions rationnelles. Je répète ici cet énoncé :

Soit la classe d'équations linéaires du troisième ordre définie par

$$(1)\qquad \begin{cases} h^3 = r(\alpha - 1)(\alpha + c)^3, \\ l = q\alpha\left(\alpha + \dfrac{c-3}{4}\right), \end{cases}$$

où α est une variable auxiliaire, et où les constantes r, q, c sont déterminées en fonction de deux nombres commensurables $\frac{a}{m}$, $\frac{a'}{m}$, différents entre eux :

$$(2)\qquad \begin{cases} r = \dfrac{7^3}{2^7}\,\dfrac{m^6}{[(a'-a)(2a'+a)(2a+a')]^2}, \\ q = \dfrac{7}{2}\,\dfrac{m^3}{(a'-a)(2a'+a)(2a+a')}, \\ c = \dfrac{2^2 3}{7}\,\dfrac{a^2+a'^2+aa'}{m^2}. \end{cases}$$

Les nombres a, a', m sont entiers et positifs; $\frac{a}{m}$, $\frac{a'}{m}$, $\frac{a+a'}{m}$ sont tous trois fractionnaires et ont pour plus petit commun dénominateur m.

Si m est l'un des nombres 3, 4, 5, les rapports des intégrales et la variable α s'expriment rationnellement en fonction d'une même variable.

J'ajoute les résultats de la discussion faite au début du chapitre précédent.

Par rapport à la variable α, *les intégrales canoniques n'ont que trois points singuliers* $\alpha = 0, 1, \infty$.

Relativement à $(\alpha - 1)$, *elles appartiennent aux exposants* $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, *en sorte que* $\alpha = 1$ *est un point critique du troisième ordre pour leurs rapports.*

Relativement à $\frac{1}{\alpha}$, *elles appartiennent aux exposants* $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}$, *en sorte que* $\alpha = \infty$ *est un point critique du second ordre pour leurs rapports.*

Relativement à α, *elles appartiennent aux exposants* $-\frac{2a+a'}{3m}$, $\frac{a-a'}{3m}$, $\frac{a+2a'}{3m}$, *et* $\alpha = 0$ *est, pour leurs rapports, un point critique d'ordre* m.

La théorie que j'ai exposée dans le chapitre I donne immédiatement ici les procédés à suivre pour l'intégration.

Soit y l'intégrale générale canonique; appliquons-y la proposition IX (p. 39) [pour que les lettres s'accordent avec celles qui ont été adoptées précédemment, j'échange ici les lettres X, Z]. *Considérons la solution primitive* X, Y, Z *de l'équation*

$$X^2 + Y^3 + Z^m = 0$$

en polynomes entiers d'une variable η. *Posons*

$$\alpha = -\frac{Z^m}{X^2}, \tag{3}$$

d'où résulte

$$\alpha - 1 = \frac{Y^3}{X^2};$$

il résulte de la proposition IX, et l'on peut aisément vérifier ici que, *si l'on pose*

$$y = \left(\frac{X}{Z^{2a+a'}}\right)^{\frac{1}{3}} z, \tag{4}$$

la nouvelle inconnue z *est un polynome entier de la nouvelle variable* η.

Le degré commun de X^2, Y^3, Z^m par rapport à η est

$$M = \frac{12m}{6-m};$$

le degré du polynome entier z est

$$d = \frac{2}{6-m}[2(2a+a')-m]. \tag{5}$$

Ce nombre d, d'après les conditions imposées, et les valeurs 3, 4, 5 que peut prendre m, est effectivement, comme il convient, toujours un nombre entier.

En ce qui concerne les exposants auxquels appartiennent les polynomes z et leurs combinaisons, on reconnaît que *les combinaisons linéaires des polynomes z appartiennent aux exposants* 0, 1, 2, *relativement à tout binome* $(\eta-\beta)$ *autre que ceux où* β *est une racine de* Z. *Relativement à* $(\eta-\eta_0)$, η_0 *étant racine de* Z, *les combinaisons linéaires des polynomes z appartiennent aux exposants* 0, a, $a+a'$.

A chaque valeur de α correspondent M valeurs différentes pour la variable η; et ces M valeurs se déduisent d'une seule d'entre elles par les substitutions linéaires d'un certain groupe G, d'ordre fini (chapitre I). Il en résulte, pour tout polynome z, M déterminations pour chaque valeur de α. D'ailleurs, le facteur qui figure dans (4), et qui est le rapport de y à z, est inaltéré (sauf un coefficient numérique) par les substitutions de G; donc, par les substitutions de G, z acquiert M valeurs qui sont liées par des relations linéaires identiques. En d'autres termes, si l'on prend trois des polynomes z, et qu'on effectue, dans les polynomes, sur η_1, η_2, les substitutions de G, cette opération a pour effet de transformer l'ensemble des trois polynomes z par des substitutions linéaires; ces dernières forment aussi un groupe.

2. Pour effectuer l'intégration, sans recourir à des transformations qui seraient presque toujours impraticables, je me servirai de ces propriétés comme je l'ai fait précédemment pour l'équation de Gauss (chapitre I, n° 19, p. 44). Je vais d'abord prouver que les propriétés précédentes définissent entièrement les polynomes z. Voici la proposition que je vais, à cet effet, démontrer :

Soient trois polynomes entiers d'une variable η [1], *ayant les propriétés suivantes :*

---

[1] Dans cet énoncé, il faut entendre que la variable η est remplacée par $\eta_1 : \eta_2$, que le dénominateur est supprimé; et ensuite que les substitutions de G sont mises sous forme entière par rapport à η_1 et η_2.

1° *Relativement à tout binome* $(\eta - \beta)$, *où* β *n'est pas racine du polynome entier* Z, *faisant partie de la solution primitive de* $X^2 + Y^3 + Z^m = 0$, *leurs combinaisons linéaires appartiennent aux exposants* 0, 1, 2;

2° *Relativement à tout binome* $(\eta - \eta_0)$, *où* η_0 *est racine de* Z, *leurs combinaisons appartiennent aux exposants* 0, a, $a + a'$ (a, a' étant entiers positifs);

3° *Ils se transforment entre eux par une substitution linéaire, quand on effectue sur* η *les substitutions du groupe* G, *qui est lié à l'équation* $X^2 + Y^3 + Z^m = 0$.

Ces trois polynomes sont les intégrales d'une équation linéaire du troisième ordre appartenant à la classe définie ci-dessus, les lettres a, a', m *ayant, de part et d'autre, une même signification.*

Il est bon d'ajouter ici une observation relativement à la valeur infinie de η. On doit regarder $\frac{1}{\eta}$ comme étant un des binomes $(\eta - \beta)$; et, comme il s'agit de polynomes entiers, on doit entendre que, si d est leur degré, les combinaisons de ces polynomes appartiennent aux exposants $-d, -d+1, -d+2$, relativement à $\frac{1}{\eta}$.

Par une substitution linéaire, on peut toujours faire en sorte que le polynome Z n'ait ni la racine 0, ni la racine ∞; et c'est ce qu'on pourra supposer pour le raisonnement. Dans les applications, il n'en sera plus de même; mais ceci ne trouble en rien les résultats. Au reste, ces difficultés apparentes disparaissent d'elles-mêmes quand, au lieu de η, on met deux variables homogènes η_1, η_2 dans X, Y, Z, et qu'on considère η comme étant une fraction à coefficients arbitraires :

$$\eta = \frac{\lambda\,\eta_1 + \mu\,\eta_2}{\lambda'\eta_1 + \mu'\eta_2}.$$

Cette supposition faite pour le raisonnement, on peut ensuite, pour l'application, faire $\mu = 0$, $\lambda' = 0$, $\lambda = \mu'$, en sorte que $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$.

Avant de faire la démonstration, je dois encore observer que les nombres a, a' et le degré d des polynomes, qui jouissent des propriétés mentionnées, sont liés par une relation. Effectivement le déterminant U

$$U = (z_1 z'_2 z''_3)_\eta$$

est du degré $3(d-2)$. D'après les suppositions faites, il n'a pour racines que celles de Z, et chacune avec l'ordre de multiplicité $(2a+a'-3)$. Le degré de Z est $\frac{M}{m}$, ou, d'après la valeur de M, rappelée tout à l'heure, $\frac{12}{6-m}$. On a donc nécessairement

$$3(d-2)=\frac{12}{6-m}(2a+a'-3),$$

ce qui concorde avec la formule (5).

3. J'arrive à la démonstration; elle est fondée sur les résultats de la discussion contenue à la fin du chapitre III.

J'envisage l'équation (A) dont la variable est η, et dont les intégrales sont les trois polynomes z_1, z_2, z_3. Je prends l'invariant V_η de cette équation, relatif à la variable η. D'après les suppositions, il n'a pour infinis que les zéros de Z, chacun triple. Donc V_η est une fraction rationnelle dont le dénominateur est Z^3. Quant à son numérateur, il est manifeste que c'est une fonction inaltérée, sauf un facteur, par les substitutions de G. On pourra donc trouver immédiatement sa forme, dès qu'on connaîtra son degré (proposition VI, p. 28). Or ce degré nous est connu, car l'invariant V_η, du poids 3, doit être infiniment petit du sixième ordre pour $\eta=\infty$ (p. 148). Le degré du numérateur est donc inférieur de six unités au triple du degré de Z, c'est-à-dire qu'il est égal à

$$3\frac{M}{m}-6=\frac{6m}{6-m}=\frac{1}{2}M.$$

De là résulte que ce numérateur ne peut être autre chose que le polynome X; on a donc

$$V_\eta=A\frac{X}{Z^3},$$

A étant un coefficient numérique.

J'envisage maintenant l'invariant absolu h, et d'abord son numérateur Δ_η, qui est un invariant relatif, du poids 8. L'invariant h a une limite finie et différente de zéro pour les racines de Z (p. 143). Comme son dénominateur est $V^{\frac{8}{3}}$; il en résulte que Δ_η est infini du huitième ordre; donc le dénominateur de Δ_η est Z^8. D'après un

principe que je viens de rappeler, le numérateur de Δ_η est du degré

$$8\frac{M}{m} - 16 = \frac{4}{3}M = M + \frac{1}{3}M.$$

Suivant la même proposition VI, dont je viens déjà de faire usage, le numérateur de Δ_η a la forme $Y(cX^2 - Z^m)$; ainsi l'on a

$$\Delta_\eta = B\frac{Y}{Z^8}(cX^2 - Z^m),$$

où B, c sont des coefficients numériques, et, par suite,

$$h^3 = r\frac{Y^3(cX^2 - Z^m)^3}{X^8},$$

r étant un coefficient numérique. Prenons maintenant α pour variable en posant

$$\alpha = -\frac{Z^m}{X^2}; \qquad \text{d'où résulte} \qquad \alpha - 1 = \frac{Y^3}{X^2}.$$

Comme il s'agit d'une solution primitive, il en résulte (p. 19), C étant encore un coefficient numérique,

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = C\frac{Z^{m-1}Y^2}{X^3}.$$

Au moyen de ces dernières relations j'obtiens

$$V_\alpha = V_\eta\left(\frac{d\eta}{d\alpha}\right)^3 = \frac{A}{C^3}\,\frac{X^{10}}{Z^{3m}Y^6} = -\frac{A}{C^3}\,\frac{1}{\alpha^3(\alpha-1)^2}.$$

De là résulte immédiatement l'invariant absolu l, et l'on voit que h^3, l s'expriment en fonction de α, précisément sous la forme (1). Quant aux coefficients numériques, leur identité dans les deux cas résulte de la discussion faite, dans le chapitre précédent, au sujet des points critiques des équations de la classe (1).

La proposition énoncée au n° 2 est donc prouvée. De cette proposition et de ce fait que l'équation différentielle existe, je peux conclure que, *pour chaque cas, c'est-à-dire pour chaque système de valeurs des nombres a, a'* (satisfaisant avec m aux conditions de l'énoncé du n° 1), *il existe un, et un seul, système de polynomes z satisfaisant aux conditions de l'énoncé du n° 2*. Je pourrai donc, dans chaque cas, employer, pour les construire, un procédé arbitraire.

4. Le procédé naturel et régulier d'intégration qui résulte de cette analyse est le suivant.

Soit η_0 une racine de Z; une des combinaisons des polynomes z doit appartenir, relativement à $(\eta - \eta_0)$, à l'exposant $(a + a')$. On connaît le degré d des polynomes z; on en a donc un de la forme

$$z = (\eta - \eta_0)^{a+a'}\zeta,$$

où ζ est un polynome de degré $(d - a - a')$. Effectuant maintenant sur η les substitutions du groupe G, on déduira de z d'autres polynomes analogues :

$$z' = (\eta - \eta'_0)^{a+a'}\zeta',$$
$$z'' = (\eta - \eta''_0)^{a+a'}\zeta'',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et l'on déterminera les arbitraires de ζ : 1° par cette condition que trois seulement des polynomes z, z', z'', ... soient linéairement distincts; 2° par cette autre condition que la combinaison linéaire faite avec deux d'entre eux, z', z'', par exemple, de manière à ce que cette combinaison soit un polynome ayant la racine η_0, ait cette racine multiple d'ordre a. De cette manière, toutes les conditions seront remplies; car, d'après le mode de formation, toutes les racines de Z joueront un seul et même rôle.

De plus, d'après la remarque ci-dessus, on est assuré que le problème a une solution, et une seule.

Quand on applique ce mode de solution, il arrive le plus souvent, au moins dans les premiers exemples, que la connaissance des propriétés du groupe G montre d'une manière certaine quelles doivent être les racines du polynome ζ; en sorte que la solution est presque immédiate.

Dans certains cas, on réussit à former les polynomes z par un procédé différent, mais dont le succès n'est pas certain. Ce procédé est fondé sur une remarque analogue à celle que j'ai faite au chapitre Ier pour l'équation de Gauss (p. 46). Soit φ un covariant des polynomes X, Y, Z. Prenons ses trois dérivées partielles du second ordre φ_{11}, φ_{12}, φ_{22}. Les substitutions du groupe G, effectuées sur η dans ces trois dérivées, ont pour effet de les transformer elles-mêmes par des substitutions linéaires. Si donc ces trois polynomes jouissent des propriétés voulues relativement aux exposants, ils fourniront des polynomes z propres à la solution d'un cas de notre équation.

5. Je vais maintenant effectuer les calculs complètement pour un certain nombre d'exemples, et je commence par les cas qui se rattachent à l'équation $X^2 + Y^3 + Z^3 = 0$.

Je rappelle d'abord que les polynomes X, Y, Z sont les suivants (p. 25) :

$$X = \eta_1 \eta_2 (\eta_1^4 - \eta_2^4),$$
$$Y = \eta_1^4 - 2i\sqrt{3}\,\eta_1^2 \eta_2^2 + \eta_2^4,$$
$$Z = \eta_1^4 + 2i\sqrt{3}\,\eta_1^2 \eta_2^2 + \eta_2^4,$$

liés par la relation

$$Z^3 - Y^3 = 12 i \sqrt{3}\, X^2,$$

en sorte qu'il faudra poser

$$12 i \sqrt{3}\, \alpha = \frac{Z^3}{X^2}.$$

La formule (5), qui donne le degré d des polynomes z, devient, pour $m = 3$,

$$d = \frac{2}{3}[2(2a + a') - 3].$$

Les entiers a, a', divisés par 3, doivent donner le même reste. On se rappellera que, du même coup, on intègre deux équations de la même classe générale; car la classe adjointe ne diffère que par l'échange de a, a'.

Premier exemple : $a = 1$, $a' = 4$; d'où résulte $d = 6$.

Désignons par a_0, a_1, a_2, a_3 les racines du polynome Z. Suivant la méthode qui vient d'être expliquée (n° 4), j'envisage quatre polynomes :

$$z_0 = (\eta - a_0)^5 (\eta - c_0),$$
$$z_1 = (\eta - a_1)^5 (\eta - c_1),$$
$$z_2 = (\eta - a_2)^5 (\eta - c_2),$$
$$z_3 = (\eta - a_3)^5 (\eta - c_3),$$

déduits les uns des autres par les substitutions de G, qui échangent les racines a_0, a_1, ... de Z. Quant aux substitutions qui laissent inaltérée a_0, il faut bien ici qu'elles laissent inaltérée c_0. Donc : 1° Appliquées à c_0, les substitutions de G ne donnent que quatre quantités différentes. En conséquence, c_0 est nécessairement une racine de Y ou de Z. Il faut, d'ailleurs, noter que ce ne peut être a_0, sans quoi les polynomes n'appartiendraient pas aux exposants

donnés, relativement à $(\eta - a_0)$; 2° a_0 et c_0 restent inaltérées par les mêmes substitutions. Cette propriété ne peut appartenir à deux racines du même polynome Z, comme il est très aisé de le voir. *Donc* c_0 *est une racine de* Y, *adjointe à* a_0.

Cette *adjonction* d'une racine de Y à chaque racine de Z est un fait qui se vérifie avec une grande facilité. Les racines de Z sont les suivantes :

$$a_0 = \frac{1+i}{2}(-1+\sqrt{3}), \qquad a_1 = -a_0, \qquad a_2 = \frac{1}{a_0}, \qquad a_3 = \frac{1}{a_1}.$$

Quant à celles de Y, on peut les écrire ainsi :

$$b_0 = ia_3, \qquad b_1 = ia_2, \qquad b_2 = ia_0, \qquad b_3 = ia_1,$$

b_n étant la racine qui se déduit de a_n par le changement de signe de $\sqrt{3}$. Elles sont liées entre elles par les mêmes relations que les racines a correspondantes :

$$b_1 = -b_0, \qquad b_2 = \frac{1}{b_0}, \qquad b_3 = \frac{1}{b_1}.$$

Or le groupe G dérive des substitutions

$$(\mathrm{G}) \qquad \eta' = -\eta, \qquad \eta' = \frac{1+i\eta}{1-i\eta}.$$

Les formules précédentes montrent qu'à l'égard de la première substitution (G), son effet sur une couple de deux racines adjointes (a_n, b_n) est de la changer en une couple de deux racines adjointes.

Il en est encore de même pour la seconde substitution (G); car si l'on pose

$$a'_n = \frac{1+ia_n}{1-ia_n}, \qquad b'_n = \frac{1+ib_n}{1-ib_n},$$

on trouve sans difficulté :

$$\begin{aligned} a'_0 &= a_0, & b'_0 &= b_0, \\ a'_1 &= a_2, & b'_1 &= b_2, \\ a'_2 &= a_3, & b'_2 &= b_3, \\ a'_3 &= a_1, & b'_3 &= b_1. \end{aligned}$$

Ainsi, *si l'on désigne par* a_n, b_n *deux racines adjointes de* Z *et de* Y, *la solution pour* $a = 1$, $a' = 4$ *est composée des intégrales particulières*

$$y = \frac{X^{\frac{1}{3}}}{Z^2}(\eta - a_n)^5(\eta - b_n).$$

On voit qu'ici la solution a été trouvée sans qu'on ait eu besoin de recourir à la condition que les polynomes z ne soient linéairement distincts qu'au nombre de trois. Pour vérification, nous pouvons alors recourir à cette condition, et nous assurer qu'effectivement les quatre polynomes

$$z_n = (\eta - a_n)^5 (\eta - b_n)$$

sont liés par une relation linéaire et homogène. Sans donner le calcul dans tout le détail, j'en indique seulement les traits principaux, permettant de le reconstituer sans effort.

La relation qui lie ces polynomes est

$$z_0 - z_1 + i a_0^4 (z_2 - z_3) = 0.$$

Pour prouver cette relation, on peut procéder ainsi : envisageant le premier membre φ de cette équation, on démontre, au moyen des relations ci-dessus que φ est invariable, sauf un facteur, par les substitutions de G. Le degré de φ étant égal à 6, on conclut (p. 28) que φ ne diffère de X que par un facteur. Pour prouver que ce facteur est zéro, on cherchera le coefficient du terme du plus haut degré. Or ce coefficient est visiblement zéro, c'est-à-dire que le degré de φ s'abaisse à 5 quand on prend la variable η comme on l'a prise ici; ou, pour écarter toute difficulté, si l'on prend les variables homogènes η_1, η_2, on voit que φ a le facteur η_2 comme X. Cette vérification ne peut donc suffire, et il faut prendre le coefficient d'un autre terme. En prenant dans φ le terme en η^5, lequel existe dans X, on lui trouve pour coefficient

$$\frac{1}{a_0}(a_0^6 - 5 i a_0^4 - 5 a_0^2 + i),$$

et pour s'assurer que ce coefficient est zéro, il suffit d'observer l'identité

$$\eta^6 - 5 i \eta^4 - 5 \eta^2 + i = (\eta^2 - i)[\eta^2 + (1 + i)\eta - i][\eta^2 - (1 + i)\eta - i],$$

où l'on reconnaît que le facteur $[\eta^2 + (1 + i)\eta - i]$ a pour racines a_0, b_0. La vérification est donc faite.

6. Je ferai encore une autre vérification, en retrouvant la solution du même cas par le second des procédés indiqués au n° 4. Cette

solution est fondée sur le petit lemme algébrique suivant, qui me servira encore plus loin :

Soit Z un polynome de degré m, entier et homogène, des variables η_1, η_2, *d'où l'on déduit trois autres polynomes z, en posant*

$$(6)\quad \begin{cases} z_1 = (m-2)\quad Z_1^2 - (m-1)ZZ_{11} \\ z_2 = (m-2)\quad Z_2^2 - (m-1)ZZ_{22} \\ z_3 = (m-2)Z_1Z_2 - (m-1)ZZ_{12} \end{cases} \qquad \frac{\partial Z}{\partial \eta_1} = Z_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta_1^2} = Z_{11}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} = Z_{12}, \quad \ldots.$$

Pour chaque racine de Z, il existe une combinaison linéaire des polynomes z, qui a cette racine avec l'ordre 4 de multiplicité, au moins.

Pour prouver ce lemme, envisageons une racine $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ du polynome Z; et la mettant en évidence, posons

$$Z = (\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2)P.$$

Formons ensuite la combinaison

$$z_\xi = \xi_1^2 z_1 + \xi_2^2 z_2 + 2\xi_1\xi_2 z_3.$$

On trouve bien aisément

$$\begin{aligned} z_\xi = (\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2)^2\,[&(m-2)(\xi_1 P_1 + \xi_2 P_2)^2 \\ &-(m-1)P(\xi_1^2 P_{11} + 2\xi_1\xi_2 P_{12} + \xi_2^2 P_{22})]. \end{aligned}$$

Si l'on observe ensuite que $(m-1)$ est le degré de P, les propriétés des fonctions homogènes permettant de transformer cette expression en celle-ci :

$$(7)\qquad z_\xi = \frac{(\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2)^4}{m-2}(P_{12}^2 - P_{11}P_{22}).$$

D'où la preuve du lemme annoncé.

7. En prenant pour Z, dans les formules (6), le polynome du même nom (n° 5), j'ai pour z_1, z_2, z_3 trois polynomes entiers du degré 6.

Sauf un facteur, égal à la puissance de Z, ce sont les dérivées partielles secondes de $Z^{\frac{1}{m-1}}$, c'est-à-dire d'un *covariant* de X, Y, Z.

Une de leurs combinaisons a une racine commune avec Z, et cette racine y est multiple de l'ordre 4, comme il résulte du lemme. Je vais maintenant montrer que, pour ce cas particulier, cette même combinaison contient une fois de plus la même racine. Cela fait, nous serons assurés que les polynomes z en question constituent une solution de notre problème.

Le polynome Z étant réciproque et bicarré, je peux écrire

$$P = (\xi_2\eta_1 + \xi_1\eta_2)(\xi_1^2\eta_1^2 - \xi_2^2\eta_2^2).$$

Il en résulte

$$\frac{1}{4}(P_{12}^2 - P_{11}P_{22}) = (\xi_1^3\eta_1 - \xi_2^3\eta_2)^2 + \xi_1^2\xi_2^2(3\xi_2\eta_1 + \xi_1\eta_2)(3\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1).$$

Développant, et remplaçant, pour plus de simplicité, η_1, ξ_1, η_2, ξ_2 par η, ξ, 1, 1, j'ai

$$\Pi = \frac{1}{4}(P_{12}^2 - P_{11}P_{22}) = \xi^2(\xi^4 + 3)\eta^2 + 8\xi^3\eta + 1 + 3\xi^4.$$

Je veux vérifier que ce polynome a encore la racine $\eta = \xi$. Ceci impose à ξ la condition suivante :

$$\xi^8 + 14\xi^4 + 1 = 0.$$

Or on a

$$\eta^8 + 14\eta^4 + 1 = (\eta^4 + 2i\sqrt{3}\,\eta^2 + 1)(\eta^4 - 2i\sqrt{3}\,\eta^2 + 1) = YZ.$$

La condition est donc vérifiée, puisque ξ est déjà une racine de Z.

On peut vérifier encore que la seconde racine du polynome Π est la racine de Y, qui est adjointe à ξ. Écrivons, à cet effet, que dans Π le produit des racines est égal à $-i$. Ceci donne la condition

$$\xi^6 - 3i\xi^4 + 3\xi^2 - i = 0 = (\xi^2 + i)(\xi^4 - 4i\xi^2 - 1),$$

qu'on peut écrire

$$(\xi^2 + i)(\xi - a_0)(\xi - a_1)(\xi - b_0)(\xi - b_1) = 0.$$

Cette condition a donc lieu pour $\xi = a_0$; la seconde racine de Π est alors $-\frac{i}{a_0}$, ce qui n'est autre que b_0.

La vérification est donc complète.

Tous ces détails, minutieusement donnés pour ce cas, me permettent d'exposer plus brièvement la solution pour les autres exemples que je vais traiter.

8. *Deuxième exemple :* $a = 1$, $a' = 7$; *d'où résulte* $d = 10$. Pour chaque racine a_n de Z, il y a un polynome z_n contenant le facteur $(\eta - a_n)^8$. Le polynome est complété par un facteur du second degré. Il y a quatre pareils facteurs, dont l'ensemble donne les racines d'un covariant. Puisqu'il y en a en tout huit racines, ce covariant ne peut être que Y^2, Z^2 ou YZ (p. 28). Pour les mêmes raisons qu'au n° 5 (premier exemple), on voit que ce facteur est Z^2, et que z_n a la forme

$$z_n = (\eta - a_n)^8 (\eta - b_n)^2.$$

L'intégrale générale est donc composée des intégrales particulières

$$y = \frac{X^{\frac{1}{3}}}{Z^3} (\eta - a_n)^8 (\eta - b_n)^2,$$

où (a_n, b_n) *sont deux racines de* Z *et de* Y, *adjointes entre elles.*

9. *Troisième exemple :* $a = 2$, $a' = 5$; *d'où résulte* $d = 10$. Dans ce cas, la solution ne s'obtient plus aussi immédiatement. Je traite ce dernier exemple (pour $m = 3$) précisément pour montrer comment la méthode générale expliquée au n° 4 peut être appliquée.

Pour chaque racine a_n de Z, il y a un polynome z_n de la forme

$$z_n = (\eta - a_n)^7 \varphi_n,$$

et φ_n est du troisième degré. Le produit des quatre polynomes φ_n est du douzième degré. Ce covariant a donc la forme $X^2 + AZ^3$, et la constante numérique A n'est pas connue *a priori*, circonstance qui ne s'était pas produite dans les exemples précédents.

Le polynome φ_n doit rester inaltéré (sauf un facteur) par celles des substitutions de G qui n'altèrent pas a_n. Or on aperçoit immédiatement que les deux polynomes du troisième degré $(\eta - a_0)^3$ et $(\eta - a_1)(\eta - a_2)(\eta - a_3)$ ont cette propriété relativement à a_0. Donc, suivant l'analyse de la page 23, je peux conclure :

$$\varphi_0 = (\eta - a_0)^3 + \mu(\eta - a_1)(\eta - a_2)(\eta - a_3),$$

où μ est un coefficient numérique non encore connu. Je déterminerai ce coefficient par la condition, relative au nombre donné $a = 2$, *que, si l'on combine linéairement deux des polynomes* z, *autres que*

z_0, *de manière à ce que le polynome obtenu ait la racine* a_0, *cette racine y soit double.*

Je prends z_2 et z_3; j'y remplace a_1, a_2, a_3 par leurs expressions $-a_0$, $\frac{1}{a_0}$ et $-\frac{1}{a_0}$. J'ai ainsi :

$$z_2 = \frac{1}{a_0^{10}}(a_0\eta - 1)^{10} + \mu\frac{1}{a_0^8}(a_0\eta - 1)^7(\eta + a_0)(a_0\eta + 1)(\eta - a_0),$$

$$z_3 = \frac{1}{a_0^{10}}(a_0\eta + 1)^{10} + \mu\frac{1}{a_0^8}(a_0\eta + 1)^7(\eta + a_0)(a_0\eta - 1)(\eta - a_0).$$

La combinaison à considérer est

$$z = (a_0^2 + 1)^{10} z_2 - (a_0^2 - 1)^{10} z_3,$$

qui s'évanouit avec $(\eta - a_0)$. Par un calcul qui n'offre aucune difficulté, je trouve

$$\left(\lim \frac{a_0^9 z}{\eta - a_0}\right)_{\eta = a_0} = 4[5(a_0^4 - 1)^2 + 4\mu a_0^4(a_0^4 + 1)](a_0^4 - 1)^7,$$

et j'en tire la valeur de μ :

$$\mu = -\frac{5}{4}\,\frac{(a_0^4 - 1)^2}{a_0^4(a_0^4 + 1)}.$$

Pour réduire μ à une expression purement numérique, le plus rapide est d'utiliser les deux égalités que nous avons déjà vérifiées précédemment (p. 203) :

$$a_0^8 + 14a_0^4 + 1 = 0,$$
$$a_0^4 - 4ia_0^2 - 1 = 0.$$

Joignons-y cette valeur de a_0^2 :

$$a_0^2 = i(2 - \sqrt{3})$$

et nous avons

$$\mu = 10\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Ainsi l'intégrale générale est donnée par les intégrales particulières qui se déduisent, au moyen de permutation d'indices, de celle-ci :

$$y = \frac{X^{\frac{1}{3}}}{Z^3}\left[(\eta - a_0)^3 + 10\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)(\eta - a_1)(\eta - a_2)(\eta - a_3)\right].$$

Il faut bien noter que le radical $\sqrt{3}$ est ici le même que celui qui figure dans Z; il n'y a pas d'ambiguïté sur son signe.

On voit, dans cet exemple, comment les conditions reconnues pour les polynomes z sont, en général, surabondantes. Ainsi je n'ai pas fait usage de la condition : *les quatre polynomes z doivent être liés linéairement.*

Par la nature de la question, il résulte de leur construction qu'ils sont liés ainsi. La vérification de cette propriété exigerait un calcul que je crois inutile d'entreprendre.

10. Je vais maintenant donner quelques exemples se rattachant au cas général $m = 4$ et, par conséquent, à l'équation indéterminée $X^2 + Y^3 + Z^4 = 0$. Je rappelle que les polynomes constituant la solution primitive sont :

$$X = \eta_1^{12} - 33\eta_1^8\eta_2^4 - 33\eta_1^4\eta_2^8 + \eta_2^{12},$$
$$Y = \eta_1^8 + 14\eta_1^4\eta_2^4 + \eta_2^8,$$
$$Z = \eta_1\eta_2(\eta_1^4 - \eta_2^4),$$

liés par la relation

$$X^2 + 2^2.3^3 Z^4 = Y^3,$$

en sorte qu'il faudra poser

$$\alpha = -2^2.3^3\frac{Z^4}{X^2}.$$

La formule (5), qui donne le degré d des polynomes z, devient ici

$$d = 2(2a + a') - 4.$$

Je rappelle encore que les entiers positifs, a, a' doivent être tels que $\frac{a}{4}$, $\frac{a'}{4}$, $\frac{a+a'}{4}$ soient fractionnaires et aient 4 pour plus petit commun dénominateur.

Premier exemple : $a = 1$, $a' = 2$; d'où résulte $d = 4$.

Le second des procédés indiqués au n° 4 réussit ici immédiatement. Prenons les dérivées secondes de Z, savoir :

$$Z_{11} = 30\eta_1^3\eta_2, \qquad Z_{22} = -30\eta_2^3\eta_1, \qquad Z_{12} = 5(\eta_1^4 - \eta_2^4).$$

Ces polynomes sont du quatrième degré, et appartiennent relativement à η aux exposants 0, 1, 3. D'après leur mode de formation, leurs combinaisons linéaires appartiennent aussi à ces mêmes exposants relativement à tout binome $(\eta - \eta_0)$ où η_0 est une racine de Z.

Ils fournissent donc la solution. Ainsi *l'intégrale générale se compose des intégrales particulières*

$$y = \left(\frac{X}{Z^4}\right)^{\frac{1}{3}} \eta^3, \qquad y = \left(\frac{X}{Z^4}\right)^{\frac{1}{3}} \eta, \qquad y = \left(\frac{X}{Z^4}\right)^{\frac{1}{3}} (\eta^4 - 1).$$

11. *Deuxième exemple : $a = 1$, $a' = 5$; d'où résulte $d = 10$.*

Le même procédé réussit encore, au moyen des dérivées d'un covariant analogue à celui que j'ai employé au numéro 6. Je forme les combinaisons :

$$\begin{aligned}
4Z_1^2 \quad - 5ZZ_{11} &= 4\eta_2^6(15\eta_1^4 + \eta_2^4),\\
4Z_2^2 \quad - 5ZZ_{22} &= 4\eta_1^6(15\eta_2^4 + \eta_1^4),\\
4Z_1Z_2 - 5ZZ_{12} &= -\eta_1\eta_2(5\eta_1^8 - 54\eta_1^4\eta_2^4 + 5\eta_2^8).
\end{aligned}$$

Ces polynomes répondent manifestement à la question. Ainsi *l'intégrale générale se compose des intégrales particulières*

$$y = \left(\frac{X}{Z^7}\right)^{\frac{1}{3}} (15\eta^4 + 1), \qquad y = \left(\frac{X}{Z^7}\right)^{\frac{1}{3}} \eta^6(\eta^4 + 15),$$
$$y = \left(\frac{X}{Z^7}\right)^{\frac{1}{3}} \eta(5\eta^8 - 54\eta^4 + 5).$$

12. *Troisième exemple : $a = 2$, $a' = 3$; d'où résulte $d = 10$.*

Une observation très simple sur les propriétés du groupe G et des racines de Z fournit immédiatement la solution pour ce cas. Le groupe G dérive des substitutions

$$\text{(G)} \qquad \eta' = i\eta, \qquad \eta' = \frac{1 + i\eta}{1 - i\eta}.$$

Désignons les racines de Z, ainsi :

$$x_0, \quad x_\infty, \quad x_1, \quad x_{-1}, \quad x_i, \quad x_{-i};$$

ces racines sont dans l'ordre correspondant :

$$0, \quad \infty, \quad 1, \quad -1, \quad i, \quad -i.$$

Prenant les substitutions de G, je fais

$$x'_n = ix_n, \qquad x''_n = \frac{1 + ix_n}{1 - ix_n}.$$

J'ai alors le tableau suivant des échanges entre ces racines x_n :

$$\begin{array}{lll} x'_0 = x_0, & x'_1 = x_i, & x'_i = x_{-1}, \\ x'_\infty = x_\infty, & x'_{-1} = x_{-i}, & x'_{-i} = x_1; \\ x''_0 = x_1, & x''_1 = x_i, & x''_i = x_0, \\ x''_\infty = x_{-1}, & x''_{-1} = x_{-i}, & x''_{-i} = x_\infty. \end{array}$$

Il en résulte que, par toutes les substitutions de G, les couples (x_0, x_∞), (x_1, x_{-1}) et (x_i, x_{-i}) se transforment les unes dans les autres. Par suite, les trois polynomes suivants :

$$z_1 = \eta_1^5 \eta_2^5, \qquad z_2 = (\eta_1 - \eta_2)^5 (\eta_1 + \eta_2)^5, \qquad z_3 = (\eta_1 - i\eta_2)^5 (\eta_1 + i\eta_2)^5$$

se transforment les uns dans les autres par les substitutions de G effectuées sur η_1, η_2. On voit d'ailleurs que z_1 contient la racine $\eta_1 = 0$ multiple d'ordre 5, et que $(z_2 - z_3)$ est divisible par η_1^2. Ces polynomes répondent donc à la question. En conséquence, *l'intégrale générale est*

$$y = \left(\frac{X}{Z^7}\right)^{\frac{1}{3}} [c\eta^5 + c'(\eta^2 - 1)^5 + c''(\eta^2 + 1)^5].$$

13. Cette solution suggère immédiatement une généralisation, qui est la suivante :

Quatrième exemple : $a = 2$, $a' = n$; d'où résulte $d = 2n + 4$; l'intégrale générale est

$$y = \left(\frac{X}{Z^{n+4}}\right)^{\frac{1}{3}} [c\eta^{n+2} + c'(\eta^2 - 1)^{n+2} + c''(\eta^2 + 1)^{n+2}].$$

14. Et maintenant, dans cette solution, n est un entier quelconque qui figure explicitement dans l'intégrale comme dans les données. On est en droit d'en conclure que la solution a encore lieu quand n est absolument quelconque. Il convient de reproduire ici l'énoncé complet d'un cas aussi curieux. Dans cet énoncé, je remplace n par $2(\mu - 1)$ où μ est alors, comme n, une constante quelconque.

Si dans les équations (¹)

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} h^3 &= r(\alpha - 1)(\alpha + c)^3, \\ l &= q\alpha\left(\alpha + \frac{c - 3}{4}\right), \end{aligned} \right.$$

(¹) Comme une vérification curieuse, je signale ce fait que, pour $\mu = 3$ ou pour $\mu = -2$, on a le cas particulier qui a déjà été traité au chapitre III (p. 124).

on suppose les constantes r, q, c données, comme il suit, en fonction d'une arbitraire μ :

$$r = \frac{7^3}{2^2} \frac{1}{[(\mu+1)(1-2\mu)(2-\mu)]^2},$$

$$q = 2^2.7 \frac{1}{(\mu+1)(1-2\mu)(2-\mu)},$$

$$c = \frac{3}{7}(1-\mu+\mu^2),$$

et qu'on pose, en introduisant une variable auxiliaire η,

$$\alpha = -2^2.3^3 \frac{\eta^4(\eta^4-1)^4}{(\eta^{12}-33\eta^8-33\eta^4+1)^2} = -2^2.3^3 \frac{Z^4}{X^2},$$

l'intégrale générale canonique est

$$y = \left(\frac{X}{Z^{2\mu+2}}\right)^{\frac{1}{3}} [c\eta^{2\mu} + c'(\eta^2-1)^{2\mu} + c''(\eta^2+1)^{2\mu}].$$

En d'autres termes, ceci peut s'exprimer ainsi : *Dans la classe ainsi définie sont comprises les équations pour lesquelles trois intégrales y_1, y_2, y_3 sont liées par la relation*

$$y_1^{\frac{1}{\mu}} + y_2^{\frac{1}{\mu}} + y_3^{\frac{1}{\mu}} = 0.$$

Dans les exemples qui précèdent, comme dans ceux qui suivront, les résultats sont susceptibles d'interprétations géométriques relatives à la *courbe attachée* (p. 102). Je les passe sous silence pour ne pas allonger ce mémoire. Cependant, pour ce dernier exemple, je crois devoir signaler que, *les invariants h^3, l étant envisagés comme des invariants différentiels, l'élimination de α entre les équations* (8) *fournit l'équation différentielle, du huitième ordre, des courbes triangulaires symétriques d'exposant $\frac{1}{\mu}$* (1).

15. Je vais traiter maintenant deux exemples du cas $m=5$, se rattachant ainsi à l'équation $X^2+Y^3+Z^5=0$. Je rappelle que les

(1) Les *courbes triangulaires symétriques* ont été ainsi nommées par M. de la Gournerie, qui en a fait une étude très détaillée dans son ouvrage *Sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques.*

polynomes composant la solution primitive de cette équation sont :

$$X = \eta_1^{30} + \eta_2^{30} + 522\eta_1^5\eta_2^5(\eta_1^{20} - \eta_2^{20}) - 10005\eta_1^{10}\eta_2^{10}(\eta_1^{10} + \eta_2^{10} ,$$
$$Y = \eta_1^{20} + \eta_2^{20} - 228\eta_1^5\eta_2^5(\eta_1^{10} - \eta_2^{10}) + \quad 494\eta_1^{10}\eta_2^{10},$$
$$Z = \eta_1\eta_2(\eta_1^{10} + 11\eta_1^5\eta_2^5 - \eta_2^{10}).$$

Ces polynomes sont liés par l'identité

$$Y^3 + 2^6 . 3^3 Z^5 = X^2,$$

en sorte qu'il faut poser

$$\alpha = 2^6 . 3^3 \frac{Z^5}{X^2}.$$

La formule (5) donne pour le degré d des polynomes z

$$d = 4(2a + a') - 10.$$

Les nombres a, a' doivent être choisis de telle sorte que $(a + a')$ soit, comme a et a', premier à 5.

Le groupe G dérive des substitutions

$$\text{(G)} \qquad \eta' = \varepsilon\eta, \qquad \eta' = \frac{\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\eta + 1}{\eta - \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

où ε est une racine cinquième de l'unité.

Les racines de Z jouissent, à l'égard du groupe G, d'une propriété analogue à celle que j'ai mise tout à l'heure en évidence dans le cas $m = 4$. Cette propriété a été signalée par M. Félix Klein [1], la voici : les douze racines de Y sont d'abord 0, ∞ que je désigne par x_0, x'_0, et que j'*associe*, puis x_1, x_2, x_3, x_4, que j'*associe* respectivement avec x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, en posant

$$x_n = (\varepsilon + \varepsilon^4)\varepsilon^n, \qquad x'_n = (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\varepsilon^n,$$

ε étant toujours une racine cinquième de l'unité. On a composé ainsi six couples (x_n, x'_n). La propriété consiste en ce que, par toutes les substitutions de G, ces couples se transforment les unes dans les autres.

---

[1] *Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder* (*Math. Ann.*, t. XII, p. 507).

16. *Premier exemple* : $a = 1$, $a' = 2$; *d'où résulte* $d = 6$.

J'envisage le polynome z_n, qui contient le facteur $(\eta - x_n)^3$. Il est complété par un polynome du troisième degré φ_n. Le produit des douze polynomes φ_n est du trente-sixième degré, et doit être un covariant de X, Y, Z. Ce ne peut être que Z^3. Donc φ_n a, pour racines, des racines de Z. On est conduit à reconnaître ainsi que z_n a nécessairement la forme

$$z_n = (\eta - x_n)^3 (\eta - x'_n)^3,$$

en sorte qu'il n'y a que six polynomes z_n, un pour chaque couple (x_n, x'_n). On peut d'ailleurs très aisément vérifier que de ces six polynomes trois seulement sont linéairement distincts. En effet, d'après les expressions ci-dessus de x_n, x'_n, on obtient, en développant z_n,

$$z_n = \eta^6 + \eta + \varepsilon^n (3\eta^5 - 1) - 6\varepsilon^{3n} \eta^3.$$

Si l'on prend maintenant trois pareils polynomes $z_{n'}$, $z_{n''}$, et z_n, on obtient la relation

$$(\varepsilon^{n''} - \varepsilon^{n'}) z_n + (\varepsilon^n - \varepsilon^{n''}) z_{n'} + (\varepsilon^{n'} - \varepsilon^n) z_{n''} = A\eta^3 = A z_0,$$

où A est un coefficient numérique qu'il n'est pas nécessaire de préciser davantage. Cette relation prouve l'exactitude de la proposition prévue.

Ainsi *l'intégrale générale se compose des intégrales particulières*

$$y = \left(\frac{X}{Z^4}\right)^{\frac{1}{3}} \eta^3, \qquad y_n = \left(\frac{X}{Z^4}\right)^{\frac{1}{3}} (\eta - x_n)^3 (\eta - x'_n)^3.$$

17. *Deuxième exemple* : $a = 1$, $a' = 3$; *d'où résulte* $d = 10$.

On a immédiatement la solution en envisageant les dérivées secondes de Z, qui sont :

$$Z_{11} = 110 \eta_1^4 \eta_2 (\eta_1^5 + 3\eta_2^5),$$
$$Z_{22} = 110 \eta_2^4 \eta_1 (3\eta_1^5 - \eta_2^5),$$
$$Z_{12} = 11 (\eta_1^{10} + 36 \eta_1^5 \eta_2^5 - \eta_2^{10}),$$

et constituent des polynomes satisfaisant à la question.

Ainsi *l'intégrale générale se compose des intégrales parti-*

culières

$$y=\left(\frac{X}{Z^5}\right)^{\frac{1}{3}}(\eta^5+3)\eta^4,$$

$$y=\left(\frac{X}{Z^5}\right)^{\frac{1}{3}}(3\eta^5-1)\eta,$$

$$y=\left(\frac{X}{Z^5}\right)^{\frac{1}{3}}(\eta^{10}+36\eta^5-1).$$

En terminant ce chapitre, je ferai une observation qui s'applique à tous les exemples traités. Une seule des intégrales particulières peut suffire pour constituer l'intégrale générale. Les déterminations multiples dont η est susceptible pour chaque valeur de α permettent, en effet, de déduire les intégrales d'une seule d'entre elles.

CHAPITRE VII.

Applications. — Étude d'une classe d'équations linéaires du quatrième ordre, présentant trois séries indéfinies de cas d'intégrabilité : deux séries de cas par les fonctions rationnelles; une série de cas par les fonctions elliptiques. — Méthode d'intégration par les fonctions rationnelles. — Trois exemples.

---

1. Je m'occuperai, dans ce chapitre, d'une classe d'équations linéaires du quatrième ordre, offrant la plus grande analogie avec la classe d'équations du troisième ordre dont il a été question dans le précédent chapitre. Je définis cette classe en donnant les invariants h^3, l, s_4^3, en fonction d'une variable auxiliaire α, comme il suit :

$$(1)\qquad \begin{cases} h^3 = r(\alpha - 1)(\alpha + c)^3, \\ l = -q\alpha\left(\alpha + \dfrac{c-3}{4}\right), \\ s_4^3 = n^3 r^2 (\alpha - 1)^2 (\alpha^2 + \mathrm{A}\alpha + \mathrm{B})^3. \end{cases}$$

Les lettres r, q, n, c, A, B désignent des constantes. Je rappelle que h, l, s_4 sont les coefficients de l'équation canonique

$$(2)\qquad \frac{d^4 y}{dx^4} + 2h\frac{d^2 y}{dx^2} + 2(l-1)\frac{dy}{dx} + s_4 y = 0,$$

et que la variable x est liée à la variable α par la relation

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{l}\,\frac{dh}{d\alpha} = -\frac{4}{3}\,\frac{r^{\frac{1}{3}}}{q}\,\frac{1}{\alpha(\alpha-1)^{\frac{2}{3}}}.$$

De la proposition démontrée au chapitre III, n° 15 (p. 130), il résulte que *la transformée de l'équation* (2), *obtenue en prenant* α *pour variable indépendante, a pour coefficients des fonctions rationnelles de* α. C'est donc en réalité d'une équation à coefficients rationnels que nous nous occupons. Le mode de représentation employé a pour effet de mettre immédiatement en évidence les éléments essentiels.

2. L'étude des points critiques se fait très aisément au moyen des

résultats généraux obtenus à la fin du chapitre III, nos 21 et 22 (p. 141 et suiv.). L'analogie avec l'étude faite pour le troisième ordre, au commencement du chapitre V, me permet de donner ici les résultats, sans insister sur les démonstrations, que l'on pourra reconstituer sans effort.

1° Pour $\alpha = 1$, on a un point critique algébrique du troisième ordre; *les intégrales de* (2) *appartiennent relativement à* $(\alpha - 1)$ *aux exposants* $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}$.

2° Pour $\alpha = 0$, l'équation déterminante (p. 143) est

$$(3) \qquad s^4 - 2^5 \frac{rc}{q^2} s^2 + \frac{2^7}{3^3} \frac{r}{q^3} s + \frac{2^8}{3^4} \frac{r^2 n B}{q^4} = 0.$$

3° Les circonstances relatives au point critique $\alpha = \infty$ seront entièrement fixées ici par l'application d'un résultat obtenu à la fin du chapitre III. Effectivement, si l'on fait $\alpha = \frac{1}{\beta}$, on peut remplacer les équations (2) par celles-ci, où je forme les premiers termes des développements suivant les puissances croissantes de β :

$$h^3 = \quad r\,\beta^{-4}\,[1 + (3c - 1)\beta + \ldots],$$
$$l = -q\,\beta^{-2}\left(1 + \frac{c-3}{4}\beta + \ldots\right),$$
$$s_4^3 = n^3 r^2 \beta^{-8}\,[1 + (3A - 2)\beta + \ldots].$$

Je peux donc appliquer le résultat obtenu chapitre III (n° 25), en posant

$$R = c - \frac{1}{3}, \qquad Q = \frac{c-3}{4}, \qquad M = A - \frac{2}{3}.$$

Ce faisant, je détermine, au moyen des relations (36) [p. 155], le rapport $\frac{r}{q^2}$, le coefficient n et une fonction linéaire de A, c, *en fonction d'un entier arbitraire b*.

J'ai alors pour $\alpha = \infty$ un point critique du second ordre en ce qui concerne les rapports des intégrales. Quant aux intégrales elles-mêmes, elles appartiennent, relativement à $\frac{1}{\alpha}$, aux exposants

$$-\frac{2b-1}{4}, \quad -\frac{2b-5}{4}, \quad \frac{2b+3}{4}, \quad \frac{2b+7}{4}.$$

Envisageant maintenant l'équation (3), où la somme des racines est zéro, j'y vois encore trois constantes, que je peux prendre à volonté, q, c, B. Je détermine ces constantes de telle sorte que les

racines aient la forme

$$s_0,\quad s_0+\frac{a}{m},\quad s_0+\frac{a+k}{m},\quad s_0+\frac{a+k+a'}{m},$$

a, k, a', m étant des entiers positifs. La condition que la somme des racines soit nulle détermine s_0, et les racines seront alors :

$$-\frac{3a+2k+a'}{4m},\quad \frac{a-2k-a'}{4m},\quad \frac{a+2k-a'}{4m},\quad \frac{a+2k+3a'}{4m}.$$

Les différences de toutes ces racines sont :

$$\frac{a}{m},\quad \frac{a'}{m},\quad \frac{k}{m},\quad \frac{a+k}{m},\quad \frac{a'+k}{m},\quad \frac{a+a'+k}{m}.$$

Si tous ces nombres sont fractionnaires, les intégrales appartiennent, relativement à α, à des exposants respectivement égaux aux racines.

Ce n'est que pour m au moins égal à 4 qu'il devient possible de satisfaire à ces conditions. Mais, pour $m=4$, on peut y satisfaire de diverses manières :

1° $\quad a=4\nu+2,\quad a'=4\nu'+2,\quad k=2\nu''+1;$

2° $\quad a=4\nu\pm1,\quad a'=4\nu'\mp1,\quad k=4\nu''+2;$

3° $\quad a=4\nu\pm1,\quad a'=4\nu'\pm1,\quad k=4\nu''\pm1.$

Les conditions étant remplies, si $m=4$ ou $m=5$, alors l'équation pourra être intégrée par les fonctions rationnelles; si $m=6$, par les fonctions elliptiques. Je vais m'occuper, dans ce chapitre, des cas où l'intégration s'effectue par des fonctions rationnelles. Je résume d'abord dans un énoncé le résultat explicite des calculs que je viens d'indiquer.

Si dans les équations (1) *on détermine les constantes comme il suit, en fonction de cinq nombres entiers* a, a', k, m, b, *savoir :*

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{r}{q^2}&=\frac{44-9(2b+1)^2}{2^8},\\
n&=\frac{3^4(2b-1)(2b-5)(2b+3)(2b+7)}{[9(2b+1)^2-44]^2},\\
\frac{5c+1}{5A+2}&=9\frac{(2b-5)(2b+7)}{9(2b+1)^2-44},\\
c&=\frac{2(a^2+a'^2)+(a+2k+a')^2}{m^2[44-9(2b+1)^2]},\\
\frac{1}{q}&=\frac{3^3}{2}\,\frac{(a'-a)(a'+a)(a+2k+a')}{m^3[44-9(2b+1)^2]},\\
B&=\frac{(3a+2k+a')(3a'+2k+a)(a+2k-a')(a'+2k-a)}{m^4(2b-1)(2b-5)(2b+3)(2b+7)},
\end{aligned}\right.$$

où b est un entier positif quelconque, que l'on peut aussi supposer nul; a, a', k, m des entiers positifs, a différent de a', et tels que les six nombres

$$\frac{a}{m},\quad \frac{a'}{m},\quad \frac{k}{m},\quad \frac{a+k}{m},\quad \frac{a'+k}{m},\quad \frac{a+k+a'}{m}$$

soient fractionnaires et aient m pour plus petit commun dénominateur;

Alors les rapports des intégrales canoniques, envisagés comme des fonctions de α, n'ont que trois points critiques $\alpha=\infty$, 1, 0, qui sont algébriques et respectivement d'ordre 2, 3, m.

En conséquence, si $m=6$, l'équation est intégrable par les fonctions elliptiques; si $m=4$ ou $m=5$, elle est intégrable algébriquement. Les rapports des intégrales et la variable α sont exprimables en fonction rationnelle d'une même variable (¹) :

Relativement à $(\alpha-1)$, les intégrales appartiennent aux exposants $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$;

Relativement à $\frac{1}{\alpha}$, aux exposants

$$-\frac{2b-1}{4},\quad -\frac{2b-5}{4},\quad +\frac{2b+3}{4},\quad +\frac{2b+7}{4};$$

Relativement à α, aux exposants

$$-\frac{3a+2k+a'}{4m},\quad \frac{a-2k-a'}{4m},\quad \frac{a+2k-a'}{4m},\quad \frac{a+2k+3a'}{3m}.$$

Il faut bien observer que, dans le cas $m=6$, il peut arriver que l'équation s'intègre algébriquement aussi, mais non pas par des fractions rationnelles d'une même variable. C'est ce qui advient si les intégrales exprimées par les fonctions elliptiques sont doublement périodiques de première espèce, et cette circonstance a lieu, non pas toujours, mais souvent. Au reste, l'examen des circonstances qui concernent le cas $m=6$ est laissé pour le chapitre IX, où j'étudierai une équation à coefficients doublement périodiques, *et à module quel-*

(¹) On remarquera que l'échange des nombres a, a' entre eux a pour simple résultat de changer le signe de q, c'est-à-dire laisse h^3 et s_4^3 inaltérés, et change l en $-l$. Ce changement a pour effet de changer la classe donnée en la classe adjointe (p. 139). Du même coup, on intégrera donc toujours deux équations rentrant dans la classe générale (2).

conque, comprenant celle qui proviendrait du cas actuel ($m=6$), restreint toutefois à l'hypothèse $b=0$.

Pour le moment, je vais succinctement étudier l'intégration de l'équation proposée dans les cas où m est égal à 4 ou à 5. Je ne donnerai que peu d'explications, les raisonnements étant à peine différents de ceux que j'ai employés au chapitre VI pour l'équation analogue du troisième ordre.

3. Je suppose donc remplies les conditions mentionnées dans le dernier énoncé, et, en outre, $m=4$ ou $m=5$. J'envisage la solution primitive de l'équation $X^2+Y^3+Z^m=0$, en polynomes entiers d'une variable η. Je pose $\alpha=-\frac{Z^m}{X^2}$, et j'applique la proposition IX, du chapitre I (p. 39).

Conformément à cette proposition, j'introduis une nouvelle inconnue z, en posant

$$z=yX^{\frac{2b-1}{2}}Z^{\frac{3a+2k+a'}{4}}. \tag{5}$$

Ceci fait, *j'ai pour z un polynome entier en η; le degré d de ce polynome est*

$$d=\frac{M}{4}\left(\frac{3a+2k+a'}{m}+2b-1\right), \tag{6}$$

le nombre M *étant : pour* $m=4$, $M=24$; *pour* $m=5$, $M=60$.

Voici les autres propriétés des polynomes z :

1° *Relativement à tout binome* $(\eta-\beta)$, *où* β *n'est racine ni de* X, *ni de* Z, *les combinaisons linéaires des polynomes z appartiennent aux exposants* 0, 1, 2, 3;

2° *Relativement à tout binome* $(\eta-\eta_\infty)$, *où* η_∞ *est une racine de* X, *aux exposants* $0, 2, 2b+1, 2b+3$;

3° *Relativement à tout binome* $(\eta-\eta_0)$, *où* η_0 *est une racine de* Z, *aux exposants* $0, a, a+k, a+k+a'$;

4° *L'invariant* V_η, RELATIF A LA VARIABLE η, *n'est pas infini pour* $\eta=\eta_\infty$;

5° *Les polynomes z se transforment ensemble par des substitutions linéaires quand on effectue sur η les substitutions du groupe* G, *attaché à l'équation* $X^2+Y^3+Z^m=0$.

Je dis maintenant que *des polynomes z qui satisfont à ces diverses conditions sont les intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre appartenant à la classe définie par l'énoncé du*

n° 2, les lettres b, a, a', k, m conservant de part et d'autre les mêmes significations.

La démonstration est exactement la même que dans le chapitre précédent (p. 196) et découle immédiatement de ce qu'on reconnaît à V_η la forme

$$V_\eta = A\frac{X}{Z^3}.$$

On voit que, pour prouver cette forme de V_η, la propriété introduite dans le dernier énoncé, sous la rubrique 4°, est indispensable; car $\eta = \eta_\infty$ étant un point singulier, si l'on n'imposait cette condition, V_η pourrait contenir X en dénominateur, avec un exposant qui serait toutefois moindre que 3 (p. 146).

L'énoncé de cette propriété relative à V_η peut être supprimé dans le cas spécial où $b = 0$; car alors $\eta = \eta_\infty$ cesse d'être un point singulier, et V_η reste nécessairement fini.

On le voit donc, les cas où b n'est pas nul présentent une différence sensible avec les divers cas de l'équation du troisième ordre envisagée au chapitre VI; ceux, au contraire, où b est nul présentent une grande ressemblance. Dans les premiers, les conditions sont relatives aux racines des deux polynomes X, Z. Dans les seconds cas, au contraire, ces conditions n'ont trait qu'aux racines de Z; la solution est alors bien plus facile à trouver. Je me bornerai à donner trois exemples, tous relatifs au cas le plus facile $b = 0$.

4. *Premier exemple :* $m = 4$; $a = 1$, $k = 1$, $a' = 5$, $b = 0$; d'où résulte le degré $d = 9$.

Les notations étant les mêmes qu'au chapitre IV, n° 10 (p. 206), on trouve très aisément les polynomes suivants :

$$(7)\quad \begin{cases} z_0 = \eta_1^7\eta_2^2, & z_\infty = \eta_2^7\eta_1^2, \\ z_1 = (\eta_1 - \eta_2)^7(\eta_1 + \eta_2)^2, & z_{-1} = (\eta_1 + \eta_2)^7(\eta_1 - \eta_2)^2, \\ z_i = (\eta_1 - i\eta_2)^7(\eta_1 + i\eta_2)^2, & z_{-i} = (\eta_1 + i\eta_2)^7(\eta_1 - i\eta_2)^2, \end{cases}$$

qui sont liés par deux relations identiques très faciles à prouver, au moyen des formules suivantes :

$$\begin{aligned} z_i + z_{-i} &= 2\,(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2(\eta_1^4 - 10\eta_1^2\eta_2^2 + 5\eta_2^4)\eta_1, \\ z_i - z_{-i} &= -2i(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2(5\eta_1^4 - 10\eta_1^2\eta_2^2 + \eta_2^4)\eta_2, \\ z_1 + z_{-1} &= 2\,(\eta_1^2 - \eta_2^2)^2(\eta_1^4 + 10\eta_1^2\eta_2^2 + 5\eta_2^4)\eta_1, \\ z_1 - z_{-1} &= -2\,(\eta_1^2 - \eta_2^2)^2(5\eta_1^4 + 10\eta_1^2\eta_2^2 + \eta_2^4)\eta_2. \end{aligned}$$

Les deux relations sont :

$$z_i + z_{-i} - z_1 - z_{-1} + 32 z_0 = 0,$$
$$i(z_i - z_{-i}) + z_1 - z_{-1} + 32 z_\infty = 0.$$

L'intégrale générale se compose des intégrales particulières

$$y = \left(\frac{X}{Z^5}\right)^{\frac{1}{2}} z,$$

z désignant un quelconque des polynomes (7).

5. *Deuxième exemple :* $m = 4$; $a = 1$, $k = 2$, $a' = 3$, $b = 0$.

Le degré est encore $d = 9$. *L'intégrale générale se compose des intégrales particulières*

$$y = \left(\frac{X}{Z^4}\right)^{\frac{1}{2}} z,$$

z étant un quelconque des polynones suivants :

$$z_0 = \eta_1^6 \eta_2^3, \qquad z_\infty = \eta_2^6 \eta_1^3,$$
$$z_1 = (\eta_1 - \eta_2)^6 (\eta_1 + \eta_2)^3, \qquad z_{-1} = (\eta_1 + \eta_2)^6 (\eta_1 - \eta_2)^3,$$
$$z_i = (\eta_1 - i\eta_2)^6 (\eta_1 + i\eta_2)^3, \qquad z_{-i} = (\eta_1 + i\eta_2)^6 (\eta_1 - i\eta_2)^3.$$

Ces polynomes sont liés par les deux identités :

$$z_i + z_{-i} - z_1 - z_{-1} + 32 z_\infty = 0,$$
$$i(z_{-i} - z_i) + z_1 - z_{-1} + 32 z_0 = 0.$$

6. *Troisième exemple :* $m = 5$; $a = 1$, $k = 1$, $a' = 2$, $b = 0$.

Le degré qui en résulte est $d = 6$. Les notations sont ici les mêmes qu'au chapitre VI, n° 15 (p. 210). *L'intégrale générale se compose des intégrales particulières*

$$y = \frac{X^{\frac{-1}{2}}}{Z^{\frac{7}{4}}} z,$$

z étant un quelconque des polynomes

$$z_n = (\eta - x_n)^4 (\eta - x'_n)^2, \qquad z'_n = (\eta - x'_n)^4 (\eta - x_n)^2.$$

Il est très curieux de vérifier directement que, de ces douze polynomes, quatre seulement sont linéairement distincts. Voici comment peut se faire cette vérification. Je remets, pour la symétrie, les

variables homogènes η_1, η_2, et je forme les expressions suivantes au moyen des expressions de x_n, x'_n (p. 210) :

$$\begin{aligned}
A_n &= (\eta_1 - x_n\eta_2)^2 + (\eta_1 - x'_n\eta_2)^2 = 2\eta_1^2 + 2\varepsilon^n\eta_1\eta_2 + 3\varepsilon^{2n}\eta_2^2,\\
B_n &= (\eta_1 - x_n\eta_2)^2 - (\eta_1 - x'_n\eta_2)^2 = \varepsilon^n(\varepsilon^2+\varepsilon^3-\varepsilon-\varepsilon^4)(2\eta_1+\varepsilon^n\eta_2)\eta_2,\\
C_n &= 3B_n - (\varepsilon^2+\varepsilon^3-\varepsilon-\varepsilon^4)A_n = 2(\varepsilon^2+\varepsilon^3-\varepsilon-\varepsilon^4)(2\varepsilon^n\eta_2-\eta_1)\eta_1.
\end{aligned}$$

Je prends maintenant :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_n &= (2\eta_1 + \varepsilon^n\eta_2)\eta_2,\\
\mathfrak{C}_n &= (\eta_1 - 2\varepsilon^n\eta_2)\eta_1,
\end{aligned}$$

qui diffèrent de B_n et de C_n seulement par des facteurs constants, et je les multiplie par la quantité suivante :

$$D_n = (\eta_1 - x_n\eta_2)^2(\eta_1 - x'_n\eta_2)^2 = \eta_1^4 + 2\varepsilon^n\eta_1^3\eta_2 - \varepsilon^{2n}\eta_1^2\eta_2^2 - 2\varepsilon^{3n}\eta_1\eta_2^3 + \varepsilon^{4n}\eta_2^4.$$

Voici le résultat :

$$\begin{aligned}
D_n\mathfrak{B}_n &= \;*\; 2\eta_1^5\eta_2 + 5\varepsilon^n\eta_1^4\eta_2^2 - 5\varepsilon^{3n}\eta_1^2\eta_2^4 \quad * \quad + \eta_2^6,\\
D_n\mathfrak{C}_n &= \eta_1^6 \quad * \quad - 5\varepsilon^{2n}\eta_1^4\eta_2^2 + 5\varepsilon^{4n}\eta_1^2\eta_2^4 - 2\eta_1\eta_2^5 \quad * \;.
\end{aligned}$$

Je considère les quantités analogues où simplement n est changé en n'. Rien n'est plus aisé que de déduire de là cette relation :

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon^{4n} - \varepsilon^{4n'})(D_n\mathfrak{B}_n - D_{n'}\mathfrak{B}_{n'}) + (\varepsilon^{3n} - \varepsilon^{3n'})(D_n\mathfrak{C}_n - D_{n'}\mathfrak{C}_{n'})\\
&\quad = 5(\varepsilon^{3n+2n'} + \varepsilon^{3n'+2n} - \varepsilon^{n'-n} - \varepsilon^{n-n'})\eta_1^4\eta_2^2.
\end{aligned}$$

Ceci est une des relations qu'on veut prouver. En effet, d'après leur mode de formation, $D_n\mathfrak{B}_n$, $D_n\mathfrak{C}_n$, sont des combinaisons linéaires de z_n et de z'_n. On vient donc de former une relation identique entre $z_n, z'_n, z_{n'}, z'_{n'}$ et z_0, cette dernière étant justement $\eta_1^4\eta_2^2$. On forme de même une relation entre $z_n, z'_n, z_{n'}, z'_{n'}$ et z_∞, en faisant une autre combinaison de $D_n\mathfrak{B}_n$, $D_n\mathfrak{C}_n$, $D_{n'}\mathfrak{B}_{n'}$, $D_n\mathfrak{C}_{n'}$. D'ailleurs, n et n' sont là quelconques. On est donc en droit de conclure qu'il y a une relation identique et linéaire entre cinq quelconques des douze polynomes z.

CHAPITRE VIII.

Équations du quatrième ordre, à forme canonique exceptionnelle. — Étude des points critiques. — Exemples d'une classe d'équations présentant trois séries indéfinies de cas d'intégrabilité. — Applications. — Deux exemples. — Observations générales sur les exemples traités dans les chapitres IV, V, VI, VII, VIII.

---

1. Dans les chapitres IV, V, VI, VII, qui ont eu, tous quatre, des applications pour objet, j'ai envisagé des équations réduites à la forme canonique générale (chapitre III, p. 113) la seule qui existe pour le troisième ordre, mais non plus la seule à partir du quatrième ordre. Les méthodes que j'ai employées se modifient à peine quand il faut les appliquer à des équations susceptibles seulement de *formes canoniques exceptionnelles* (p. 115). Pour le bien montrer, *je vais traiter succinctement, dans ce chapitre, de l'intégration des équations du quatrième ordre à forme canonique exceptionnelle.* J'exposerai rapidement les généralités. Je donnerai ensuite la définition d'une classe d'équations appartenant à ce cas, et pouvant être intégrées pour plusieurs séries indéfinies de valeurs numériques des constantes qui y figurent; je traiterai entièrement deux exemples.

Je rappelle d'abord, pour le quatrième ordre, la forme canonique exceptionnelle

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 2\mathrm{H}\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{d\mathrm{H}}{dx}\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{3}{5}\frac{d^2\mathrm{H}}{dx^2} + \frac{9}{25}\mathrm{H}^2\right)y = 0. \tag{1}$$

Je l'emploierai, en supposant H et $\frac{d\mathrm{H}}{dx}$ donnés en fonction d'une variable auxiliaire α. La liaison entre x et α en résultera; et l'équation (1) sera envisagée comme l'expression concise de la transformée qu'on obtiendrait en prenant α pour variable indépendante. Pour éviter toute confusion, je désigne l'invariant absolu $\frac{d\mathrm{H}}{dx}$ par une lettre L; ainsi :

$$\mathrm{L} = \frac{d\mathrm{H}}{dx}. \tag{2}$$

Si donc on donne H, L en fonction de α, et qu'on dénote par des accents les dérivées prises par rapport à α, on aura

$$(3) \qquad \frac{dx}{d\alpha} = \frac{H'}{L}, \qquad \frac{d^2 H}{dx^2} = \frac{LL'}{H'}.$$

J'ai expliqué au chapitre III (p. 116) comment, sur une équation donnée, où l'invariant V est identiquement nul, on calcule H et L. En raisonnant comme au n° 15 du chapitre III, on démontre aisément cette proposition : *Pour que la transformée de* (1) *obtenue par le choix de la variable indépendante* α *ait ses coefficients uniformes en* α, *il faut et il suffit que* H^2 *et* HL^2 *soient des fonctions uniformes de* α.

Le quotient $\left(\frac{H'}{L}\right)^4$ qui donne l'expression (3) de $\frac{dx}{d\alpha}$ n'est autre que l'invariant relatif V_4 du chapitre III, n° 8 (p. 116) et dont le *poids* est égal à 4. L'invariant absolu H a la forme $\frac{\mathfrak{H}}{V_4^{\frac{5}{2}}}$, où $\mathfrak{H}$ est un invariant relatif entier, du poids 10.

2. D'après la proposition du chapitre III, n° 20 (p. 141), *une condition nécessaire, pour que les rapports des intégrales, considérées comme des fonctions de* α (dont H^2 et HL^2 sont supposés des fonctions uniformes), *n'aient que des points critiques algébriques, est la suivante : relativement à* $(\alpha - a)$, *quel que soit* a, $(V_4)_\alpha$ *et* $\mathfrak{H}_\alpha$ *appartiennent à des exposants égaux ou supérieurs respectivement à* -4 *et* -10.

Il est facile de faire, pour l'équation (1), dans l'hypothèse où ces conditions sont vérifiées, une discussion analogue à celle que j'ai faite au chapitre III, n°s 21 et 22, pour l'étude des divers cas que peuvent offrir les points critiques.

Premier cas. — Supposons que, relativement à $(\alpha - a)$, $(V_4)_\alpha$ appartienne à l'exposant minimum -4; ainsi :

$$(V_4)_\alpha = \frac{\mu^4}{(\alpha - a)^4}\varphi,$$

φ étant un développement de la forme

$$\varphi = 1 + A_1(\alpha - a) + A_2(\alpha - a)^2 + \ldots.$$

S'il en est ainsi, H a, pour $\alpha = a$, une limite finie ou nulle, et L une limite nulle. Je désigne par H_0 la limite de H par $\alpha = a$. En raisonnant comme je l'ai fait à l'endroit cité, on trouve immédiatement que l'équation déterminante, qui donne les exposants s auxquels peuvent appartenir les intégrales relativement à $(\alpha - a)$, est la suivante :

$$s^4 + 2H_0\mu^2 s^2 + \left(1 + \frac{9}{25}H_0^2\right)\mu^4 = 0. \tag{4}$$

On peut immédiatement observer que, *si $\alpha = a$ est un point critique algébrique pour les rapports des intégrales*, H_0 *est nécessairement différent de zéro.*

Deuxième cas. — Relativement à $(\alpha - a)$, je suppose $(V_4)_\alpha$ appartenant à un exposant supérieur à -4; soit $-4 + \lambda$ cet exposant, λ étant un entier positif. Ainsi,

$$(V_4)_\alpha = \mu^4(\alpha - a)^{\lambda - 4}\varphi,$$

la signification de φ étant la même que tout à l'heure.

On a, dans ce cas,

$$\frac{dx}{d\alpha} = (V_4)_\alpha^{\frac{1}{4}} = \mu(\alpha - a)^{\frac{\lambda}{4} - 1}[1 + B_1(\alpha - a) + B_2(\alpha - a)^2 + \ldots],$$

d'où l'on tire, en supposant $x = 0$ pour $\alpha = a$,

$$\alpha - a = \left(\frac{\lambda}{4\mu}x\right)^{\frac{4}{\lambda}}\left(1 + c_1 x^{\frac{4}{\lambda}} + c_2 x^{\frac{8}{\lambda}} + \ldots\right).$$

Soit maintenant H_1 la limite de $(\alpha - a)^{\frac{\lambda}{2}}H$ pour $\alpha - a$, limite qui devra être finie ou nulle; la limite de $(\alpha - a)^{\frac{\lambda}{4}}L$ sera $-\frac{8\mu}{\lambda}H_1$.

On aura ainsi :

$$H = H_1(\alpha - a)^{-\frac{\lambda}{2}} + \ldots = \left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^{-2} H_1 x^{-2} + \ldots,$$

$$L = \frac{dH}{dx} = -2\left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^{-2} H_1 x^{-3} + \ldots,$$

$$H^2 = \left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^{-4} H_1^2 x^{-4} + \ldots,$$

$$\frac{d^2H}{dx^2} = 6\left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^{-2} H_1 x^{-4} + \ldots.$$

L'équation déterminante, donnant les exposants s, est alors

$$(5)\qquad r(r-1)(r-2)(r-3)+2\left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^{-2}H_1 r(r-3) + \frac{18}{5}\left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^{-2}H_1+\frac{9}{25}\left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^{-4}H_1^2=0,$$

où l'on a posé

$$r=\frac{4s}{\lambda}.$$

Cette équation est analogue à celle de la page 146. On la rend bicarrée en posant $r=\frac{3}{2}+\nu$:

$$(6)\quad \left(\nu^2-\frac{9}{4}\right)\left[\nu^2-\frac{1}{4}+2\left(\frac{4\mu}{\lambda}\right)^2H_1\right]+\frac{18}{5}\left(\frac{4\mu}{\lambda}\right)^2H_1+\frac{9}{25}\left(\frac{4\mu}{\lambda}\right)^4H_1^2=0.$$

Les exposants s ont alors les expressions

$$(7)\qquad s=\frac{\lambda}{4}\left(\frac{2}{3}+\nu\right).$$

3. L'étude des conditions subsidiaires qui doivent être satisfaites quand les racines de l'équation déterminante ont des différences entières n'offre aucune difficulté par le moyen de l'équation canonique. Je vais en donner un exemple, dont le résultat me sera utile pour une application.

Cet exemple se rapporte au cas $\lambda=2$. Soient donnés

$$(8)\qquad \begin{cases} H=r\alpha^{-1}(1+R_1\alpha+R_2\alpha^2+\ldots),\\ L^2=q\alpha^{-3}(1+2Q_1\alpha+Q_2\alpha^2+\ldots).\end{cases}$$

Je me propose de chercher les conditions pour que $\alpha=0$ soit un point critique du troisième ordre à l'égard des rapports des intégrales, et cela de telle sorte que les différences entières des racines de l'équation déterminante soient égales à l'unité.

Des égalités (8) je déduis

$$\frac{dx}{d\alpha}=(V_4)_\alpha^{\frac{1}{4}}=\frac{H'}{L}=\frac{r}{q^{\frac{1}{2}}}\alpha^{-\frac{1}{2}}(1+A\alpha+\ldots).$$

Comme on le voit, c'est ici le cas $\lambda=2$, et l'on a

$$\mu=\frac{r}{q^{\frac{1}{2}}},\qquad H_1=r.$$

Les racines de l'équation déterminante sont, d'après (7),

$$s = \frac{3}{4} + \frac{\nu}{2},$$

et les quatre valeurs de ν sont données par l'équation (6) qui devient ici

$$\left(\nu^2 - \frac{9}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{1}{4} + 2\mathrm{R}\right) + \frac{18}{5}\mathrm{R} + \frac{9}{25}\mathrm{R}^2 = 0.$$

J'ai posé, pour abréger,

$$\mathrm{R} = \frac{4r^3}{q}.$$

Pour trouver la condition subsidiaire relative à l'existence d'une intégrale appartenant à l'exposant s, quand s et $s+1$ sont des racines de l'équation déterminante, on raisonnera comme au chapitre III, n°s 24 et 25, et l'on trouvera

$$2s(2s-1) + \frac{9\mathrm{R}}{25} = 0.$$

La solution s'achève sans difficulté et conduit à ce résultat : *la condition demandée est*

$$\frac{r^3}{q} = \left(\frac{5}{12}\right)^2. \tag{9}$$

Moyennant cette condition, les intégrales appartiennent aux exposants

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{4} + 1.$$

4. Je vais maintenant envisager une classe d'équations du quatrième ordre, à forme canonique exceptionnelle, qui présente une infinité de cas où l'intégration peut être faite suivant les procédés généraux employés dans ce mémoire.

Je me donne en H, L en fonction de α, comme il suit :

$$\mathrm{H} = r(\alpha + c), \qquad \mathrm{L}^2 = q\,\alpha(\alpha - 1)^2. \tag{10}$$

De ces formules je tire

$$(\mathrm{V}_4)^\alpha = \left(\frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{L}}\right)^4 = \frac{r^4}{q^2}\,\frac{1}{\alpha^2(\alpha-1)^4}.$$

D'après l'analyse qui précède, on reconnaît aisément que, *relativement à* α, *les intégrales appartiennent aux exposants* $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$.

Pour le point critique $\alpha = 1$, j'ai, d'après (4), l'équation déterminante

$$s^4 + 2(1+c)\frac{r^3}{q}s^2 + \frac{r^4}{q^2} + \frac{9}{25}(1+c)^2\frac{r^6}{q^2} = 0. \tag{11}$$

Enfin, pour $\alpha = \infty$, je pose $\alpha = \frac{1}{\beta}$; j'ai alors

$$(V_4)_\beta = (V_4)_\alpha\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^4 = \frac{r^4}{q^2}\,\frac{1}{\beta^2(\beta-1)^4}.$$

Je peux appliquer le résultat du n° 3. Je fais donc

$$\frac{r^3}{q} = \left(\frac{5}{12}\right)^2,$$

et, relativement à $\frac{1}{\alpha}$, *les intégrales appartiennent aux exposants*

$$\frac{1}{4},\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{3},\quad \frac{1}{4}+\frac{2}{3},\quad \frac{1}{4}+1.$$

Je peux disposer de deux arbitraires dans les coefficients de l'équation (11), et faire en sorte que les racines soient $\pm a$, $\pm b$, a et b étant des nombres donnés à volonté. Si maintenant ces nombres sont choisis de telle sorte que les différences des racines, savoir $2a$, $2b$, $a+b$, $a-b$, soient fractionnaires et aient m pour commun dénominateur, $\alpha = 1$ devient un point critique algébrique d'ordre m.

Voici énoncé le résultat explicite du calcul très simple qui provient de ces suppositions :

Soient $H = r(\alpha + c)$, $L^2 = q\alpha(\alpha-1)^2$ *les expressions des invariants absolus* H, L *en fonction d'une variable auxiliaire* α, *au moyen desquelles on définit une classe d'équations linéaires du quatrième ordre dont l'invariant* V *est identiquement nul;*

Si les coefficients r, q, c *sont déterminés comme il suit, en fonction de deux nombres commensurables et inégaux* a, b :

$$= -1 - \frac{2^3.3^2}{5^2}(a^2+b^2),$$

$$r = \frac{5^3}{2^3.3^2}\,\frac{1}{\sqrt{100a^2b^2 - 9(a^2+b^2)^2}},$$

$$q = \frac{5^7}{2^5.3^4}\,\frac{1}{\sqrt{[100a^2b^2 - 9(a^2+b^2)^2]^3}};$$

Si, en outre, $2a$, $2b$, $a+b$, $a-b$ *sont fractionnaires, et que leur plus petit commun dénominateur soit désigné par* m;

Alors les rapports des intégrales, considérés comme des fonctions de α, *n'ont que trois points critiques, qui sont algébriques, savoir :* $\alpha = 0$, *du second ordre ;* $\alpha = \infty$, *du troisième ordre ; et* $\alpha = 1$ *de l'ordre* m.

En conséquence, pour $m = 4$ *ou* $m = 5$ (il est impossible de satisfaire aux conditions ci-dessus avec $m = 3$), *les rapports des intégrales et la variable* α *sont rationnellement exprimables en fonction d'une même variable.*

Pour $m = 6$, *l'équation est intégrable par les fonctions elliptiques.*

5. Examinons les procédés d'intégration pour $m = 4$ ou $m = 5$. Il faut envisager la solution primitive de l'équation $X^2 + Y^3 + Z^m = 0$ en polynomes entiers d'une variable η, et poser

$$\alpha = -\frac{X^2}{Y^3}, \qquad \text{d'où résulte} \qquad \alpha - 1 = \frac{Z^m}{Y^3}.$$

Appliquant la proposition IX du chapitre I (p. 39), on prend une nouvelle inconnue z, en posant

$$y = \frac{Y^{\frac{3}{4}}}{Z^{ma}} z,$$

a étant, je suppose, le plus grand des deux nombres a, b, pris positivement.

Ceci fait, *on a, pour* z, *un polynome entier en* η *; et le degré de ce polynome est*

$$d = M\left(a - \frac{1}{4}\right), \tag{12}$$

M étant le degré de la solution primitive de l'équation indéterminée ; ainsi :

$$m = 4, \qquad M = 24;$$
$$m = 5, \qquad M = 60.$$

Les polynomes z jouissent des propriétés suivantes :

1° *Leurs combinaisons linéaires appartiennent, relativement à tout binome* $(\eta - \beta)$, *où* β *n'est pas racine de* Z, *aux exposants* 0, 1, 2, 3 ;

2° *Relativement à tout binome* $(\eta - \eta_1)$, *où* η_1 *est racine de* Z, *aux exposants* 0, $m(a-b)$, $m(a+b)$, $2ma$;

3° *Ils se transforment par des substitutions linéaires quand on effectue sur* η *les substitutions du groupe* G, *attaché à l'équation* $X^2+Y^3+Z^m=0$.

Je dis que, *réciproquement, des polynomes qui satisfont à ces conditions sont les intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre, appartenant à la classe définie par l'énoncé ci-dessus.*

Pour le prouver, je vais d'abord montrer que l'invariant V_η est identiquement nul. Effectivement, il ne peut avoir pour dénominateur qu'une puissance de Z; mais les exposants auxquels appartiennent les combinaisons des z relativement à $(\eta-\eta_1)$ sont tels que la somme de deux d'entre eux $0+2ma$ égale la somme des deux autres $m(a-b)+m(a+b)$; il en résulte (p. 146) que V_η ne peut être infini au plus que du second ordre pour $\eta=\eta_1$, et ne contient Z qu'avec l'exposant 2 au plus en dénominateur. Son numérateur est d'ailleurs (p. 149) d'un degré inférieur de six unités à celui du dénominateur. D'après la troisième condition, ce dénominateur est un covariant de X, Y, Z. Il n'existe aucun covariant dont le degré satisfasse à cette condition. Donc V_η est identiquement nul.

Il est donc déjà prouvé que l'équation du quatrième ordre, dont la variable est η, et dont les intégrales sont les polynomes z, est dans le cas où ne s'applique pas la forme canonique générale.

Examinons maintenant l'invariant $(V_4)_\eta$ [1]. Son dénominateur est une puissance de Z, au plus la quatrième; et le degré de son numérateur doit être inférieur de huit unités à celui de son dénominateur (p. 149), parce que le poids de V_4 est égal à 4. Ce numérateur est un covariant de X, Y, Z, et l'on trouve aisément que ce covariant ne peut exister que si Z est en dénominateur au quatrième degré; le numérateur est alors Y^2, sauf un coefficient numérique. J'ai donc

$$(V_4)_\eta = A\frac{Y^2}{Z^4}.$$

Si je pose

$$\alpha = -\frac{X^2}{Y^3},$$

---

[1] C'est un *pseudo-invariant*, qui devient *invariant* quand V est identiquement nul.

il en résulte

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{XZ^{m-1}}{Y^4}, \qquad (V_4)_\alpha = (V_4)_\eta \left(\frac{d\eta}{d\alpha}\right)^4 = A\frac{1}{\alpha^2(\alpha-1)^4}.$$

Ainsi, relativement à la variable α, l'invariant $(V_4)_\alpha$ a précisément la forme qui résulte des données (10).

Pour $\eta = \eta_1$, $(V_4)_\eta$ est infini du quatrième ordre; il en résulte que H conserve une valeur finie, différente de zéro (p. 223). L'invariant relatif $\mathfrak{H}_\eta$, qui lui sert de numérateur, est donc infini du dixième ordre. Cet invariant $\mathfrak{H}_\eta$ a, par suite, la forme

$$\mathcal{H}_n = \frac{Y^2(cY^3 - X^2)}{Z^{10}},$$

comme on le voit, toujours par l'emploi des mêmes principes. Je déduis de là

$$H = \frac{\mathfrak{H}_\eta}{(V_4)_\eta^{\frac{5}{2}}} = r\frac{cY^3 - X^2}{Y^3} = r(\alpha + c),$$

r et c étant deux constantes. Ainsi H a bien la forme (10). Ayant déjà trouvé V_4, j'en déduis L^2, conforme aux données (10), et la proposition est prouvée.

6. Ainsi, dans le cas actuel, l'intégration est encore, exactement comme dans les chapitres précédents, ramenée à la construction des polynomes z, d'après des conditions algébriques nettement définies, et avec la certitude que cette construction est possible d'une seule manière. Il n'est plus nécessaire d'entrer dans aucun détail sur la résolution du problème, après les développements que j'ai donnés à ce sujet dans les chapitres qui précèdent. J'ai calculé les intégrales pour divers exemples, dont je vais ici en rapporter deux.

Premier exemple : $a = \frac{5}{8}$, $b = \frac{1}{8}$; $m = 4$, $d = 9$.

Les polynomes X, Y, Z sont les mêmes qu'au chapitre VI (p. 206), et l'on pose

$$\alpha - 1 = -2^2.3^3\frac{Z^4}{Y^3}.$$

L'intégrale générale se compose des intégrales particulières

$$y = \frac{Y^{\frac{3}{4}}}{Z^{\frac{\alpha}{2}}}z,$$

z désignant un quelconque des polynomes suivants :

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \eta_1^5(\eta_1^4 - 9\eta_2^4),\\
z_\infty &= \eta_2^5(\eta_2^4 - 9\eta_1^4),\\
z_1 &= (\eta_2 - \eta_1)^5[(\eta_2 - \eta_1)^4 - 9(\eta_1 + \eta_2)^4],\\
z_{-1} &= (\eta_2 + \eta_1)^5[(\eta_1 + \eta_2)^4 - 9(\eta_1 - \eta_2)^4],\\
z_i &= (\eta_1 - i\eta_2)^5[(\eta_1 - i\eta_2)^4 - 9(\eta_1 + i\eta_2)^4],\\
z_{-i} &= (\eta_1 + i\eta_2)^5[(\eta_1 + i\eta_2)^4 - 9(\eta_1 - i\eta_2)^4].
\end{aligned}
$$

Ces polynomes sont liés par les deux relations

$$
\begin{aligned}
z_{-1} - z_1 + z_{-i} - z_i + 32 z_0 &= 0,\\
z_{-1} + z_1 + i z_{-i} + i z_i + 32 z_\infty &= 0.
\end{aligned}
$$

7. *Deuxième exemple :* $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$; $m = 5$, $d = 9$.

Les polynomes X, Y, Z sont les mêmes qu'au chapitre VI, n° 15 (p. 210). On pose

$$\alpha - 1 = 2^6 . 3^3 \frac{Z^5}{Y^3}.$$

L'intégrale générale se compose des intégrales particulières

$$y = \frac{Y^{\frac{3}{4}}}{Z^2} z,$$

z étant un quelconque des polynomes suivants :

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \eta_1^4(\eta_1^5 + 18\eta_2^5),\\
z_2 &= \eta_1^3\eta_2(3\eta_1^5 + 4\eta_2^5),\\
z_3 &= \eta_1\eta_2^3(4\eta_1^5 - 3\eta_2^5),\\
z_4 &= \eta_2^4(18\eta_1^5 - \eta_2^5).
\end{aligned}
$$

8. Je ne traite ici aucun exemple relatif au cas $m = 6$. Dans ce cas, qui exige l'emploi des fonctions elliptiques, l'équation appartient à l'une des classes plus générales dont je vais parler dans le chapitre IX, ainsi que je l'ai dit aussi pour les équations des chapitres VI et VII.

En terminant ici les applications de la méthode d'intégration par les fractions rationnelles, je dois présenter quelques observations au sujet des exemples que j'ai choisis. Je n'ai pas formé explicitement

les équations à coefficients rationnels, et à variable α; je les ai seulement définies par leurs invariants. Mais il n'y a aucune difficulté à obtenir effectivement ces équations; et tout d'abord leur forme générale apparaît immédiatement comme résultant de cette propriété commune que *les rapports des intégrales, envisagés comme des fonctions de* α, *n'ont que trois points singuliers* o, 1, ∞.

Par un choix convenable de l'inconnue, on pourra prendre pour type des équations envisagées aux chapitres IV, V et VI l'équation

$$\text{(A)}\qquad \frac{d^3y}{d\alpha^3}+\frac{\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}}{\alpha(\alpha-1)}\frac{d^2y}{d\alpha^2}+\frac{\mathrm{C}\alpha^2+\mathrm{D}\alpha+\mathrm{E}}{\alpha^2(\alpha-1)^2}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{\mathrm{F}\alpha+\mathrm{G}}{\alpha^2(\alpha-1)^2}y=0,$$

analogue à l'équation de Gauss.

On pourrait aisément déterminer les relations qui existent entre les coefficients de cette dernière équation et les coefficients des invariants que j'ai introduits à sa place. Il est visible que cette introduction des invariants a eu pour effet de mettre immédiatement en évidence les éléments vraiment caractéristiques de l'équation (A).

Me plaçant à ce point de vue, je suis en droit de dire que, dans le présent mémoire, j'ai signalé cinq séries indéfinies de cas d'intégrabilité de l'équation (A); dans les chapitres IV, V, VI, je l'ai effectivement intégrée, pour douze cas particuliers, appartenant à quatre de ces séries.

Et de même, les équations du quatrième ordre que j'ai envisagées au chapitre VII et dans le présent chapitre sont des cas de celle-ci :

$$\text{(B)}\qquad \frac{d^4y}{d\alpha^4}+\frac{\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}}{\alpha(\alpha-1)}\frac{d^3y}{d\alpha^3}+\frac{\mathrm{C}\alpha^2+\mathrm{D}\alpha+\mathrm{E}}{\alpha^2(\alpha-1)^2}\frac{d^2y}{d\alpha^2}+\frac{\mathrm{F}\alpha^3+\mathrm{G}\alpha^2+\mathrm{H}\alpha+\mathrm{J}}{\alpha^3(\alpha-1)^3}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{\mathrm{L}\alpha^2+\mathrm{M}\alpha+\mathrm{N}}{\alpha^3(\alpha-1)^3}y=0,$$

dont j'ai signalé trois séries indéfinies de cas d'intégrabilité, et que j'ai effectivement intégrée dans cinq cas, appartenant à deux de ces séries.

Il y a plus : les équations à coefficients doublement périodiques dont j'ai obtenu l'intégration, pour ainsi dire à vue, par les fonctions elliptiques, au chapitre II (n°s 21 et 23), sont encore, quand on suppose nul le module g_2, des transformées des équations (A) et (B). Ces deux équations ont été intégrées par des fonctions doublement périodiques ordinaires, en sorte que ce sont là de

nouveaux cas où les équations (A), (B) s'intègrent *algébriquement*, non plus par des fonctions rationnelles, mais par des fonctions du genre 1.

Cette identité, sauf une transformation facile, entre les équations (A), (B) d'une part, dans quelques-uns de leurs cas particuliers, d'ailleurs très étendus, et les équations du chapitre II, dont je viens de parler, va apparaître dans le chapitre IX.

CHAPITRE IX.

Équations à coefficients doublement périodiques, comprenant, comme cas particuliers, la plupart des équations envisagées précédemment. — Équation du quatrième ordre, contenant une constante arbitraire et dont on peut trouver explicitement l'intégrale générale. — Équations d'ordre impair qui se rattachent à la division de l'argument dans les fonctions elliptiques. — Première méthode générale d'intégration. — Application et exemple d'une équation du troisième ordre. — Deuxième méthode générale d'intégration. — Application à deux exemples portant sur des équations du troisième ordre.

---

1. Il s'agit, dans ce chapitre, d'équations linéaires qui se peuvent transformer en des équations à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme. J'ai donné, dans le chapitre II, deux propositions (p. 58 et 74) qui concernent de telles équations, et j'ai déjà montré par quatre exemples (p. 93 à 97) comment ces propositions s'appliquent. Je vais ici produire de nouveaux exemples, d'une forme plus générale, et qui se rattachent, dans leurs cas particuliers, aux équations analogues à l'équation de Gauss et d'ordre supérieur.

Je me sers ici de la fonction elliptique *générale* $p(u)$, je veux dire à modules quelconques g_2, g_3.

Soit l'équation linéaire d'ordre q

$$(1)\qquad \frac{d^q y}{du^q} + \mathrm{A}\,p(u)\frac{d^{q-2}y}{du^{q-2}} + \mathrm{B}\,p'(u)\frac{d^{q-3}y}{du^{q-3}} + [\mathrm{C}\,p''(u) + \mathrm{D}\,g_2]\frac{d^{q-4}y}{du^{q-4}} + \mathrm{E}\,p'''(u)\frac{d^{q-5}y}{du^{q-5}} + [\mathrm{G}\,p^{\mathrm{IV}}(u) + \mathrm{H}\,g_2\,p(u) + \mathrm{J}\,g_3]\frac{d^{q-6}y}{du^{q-6}} + \ldots = 0,$$

dont les coefficients sont composés suivant la loi suivante :

On attribue à $p(u)$, $p'(u)$, $p''(u)$, $p'''(u)$, $p^{\mathrm{IV}}(u)$, ... les *poids* 2, 3, 4, 5, 6, ... à g_2 le poids 4, à g_3 le poids 6; et l'on prend pour coefficient de $\frac{d^{q-n}y}{du^{q-n}}$ une fonction entière de ces quantités, homogène et du poids n. Cette fonction homogène peut d'ailleurs être réduite

à un nombre de termes moindre que le nombre assigné par son poids seul, si l'on a égard aux relations identiques qui ont lieu, savoir :

$$\begin{aligned} p'^2(u) &= 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3, \\ p''(u) &= 6p^2(u) - \frac{1}{2}g_2, \\ p'''(u) &= 12\,p(u)\,p'(u), \\ p^{\text{IV}}(u) &= 12\,p'^2(u) + 12\,p(u)\,p''(u), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si l'on compare l'équation (1) à l'équation générale d'ordre q

$$\frac{d^q y}{du^q} + q\,P_1 \frac{d^{q-1}y}{du^{q-1}} + \frac{q(q-1)}{1.2} P_2 \frac{d^{q-2}y}{du^{q-2}} + \ldots = 0,$$

on voit que sa propriété caractéristique résultant de sa définition est celle-ci : *Chaque coefficient* P_m *est homogène et de poids égal à son indice* m. Je rappelle maintenant l'homogénéité dont jouit la fonction $p(u)$, et que définit l'équation

$$p\left(\frac{1}{\lambda}u,\ g_2\lambda^4,\ g_3\lambda^6\right) = \lambda^2\,p(u,\ g_2,\ g_3).$$

Si dans les coefficients de (1) nous mettons de même en évidence u, g_2, g_3, nous aurons

$$P_m\left(\frac{1}{\lambda}u,\ g_2\lambda^4,\ g_3\lambda^6\right) = \lambda^m\,P_m(u,\ g_2,\ g_3);$$

d'où résulte que l'équation (1) peut s'écrire indifféremment sous l'une des formes

$$\sum \frac{q(q-1)\ldots(q-m+1)}{1.2\ldots m}\ \frac{d^{q-m}y}{du^{q-m}}\ P_m(u,\ g_2,\ g_3) = 0,$$

$$\sum \frac{q(q-1)\ldots(q-m+1)}{1.2\ldots m}\ \frac{d^{q-m}y}{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)^{q-m}}\ P_m\left(\frac{u}{\lambda},\ g_2\lambda^4,\ g_3\lambda^6\right) = 0.$$

Avec les notations usuelles, cette propriété peut être exprimée ainsi : *L'équation* (1) *reste inaltérée si l'on remplace l'argument* u *et le module* k *par* ku *et* $\frac{1}{k}$ *ou par* iu *et* k' (module complémentaire). Mais je laisse de côté cette propriété, et de la composition des coefficients P_m, je conclus que *chaque invariant de l'équation* (1) *est homogène relativement au poids dont il s'agit ici, poids qui se*

trouve coïncider avec le nombre que nous avons déjà appelé poids d'un invariant (p. 106).

L'invariant V (p. 112) est, pour l'équation (1) :

$$(2)\qquad V_u = \frac{6}{q(q-1)}\left(A - \frac{2}{q-2}B\right)p'(u) = \mathcal{A}\,p'(u).$$

On pourra écrire *a priori* la forme générale de chaque invariant entier, d'après son poids, sous la condition de reconnaître ensuite comment les coefficients sont composés avec ceux de (1). J'ai mis les coefficients de (1) sous la forme la plus commode pour l'application, mais on peut prendre une autre forme équivalente pour toute fonction entière de $p(u)$, $p'(u)$, $p''(u)$, ..., g_2, g_3, homogène et de poids m.

Cette forme est :

1° Si m est pair,

$$p(u)^{\frac{m}{2}} + A g_2\, p(u)^{\frac{m}{2}-2} + B g_3\, p(u)^{\frac{m}{2}-3} + C g_2^2\, p(u)^{\frac{m}{2}-4} + \ldots;$$

2° Si m est impair,

$$p'(u)\left[p(u)^{\frac{m-3}{2}} + A g_2\, p(u)^{\frac{m-3}{2}-2} + B g_3\, p(u)^{\frac{m-3}{2}-3} + C g_2^2\, p(u)^{\frac{m-3}{2}-4} + \ldots\right].$$

Soit donc J_m un invariant entier du poids m; si m est pair, l'invariant absolu $\frac{J_m^3}{V^m}$ aura la forme

$$\frac{J_m^2}{V^m} = \mathfrak{B}\,\frac{\left[p(u)^{\frac{m}{2}} + A g_2\, p(u)^{\frac{m}{2}-2} + \ldots\right]^3}{[4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3]^{\frac{m}{2}}},$$

qui est une fonction rationnelle de $p(u)$. Si m est impair, on aura

$$\frac{J_m^3}{V^m} = \mathfrak{B}\,\frac{\left[p(u)^{\frac{m-3}{2}} + A g_2\, p(u)^{\frac{m-3}{2}-2} + \ldots\right]^3}{[4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3]^{\frac{m-3}{2}}},$$

qui est encore une fonction rationnelle de $p(u)$. Ainsi : *les invariants absolus rationnels de l'équation* (1) *sont des fonctions rationnelles de* $p(u)$, et l'on en conclut que, *si l'on prend* $p(u)$ *pour variable indépendante, l'équation* (1) *se transforme en une équation à coefficients rationnels.*

Envisageons le cas particulier où le module g_2 est nul et faisons $g_3 = -1$. Suivant la composition du nombre m, les fractions rationnelles précédentes prennent l'une des trois formes :

$$\frac{[p(u)^{3n} + B\,p(u)^{3(n-1)} + \ldots]^3}{[4\,p^3(u)+1]^{3n}},$$

$$\frac{p(u)^3\,[p(u)^{3n} + B\,p(u)^{3(n-1)} + \ldots]^3}{[4\,p^3(u)+1]^{3n+1}},$$

$$\frac{p(u)^6\,[p(u)^{3n} + B\,p(u)^{3(n-1)} + \ldots]^3}{[4\,p^3(u)+1]^{3n+2}}.$$

Si l'on prend alors pour variable α, en posant

$$\alpha = \frac{1}{1+4\,p^3(u)},$$

ces fractions deviennent

$$[a\alpha^n + b\alpha^{n-1} + c\alpha^{n-2} + \ldots]^3,$$

$$(\alpha-1)\;[a\alpha^n + b\alpha^{n-1} + c\alpha^{n-2} + \ldots]^3.$$

$$(\alpha-1)^2\,[a\alpha^n + b\alpha^{n-1} + c\alpha^{n-2} + \ldots]^3.$$

Il suffit d'appliquer ceci aux invariants absolus h^3, s_4^3, ... qui sont les coefficients de l'équation canonique, pour reconnaître que, *dans le cas où le module g_2 est nul, les équations du troisième et du quatrième ordre renfermées dans la forme générale* (1) *appartiennent aux classes étudiées précédemment dans les chapitres VI et VII.* D'après la formule (2), on établit aussi aisément que, *dans ce même cas* ($g_2 = 0$), *si l'invariant* V *est nul, les équations du quatrième ordre renfermées dans la forme générale* (1) *appartiennent à la classe étudiée dans le chapitre VIII.* Je n'insisterai pas davantage sur ces cas particuliers. On peut signaler encore, comme méritant une mention spéciale, le cas où le module g_3 est nul. Quand il en est ainsi, l'équation se transforme en une équation à coefficients rationnels, si l'on prend $p^2(u)$ pour variable [1].

2. Je laisse complètement de côté tous ces cas spéciaux, pour étudier l'équation (1) avec des modules quelconques. Ainsi que je

(1) Cette considération donne naissance à d'autres classes d'équations, à coefficients rationnels, et n'ayant que trois points singuliers, partant intégrables par les fonctions rationnelles dans des séries indéfinies de cas. C'est pour ne pas allonger ce mémoire outre mesure que je les passe sous silence.

l'ai montré au chapitre II, il se présente des différences notables entre les équations dont l'ordre est premier et celles dont l'ordre est composé. J'étudierai, pour cette raison, en premier lieu, l'équation du quatrième ordre.

Je prends donc l'équation

$$(3)\qquad y^{\text{IV}} + \mathrm{A}\,p(u)y'' + \mathrm{B}\,p'(u)y' + [\mathrm{C}\,p''(u) + \mathrm{D}\,g_2]y = 0,$$

que déjà au chapitre II, n° 23 (p. 96), j'ai intégrée dans un cas particulier. Pour simplifier un peu l'écriture, quand je voudrai introduire les fonctions elliptiques ordinaires sn, cn, dn, je supposerai, ce qui ne nuit en rien à la généralité, les modules g_2, g_3, dont le rapport $g_2^3 : g_3^2$ seul est fondamental, pris de telle sorte que le nombre λ (p. 70) soit l'unité, en sorte que la relation entre $p(u)$ et $\operatorname{sn} u$ soit simplement

$$(4)\qquad p(u) = -\frac{1+k^2}{3} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u}.$$

Il est entendu aussi que, conservant toujours les mêmes notations, je désigne par ϖ et par ϖ' les périodes que, dans les notations de Jacobi, on désigne par $2\mathrm{K}$ et par $2i\mathrm{K}'$.

Tout d'abord, je veux faire une remarque et une vérification au sujet de la solution trouvée (p. 96) pour un cas de l'équation (3). Cette solution est

$$(5)\qquad y = \left[p'\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{4}} \left[c + c' \operatorname{sn}\left(\frac{u}{2} + \frac{\varpi'}{2}\right) + c'' \operatorname{cn}\left(\frac{u}{2} + \frac{\varpi'}{2}\right) + c''' \operatorname{dn}\left(\frac{u}{2} + \frac{\varpi'}{2}\right)\right].$$

D'après (4), on a

$$p'(u) = -2\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^3 u},$$

et, si l'on utilise les formules qui donnent

$$\operatorname{sn}\left(v + \frac{\varpi'}{2}\right),\quad \operatorname{cn}\left(v + \frac{\varpi'}{2}\right),\quad \operatorname{dn}\left(v + \frac{\varpi'}{2}\right)$$

en fonction de $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$, on peut écrire, au lieu de (5), et en changeant les constantes, que je désigne cependant par les mêmes lettres

$$(6)\qquad y = \left(\operatorname{cn}\frac{u}{2}\operatorname{dn}\frac{u}{2}\operatorname{sn}\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \left(c + c' \operatorname{sn}\frac{u}{2} + c'' \operatorname{cn}\frac{u}{2} + c''' \operatorname{dn}\frac{u}{2}\right).$$

L'observation que je veux faire consiste en ceci : la connaissance d'une seule intégrale particulière aurait suffi pour trouver toutes les autres. Soit, par exemple, l'intégrale particulière

$$y = \left[p'\left(\frac{u}{2}\right) \right]^{-\frac{1}{4}},$$

qui est effectivement celle que j'ai tout d'abord trouvée (p. 97). L'équation proposée (3) ayant les périodes ϖ et ϖ', *relativement à u*, j'ai aussi les intégrales

$$y = \left[p'\left(\frac{u + m\varpi + m'\varpi'}{2}\right) \right]^{-\frac{1}{4}} \qquad (m, m' = 0, 1).$$

J'obtiens ainsi les diverses intégrales particulières contenues dans la formule (6), par exemple :

$$y_1 = \left[p'\left(\frac{u + \varpi}{2}\right) \right]^{-\frac{1}{4}} = \left[\frac{2k'^2 \operatorname{sn}\frac{u}{2} \operatorname{dn}\frac{u}{2}}{\operatorname{cn}^3 \frac{u}{2}} \right]^{-\frac{1}{4}}$$

$$= \left(2k'^2 \operatorname{sn}\frac{u}{2} \operatorname{cn}\frac{u}{2} \operatorname{dn}\frac{u}{2} \right)^{-\frac{1}{4}} \operatorname{cn}\frac{u}{2}$$

et ainsi des autres. Comme on va le voir, une observation de même nature trouvera tout à l'heure sa place dans un exemple plus général.

3. Je prends maintenant l'équation (3), dans sa généralité, et l'équation déterminante relative au point singulier $u \equiv 0$, qui est

$$(7) \qquad s(s-1)(s-2)(s-3) + As(s-1) - 2Bs + 6C = 0.$$

Au moyen du développement de $p(u)$, savoir

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \star + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \ldots,$$

il est aisé de former l'équation subsidiaire, qui doit être vérifiée quand deux intégrales appartiennent, relativement à u, à des exposants dont la différence est un entier pair. On a déjà dit que, pour une différence impaire, la condition est satisfaite d'elle-même. En outre, à cause de la lacune de $p(u)$ au second terme, lacune que la forme de l'équation (3) conserve dans chaque coefficient et que l'homogénéité exige, une différence égale à 2 n'entraîne non plus aucune condition subsidiaire.

J'écris ici la condition pour l'existence de l'exposant s, quand l'équation (4) admet les racines s et $(s+4)$.

Voici cette condition, déjà employée (p. 96) :

$$\frac{A}{20}s(s-1)+\frac{B}{10}s+\frac{C}{10}+D=0. \tag{8}$$

4. Faisons d'abord l'observation que l'équation adjointe de (3) est la suivante :

$$y^{\text{IV}}+A\,p(u)y''+(2A-B)\,p'(u)y'+[(A-B+C)\,p''(u)+Dg_2]y=0.$$

Elle ne diffère de (3) que par les coefficients, et reproduit l'équation (3) elle-même si $A=B$. Ceci est d'accord avec la valeur trouvée pour l'invariant V, équation (2).

Ce cas spécial $A=B$ donne lieu à une équation qui présente la plus grande analogie avec l'équation de Lamé. Effectivement, l'équation (7) devient

$$s(s-3)[(s-1)(s-2)+A]+6C=0,$$

qui se transforme en une équation bicarrée quand on pose $s=\frac{3}{2}+\nu$. On peut déterminer A, C de telle sorte que l'équation bicarrée en ν ait les racines $\pm\frac{2n-1}{2}$, $\pm\frac{2n+3}{2}$, n étant un entier arbitraire. Ceci fait, on a pour s les quatre valeurs :

$$s=-n,\quad -n+2,\quad n+1,\quad n+3,$$

dont quatre différences sont impaires et deux autres sont égales à 2. Il n'y a donc aucune condition subsidiaire à vérifier, les intégrales appartiennent aux quatre exposants s, qui sont des nombres entiers. De là cette conséquence explicite :

L'équation

$$y^{\text{IV}}-2n(n+1)\,p(u)y''-2n(n+1)\,p'(u)y' + \left[\frac{n(n+1)(n+3)(n-2)}{6}\,p''(u)+\alpha\right]y=0,$$

où α est une constante arbitraire et n un nombre entier, a son intégrale générale uniforme.

Je ne m'occuperai pas de l'intégration de cette équation, ayant principalement en vue, dans ce chapitre, les équations dont l'intégrale ne devient uniforme qu'après changement de l'inconnue et des périodes. Une méthode analogue à celle que j'ai employée pour

l'équation de Lamé s'y applique. J'observe seulement, en passant, que la remarque générale faite à la fin du chapitre II conduit à cette conséquence :

L'équation

$$y^{\text{IV}} - 2n(n+1)\frac{1}{u^2}y'' + 4n(n+1)\frac{1}{u^3}y' + \left[\frac{n(n+1)(n+3)(n-2)}{u^4} + \alpha\right]y = 0,$$

où n est un nombre entier et α une constante, a quatre intégrales particulières de la forme $e^{\sqrt[4]{\alpha u}}\varphi\left(\frac{1}{u}\right)$, *où φ est un polynome entier.*

5. Voici maintenant le cas de l'équation (3) sur lequel je désire m'arrêter. Je détermine les coefficients A, B, C, de telle sorte que l'équation déterminante ait les racines

$$s_0, \quad s_0+2, \quad s_0+4, \quad s_0+2n+5,$$

n étant un nombre entier, et s_0 étant calculé de manière que la somme soit égale à 6, comme il convient. Parmi les six différences des racines, cinq sont alors ou impaires ou égales à 2; seule, la différence entre la première et la troisième est égale à 4. Je détermine alors le coefficient D de manière que l'équation subsidiaire (8) ait lieu pour $s = s_0$. Cela fait, je suis assuré que les intégrales appartiennent à des exposants respectivement égaux aux racines dont il s'agit, et j'ai une équation contenant seulement un entier arbitraire n. Voici la définition de l'équation, explicitement tirée de ces conditions :

Équation (A). — *Soit l'équation*

$$\text{(A)} \qquad y^{\text{IV}} + A\,p(u)y'' + B\,p'(u)y' + [C\,p''(u) + D g_2]y = 0,$$

où les coefficients sont ainsi déterminés en fonction d'une arbitraire α :

$$A = -3\,\frac{(\alpha+2)^2+4}{8},$$

$$B = \frac{(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha-6)-24}{16},$$

$$C = -\frac{(\alpha+4)^2(\alpha-4)(\alpha-12)}{2^9},$$

$$D + \frac{1}{20}A\left(\frac{\alpha}{4}+1\right)\left(\frac{\alpha}{4}+2\right) - \frac{B}{10}\left(\frac{\alpha}{4}+1\right) + \frac{C}{10} = 0.$$

Si α est un nombre impair, les rapports des intégrales sont des fonctions uniformes de u. Les intégrales elles-mêmes appartiennent, relativement à u, aux exposants

$$s_0 = -\left(1 + \frac{\alpha}{4}\right), \quad s_0 + 2, \quad s_0 + 4, \quad s_0 + \alpha + 4.$$

Je prends donc pour α un nombre impair; les intégrales ne sont pas uniformes; il y a lieu d'appliquer la proposition XVII.

Par un changement d'inconnue, on rendra l'intégrale uniforme, mais les périodes seront changées.

6. Intégration générale de l'équation (A). — J'intitule ainsi l'étude que je vais faire de l'équation (A); car, circonstance inattendue, on peut effectivement écrire explicitement l'intégrale générale, quel que soit le nombre α. C'est un fait analogue à celui que j'ai rencontré au chapitre VI (p. 208).

Conformément à la proposition XVII et à l'observation qui la suit (p. 59) pour le cas d'un seul point critique, le facteur par lequel il faut multiplier la nouvelle inconnue z, pour reproduire y, est ici

$$\left[\psi_2\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{-\left(1+\frac{2n+1}{4}\right)}.$$

La fonction $\psi_2(v)$ n'est autre que $p'(v)$. Donc, en posant

$$y = z\left[p'\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{-\left(1+\frac{2n+1}{4}\right)},$$

on a pour z une fonction uniforme de u, intégrale d'une équation dont les coefficients ont les périodes ϖ, ϖ', relativement à $\frac{u}{2}$.

D'après la valeur de s_0, savoir $s_0 = -\left(1 + \frac{2n+1}{4}\right)$, et les valeurs des autres exposants $s_0 + 2$, $s_0 + 4$, $s_0 + 2n + 5$, nous voyons que, *relativement à $\frac{u}{2}$ ou relativement à $\left(\frac{u}{2} - m\varpi - m\varpi'\right)$, les combinaisons linéaires des fonctions z appartiennent aux exposants précédents diminués de $3\left(1 + \frac{2n+1}{4}\right)$, ce qui fait $-(2n+5)$, $-(2n+3)$, $-(2n+1)$ et* ZÉRO.

J'emploie maintenant un raisonnement analogue à celui qui m'a

déjà servi (p. 97). L'exposant s_0 n'étant pas la moitié d'un nombre entier, il y a quatre fonctions distinctes z doublement périodiques de deuxième espèce, et dont les multiplicateurs correspondants ne diffèrent entre eux que par les signes (chapitre II, n° 14, p. 75). Leurs périodes sont ϖ, ϖ', relativement à $\frac{u}{2}$. Envisageons ces fonctions comme ayant, toujours relativement à $\frac{u}{2}$, les périodes 2ϖ, $2\varpi'$; les multiplicateurs $\pm\mu$, $\pm\mu'$ deviennent μ^2 et μ'^2 pour les quatre fonctions z. Toute combinaison linéaire de ces fonctions conserve alors cette même propriété, d'être doublement périodique de deuxième espèce, ou de première, aux périodes 2ϖ, $2\varpi'$, relativement à $\frac{u}{2}$. Or l'exposant zéro, qu'on vient de trouver, montre qu'il existe une combinaison linéaire des z qui ne devient pas infinie pour $\frac{u}{2} \equiv 0$; la fonction ainsi obtenue ne devient donc jamais infinie. C'est donc une constante, ou bien une exponentielle $e^{\alpha u}$. Mais, d'après la forme de l'équation (A) et la liaison qui existe entre z et y, cette fonction est paire. Donc c'est une simple constante. On a donc, pour y, l'intégrale particulière

$$y = \left[p'\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{-\left(1+\frac{2n+1}{4}\right)}.$$

Mais l'équation (A) a les périodes ϖ, ϖ' *relativement à* u; on a donc aussi les intégrales particulières

$$y = \left[p'\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{2}\right)\right]^{-\left(1+\frac{2n+1}{4}\right)}.$$

J'écris maintenant les quatre expressions de $p'\left(v+\frac{m\varpi}{2}+\frac{m'\varpi'}{2}\right)$, savoir :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}p'(v) &= \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{sn}^4 v},\\
-\frac{1}{2}p'\left(v+\frac{\varpi}{2}\right) &= -k'^2 \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{cn}^4 v},\\
-\frac{1}{2}p'\left(v+\frac{\varpi'}{2}\right) &= -k^2 \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1},\\
-\frac{1}{2}p'\left(v+\frac{\varpi}{2}+\frac{\varpi'}{2}\right) &= k^2k'^2 \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{dn}^4 v}.
\end{aligned}$$

J'en conclus que *l'intégrale générale de l'équation* (A) *est*

$$(9)\qquad y = \left(\operatorname{sn}\frac{u}{2}\operatorname{cn}\frac{u}{2}\operatorname{dn}\frac{u}{2}\right)^{-\left(1+\frac{2n+1}{4}\right)} \times\left[c + c'\left(\operatorname{sn}\frac{u}{2}\right)^{2n+5} + c''\left(\operatorname{cn}\frac{u}{2}\right)^{2n+5} + c'''\left(\operatorname{dn}\frac{u}{2}\right)^{2n+5}\right],$$

et, puisque n figure explicitement dans cette solution comme étant un entier *quelconque*, on peut conclure que la solution subsiste, quel que soit n. Par conséquent :

Dans l'équation (A), *on peut supposer* α *une arbitraire quelconque; l'intégrale générale est donnée par la formule* (9), *dans laquelle on remplace* $(2n+1)$ *par* α.

L'analogie de cette équation (A), contenant la constante arbitraire α, avec l'équation du troisième ordre, contenant la constante μ, que j'ai signalée au chapitre VI (p. 208), se complète si l'on observe que l'*équation* (A) *a cette propriété que quatre de ses intégrales* y_1, y_2, y_3, y_4 *satisfont aux deux relations*

$$y_1^{\frac{1}{\mu}} + y_2^{\frac{1}{\mu}} + y_4^{\frac{1}{\mu}} = 0, \qquad k^2 y_1^{\frac{1}{\mu}} + y_3^{\frac{1}{\mu}} + y_4^{\frac{1}{\mu}} = 0,$$

la constante μ *étant ainsi déterminée:*

$$\mu = 2 + \frac{1}{2}\alpha.$$

7. Je reviens à l'équation générale (1), dont je suppose l'ordre q un nombre premier [1]. Je suppose, en outre, qu'on ait calculé les coefficients de telle sorte que, relativement à u, les intégrales appartiennent à des exposants ayant la forme

$$-\frac{a}{q},\quad -\frac{a}{q}+e,\quad -\frac{a}{q}+e',\quad \ldots,$$

$e, e', \ldots$ étant des nombres entiers positifs, et a, également entier positif, non divisible par q.

D'après ces suppositions, les rapports des intégrales sont des

---

[1] Je suppose q un nombre premier pour pouvoir éviter les difficultés de raisonnement relatives aux autres cas. On s'apercevra plus loin que les conclusions subsistent, en partie, pour les nombres impairs composés.

fonctions uniformes de u; et l'on obtient une fonction uniforme z en posant (proposition XVII, p. 58)

$$y = z\left[\psi_q\left(\frac{u}{q}\right)\right]^{-\frac{a}{a}}.$$

Je rappelle la définition de la fonction doublement périodique ψ_q, savoir

$$\psi_q(v) = \frac{\sigma(qv)}{\sigma(v)^{q^2}} = \frac{\mathrm{Al}_1(qv)}{\mathrm{Al}_1(v)^{q^2}}.$$

D'après la proposition XX, les diverses intégrales particulières z sont des fonctions doublement périodiques, de première ou de deuxième espèce, aux périodes ϖ, ϖ' relativement à $\frac{u}{q}$. Elles ont toutes les mêmes multiplicateurs, en sorte que le rapport de deux quelconques d'entre elles est une fonction doublement périodique ordinaire. Je dis plus : *les intégrales z sont elles-mêmes des fonctions doublement périodiques ordinaires.*

Soit, en effet, une d'entre elles z_1. Formons le déterminant

$$[z_1 z'_2 z''_3 \ldots z_q^{(q-1)}]_u,$$

et écrivons-le

$$z_1^q\left[1\left(\frac{z_2}{z_1}\right)'\left(\frac{z_3}{z_1}\right)''\cdots\left(\frac{z_q}{z_1}\right)^{(q-1)}\right]_u.$$

Comme on voit, c'est le produit de z_1^q par une fonction doublement périodique ordinaire, $f(u)$. L'équation proposée manque du second terme; on a donc

$$[y_1 y'_2 y''_3 \ldots y_q^{(q-1)}]_u = \text{const.} = \psi_q\left(\frac{u}{q}\right)^{-a} f(u) z_1^q.$$

J'en conclus que z_1^q est doublement périodique de première espèce. Par suite, les multiplicateurs de z_1 sont des racines, d'ordre q, de l'unité. Mais le caractère rationnel de l'équation, dont z_1 est une intégrale, empêche de supposer des multiplicateurs racines primitives de l'unité, si en même temps les autres racines de l'unité ne sont les multiplicateurs d'autres intégrales; cette supposition est d'ailleurs impossible, puisque toutes les intégrales ont les mêmes multiplicateurs. Donc les multiplicateurs de z_1 ne peuvent être que l'unité.

Le pôle $\frac{u}{q} \equiv 0$ est multiple de l'ordre aq pour les fonctions z,

en sorte que je puis écrire

$$z = \frac{\chi\left(\frac{u}{q}\right)}{\sigma\left(\frac{u}{q}\right)^{aq}},$$

en désignant par $\chi(v)$ le produit de aq fonctions σ,

$$\chi(v) = \sigma(v-\beta_1)\,\sigma(v-\beta_2)\ldots\sigma(v-\beta_{aq})$$

sous la condition $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{aq}=0$.

En raisonnant comme au chapitre II, n° 14, nous déduisons de z d'autres intégrales

$$z_{m,m'} = \frac{\chi\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{q}\right)}{\sigma\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{q}\right)^{aq}}\left[\frac{\psi_q\left(\frac{u}{q}\right)}{\psi_q\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{q}\right)}\right]^{\frac{a}{q}},$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$z_{m,m'} = \mathrm{A}\,e^{nu}\frac{\chi\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{q}\right)}{\sigma\left(\frac{u}{q}\right)^{aq}}.$$

Les constantes A, n sont connues, mais il n'est pas utile ici de les désigner avec plus de précision.

Nous avons donc obtenu ce résultat que, *si dans la fonction intermédiaire* $\chi\left(\frac{u}{q}\right)$, *qui est le numérateur d'une intégrale* z, *on augmente* u *des périodes* ϖ, ϖ', *on obtient à un facteur près, de la forme* $\mathrm{A}e^{nu}$, *le numérateur d'une autre intégrale* $z_{m,m'}$. J'en conclus que, si $\chi\left(\frac{u}{q}\right)$, $\chi_1\left(\frac{u}{q}\right)$, $\chi_2\left(\frac{u}{q}\right)$, $\cdots$ sont les numérateurs d'un système complet d'intégrales distinctes z, z_1, z_2, ..., on aura :

$$e^{nu}\chi\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{q}\right) = \mathrm{a}\;\chi\left(\frac{u}{q}\right)+\mathrm{b}\;\chi_1\left(\frac{u}{q}\right)+\mathrm{c}\;\chi_2\left(\frac{u}{q}\right)+\ldots,$$

$$e^{nu}\chi_1\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{q}\right) = \mathrm{a}_1\chi\left(\frac{u}{q}\right)+\mathrm{b}_1\chi_1\left(\frac{u}{q}\right)+\mathrm{c}_1\chi_2\left(\frac{u}{q}\right)+\ldots,$$

$$e^{nu}\chi_2\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{q}\right) = \mathrm{a}_2\chi\left(\frac{u}{q}\right)+\mathrm{b}_2\chi_1\left(\frac{u}{q}\right)+\mathrm{c}_2\chi_2\left(\frac{u}{q}\right)+\ldots,$$

. . . .

Faisons, dans ces égalités, par exemple $m=0$, $m'=1$; puis envi-

sageons une combinaison linéaire des fonctions χ, que la substitution précédente reproduise à un facteur près $\mathrm{B}e^{nu}$ (on sait qu'il en existe au moins une), et supposons que ce soit justement χ. La première des équations ci-dessus est alors, si nous posons $\frac{u}{q} = v$,

$$\mathrm{B}\, e^{bv} \chi\left(v + \frac{\varpi'}{q}\right) = \chi(v).$$

D'après l'analyse précédente, nous pouvons choisir pour $\chi_1(v)$, $\chi_2(v)$, ... les fonctions $\chi\left(v + \frac{m\varpi}{q}\right)$, sauf un facteur e^{pv}. Il y a donc un système de fonctions χ, χ_1, χ_2, ... donnant lieu aux relations

$$(10) \quad \begin{cases} \mathrm{B}\, e^{bv} \chi_n\left(v + \frac{\varpi'}{q}\right) = \chi_n(v) \\ \mathrm{C}\, e^{cv} \chi_n\left(v + \frac{\varpi}{q}\right) = \chi_{n+1}(v) \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, q-1).$$

C'est à la recherche de ce *système fondamental* de fonctions $\chi_n(v)$ qu'est ramenée l'intégration de l'équation proposée.

8. Les fonctions z appartiennent, relativement à u, aux exposants $-aq$, $-aq+e$, $-aq+e'$, ... Il en résulte que les combinaisons linéaires des fonctions $\chi_n(v)$ appartiennent, relativement à v, aux exposants 0, e, e', ... Cette propriété, jointe aux relations (10), les définit entièrement. Je vais effectivement prouver que : *si l'on a q fonctions intermédiaires $\chi(v)$, $\chi_1(v)$, ..., $\chi_{q-1}(v)$, ayant aq zéros, satisfaisant aux relations* (10), *et dont les combinaisons linéaires appartiennent, relativement à v, aux exposants 0, e, e', ... et que l'on pose*

$$(11) \qquad y_n = \frac{\chi_n\left(\frac{u}{q}\right)}{\sigma(u)^{\frac{a}{q}}}$$

(la somme des zéros de chaque fonction $\chi_n(v)$ étant supposée nulle), *les q fonctions y_n ainsi définies sont les intégrales de l'équation proposée.*

Tout d'abord, en vertu des relations (10), deux propriétés de l'équation linéaire d'ordre q, dont u est la variable et dont les y sont les intégrales, sont immédiatement évidentes : 1° *Cette équation a pour coefficients des fonctions uniformes et aux périodes ϖ, ϖ',*

relativement à u; 2° *Ces coefficients sont des fonctions rationnelles et homogènes de* $p(u)$, $p'(u)$, g_2, g_3, l'homogénéité étant entendue ainsi que je l'ai rappelé au début de ce chapitre.

Cette dernière propriété résulte de ce qu'en vertu des relations (10), on peut substituer aux périodes ϖ, ϖ' les combinaisons linéaires qui donnent lieu aux *transformations du premier ordre*.

Pour achever la démonstration, il reste simplement à prouver que les coefficients de l'équation n'ont pas d'autres infinis que $u=0$. Car, ce point établi, cette équation aura nécessairement la forme (1).

Reprenons, pour avoir des fonctions uniformes, les fonctions z, et posons

$$z_n = \frac{\chi_n(v)}{\sigma(v)^{aq}}.$$

Leur pôle unique, dans un parallélogramme des périodes ϖ, ϖ', est $v=0$. Suivant l'hypothèse, les combinaisons linéaires de ces fonctions z_n sont, pour $v=0$, infinies des ordres suivants, aq, $aq-e$, $aq-e'$, ..., tous les nombres positifs e, e', ... étant différents. J'en conclus que le déterminant

$$V = [z_0 z'_1 z''_2 z'''_3 \dots z_{q-1}^{(q-1)}]_v$$

est infini de l'ordre $aq^2 + \frac{q(q-1)}{2} - (e+e'+e''+\dots) = Q$.

D'après la propriété qu'expriment les relations (10), les fonctions $\chi_n(v)$, ou plutôt leurs combinaisons, appartiennent, relativement à $\left(v - \frac{m\varpi + m'\varpi'}{q}\right)$, aux exposants 0, e, e', ... exactement de même que relativement à v. Donc, pour $v = \frac{m\varpi + m'\varpi'}{q}$, où les nombres m, m' sont des entiers arbitraires, mais non pas ensemble multiples de q, les combinaisons linéaires des fonctions z_n sont infiniment petites des ordres 0, e, e', ... Dans un parallélogramme des périodes, le nombre de ces zéros distincts est (q^2-1), et chacun d'eux compte pour $e+e'+\dots - \frac{q(q-1)}{2} = R$ zéros du déterminant V.

Les nombres e, e', e'', ... ne sont pas quelconques; leur somme est connue. Effectivement, pour $u=0$, le déterminant

$$U = [y_0 y'_1 y''_2 y'''_3 \cdots y_{q-1}^{(q-1)}]_u,$$

formé avec q intégrales de l'équation (1), doit être fini, différent de

zéro, puisque l'équation (1) manque du second terme, et que, par suite, U est une constante. Les y appartiennent aux exposants

$$-\frac{a}{q}, \quad -\frac{a}{q}+e, \quad -\frac{a}{q}+e', \quad \ldots$$

Donc U appartient à l'exposant

$$-a+(e+e'+e''+\ldots)-\frac{q(q-1)}{2}.$$

J'ai donc

$$(12) \qquad e+e'+e''\ldots-\frac{q(q-1)}{2}=a.$$

C'est aussi ce qu'on peut reconnaître en observant que la somme des racines de l'équation déterminante est égale à $\frac{q(q-1)}{2}$.

A cause de la relation (12), les expressions de Q et de R se transforment, et j'ai ce résultat :

Le déterminant V a l'infini $v\equiv 0$, multiple d'ordre $Q=a(q^2-1)$, et il a (q^2-1) zéros, multiples chacun de l'ordre $R=a$. On voit donc qu'il n'a pas d'autre zéro. D'où cette conclusion que les coefficients de l'équation formée avec les intégrales (11) n'ont d'autres pôles que ceux-ci $v\equiv\frac{m\varpi+m'\varpi'}{q}$ ou $u\equiv m\varpi+m'\varpi'$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

9. L'intégration de l'équation proposée étant ainsi ramenée à la construction de fonctions d'après des conditions entièrement définies, je vais donner le moyen d'effectuer cette construction.

Je prends d'abord le cas particulier où le nombre a est l'unité. Les nombres $e, e', e'', \ldots$ sont alors entièrement déterminés. Ils sont entiers, au nombre de $(q-1)$ et satisfont à la relation (12). Ils sont donc nécessairement tous égaux à l'unité, sauf un seul, qui est égal à 2. Déjà au chapitre II, n°s 21 et 22, j'ai envisagé, pour $q=3$ et pour $q=5$, les cas de l'équation générale (1) dans lesquels le nombre a est ainsi égal à l'unité. J'ai montré que l'intégrale générale est alors le produit de $\left[\psi_q\left(\frac{u}{q}\right)\right]^{-\frac{1}{q}}$ par une fonction arbitraire, uniforme, aux périodes ϖ, ϖ' relativement à $\frac{u}{q}$, et ayant les seuls pôles $\frac{u}{q}\equiv 0$ multiples d'ordre q. Le raisonnement employé pour $q=3$

et $q = 5$ s'applique dans tous les cas, en sorte que cette conclusion est toujours valable. Mais on pourrait objecter qu'une démonstration serait nécessaire pour prouver l'existence de l'équation même qui donne ainsi $a = 1$, son ordre étant quelconque. Je vais faire disparaître cette objection en prenant pour point de départ les intégrales elles-mêmes. Les considérations qui vont suivre sont d'ailleurs nécessaires, même pour les cas $q = 3$, $q = 5$; car il nous faut mettre les intégrales sous une forme telle que le *système fondamental* des fonctions $\chi_n(v)$ soit en évidence.

Pour éviter toute confusion entre ce cas particulier ($a = 1$) et le cas général, je vais employer une autre notation $\varphi_n(v)$ pour les fonctions $\chi_n(v)$ qui sont relatives à ce cas particulier. Ici l'emploi de la fonction H de Jacobi conduit à des résultats un peu plus simples dans la forme, et c'est d'elle que je ferai usage. Je conserve d'ailleurs pour les périodes la même notation que précédemment, ϖ et ϖ' représentant $2K$ et $2iK'$.

Pour abréger l'écriture, je pose

$$w_{m,m'} = \frac{m\varpi + m'\varpi'}{q}$$

et j'envisage les q fonctions $\varphi_n(v)$ ainsi définies :

$$(13)\qquad \begin{aligned} e^{\frac{ni\pi}{q}}\varphi_n(v) &= \mathrm{H}\left[v + w_{n,\frac{1}{2}(1-q)}\right] \\ &\quad \times \mathrm{H}\left[v + w_{n,\frac{1}{2}(3-q)}\right]\cdots\mathrm{H}\left[v + w_{n,\frac{1}{2}(q-1)}\right] \\ &= \prod_{m'=-\frac{q-1}{2}}^{m'=\frac{q-1}{2}} \mathrm{H}(v + w_{n,m'}), \end{aligned}$$

le nombre n recevant successivement les valeurs $0, 1, \ldots, (q-1)$, ou mieux un système complet de résidus $(\bmod q)$ étant mis à la place de n. Car, on le voit tout de suite, $\varphi_n(v)$ ne change pas si l'on augmente n d'un multiple de q.

De la définition (13) elle-même résulte l'égalité

$$(14)\qquad \varphi_n\left(v + \frac{\varpi}{q}\right) = e^{-\frac{i\pi}{q}}\varphi_{n+1}(v).$$

En second lieu, d'après la propriété de la fonction H, savoir :

$$\mathrm{H}(v+\varpi') = -e^{-\frac{\pi i}{\varpi}(2v+\varpi')}\mathrm{H}(v),$$

on obtient cette nouvelle égalité

$$(15)\qquad e^{\frac{2ni\pi}{q}}\varphi_n\left(v+\frac{\varpi'}{q}\right) = e^{-\frac{\pi i}{\varpi}\left(2v+\frac{\varpi'}{q}\right)}\varphi_n(v).$$

Ces deux égalités (14) et (15) ne sont autres que les égalités (10) auxquelles doivent satisfaire les fonctions $\chi_n(v)$.

Les fonctions $\varphi_n(v)$ ont q zéros. Pour prouver qu'elles sont propres à former les intégrales y d'une équation de la forme (1), et cela dans le cas spécial $a=1$, il reste à montrer que leurs combinaisons linéaires appartiennent, relativement à v, aux exposants 0, 1, 2, 3, ..., $(q-2)$ et q. Cette dernière partie est très aisée, comme il suit. Dans la fonction linéaire $\Phi(v)$,

$$\Phi(v) = \mathrm{A}_0\varphi_0(v) + \mathrm{A}_1\varphi_1(v) + \mathrm{A}_2\varphi_2(v) + \ldots + \mathrm{A}_{q-1}\varphi_{q-1}(v),$$

déterminons les coefficients de telle sorte que $\Phi(v)$ ait un zéro donné v_0, multiple d'ordre $(q-1)$. D'après un théorème de M. Liouville, le dernier zéro v_1, que $\Phi(v)$ possède en outre, est donné par l'égalité

$$(q-1)v_0 + v_1 \equiv 0.$$

Si donc on suppose $v_0 \equiv 0$, on aura aussi $v_1 \equiv 0$. Il existe donc une combinaison linéaire $\Phi(v)$ qui a le zéro $v=0$ multiple d'ordre q. C'est ce qu'il fallait démontrer.

10. J'ai donc prouvé l'existence, pour tout nombre impair, de l'équation (1) dans le cas particulier $a=1$, et mis ses intégrales sous la forme fondamentale demandée. Je vais faire usage de cette solution particulière pour l'intégration de l'équation (1) dans les autres cas; mais auparavant je veux tirer une conséquence algébrique de la définition et des propriétés des fonctions $\varphi_n(v)$.

Je considère la somme des puissances $q^{\text{ièmes}}$ des fonctions φ

$$\mathrm{S}(v) = \varphi_0^q(v) + \varphi_1^q(v) + \varphi_2^q(v) + \ldots,$$

et j'y fais

$$v = \frac{\nu\varpi}{q} + \frac{\nu'\varpi'}{q}.$$

Je dis qu'alors cette somme est nulle; ainsi

$$(16) \qquad S\left(\frac{\nu\varpi}{q}+\frac{\nu'\varpi'}{q}\right)=0$$

quand ν et ν' sont des nombres entiers. Prouvons-le d'abord pour $v=0$.

Il nous suffit, à cet effet, de comparer $\varphi_n(0)$ et $\varphi_{-n}(0)$ en les écrivant ainsi :

$$e^{\frac{ni\pi}{q}}\varphi_n(0)= \mathrm{H}\left(\frac{n\varpi}{q}-\frac{q-1}{2}\frac{\varpi'}{q}\right)\mathrm{H}\left(\frac{n\varpi}{q}-\frac{q-3}{2}\frac{\varpi'}{q}\right)\cdots,$$

$$e^{-\frac{ni\pi}{q}}\varphi_{-n}(0)=(-1)^q\,\mathrm{H}\left(\frac{n\varpi}{q}-\frac{q-1}{2}\frac{\varpi'}{q}\right)\mathrm{H}\left(\frac{n\varpi}{q}-\frac{q-3}{2}\frac{\varpi'}{q}\right)\cdots.$$

J'ai écrit $\varphi_{-n}(0)$ en y renversant l'ordre des termes. De là résulte

$$\varphi_n^q(0)+\varphi_{-n}^q(0)=0.$$

On a d'ailleurs $\varphi_0(0)=0$. Donc $S(0)=0$.

Mais, en vertu des égalités (14) et (15), on peut changer v en $v+\frac{\nu\varpi}{q}+\frac{\nu'\varpi'}{q}$ dans $S(v)$, sans y produire d'autre changement que de multiplier cette somme par une exponentielle. Donc de $S(0)=0$ on est en droit de conclure l'égalité (16).

Comparons maintenant $S(v)$ au produit $\varphi_0(v)\varphi_1(v)\varphi_2(v)\ldots$, et concluons de la coïncidence des zéros de ces deux fonctions et de leur composition la relation

$$\varphi_0^q(v)+\varphi_1^q(v)+\varphi_2^q(v)+\ldots=\mathrm{A}\,\varphi_0(v)\,\varphi_1(v)\,\varphi_2(v)\ldots,$$

où A est une simple constante.

C'est seulement pour le cas $q=3$ que j'aurai à faire usage de cette relation. Je l'écrirai alors

$$(17) \qquad \varphi_0^3+\varphi_1^3+\varphi_2^3=6b\,\varphi_0\varphi_1\varphi_2,$$

et l'on y reconnaît la forme cubique ternaire canonique. Le coefficient b est lié au module par une relation qui est connue, mais dont je n'ai pas à faire usage. Il n'y a point, pour $q=3$, d'autre relation homogène entre les fonctions φ, puisqu'elles sont au nombre de trois, et que leurs rapports constituent deux fonctions d'une seule variable v.

Pour les autres valeurs de q, il y a $(q-2)$ relations algébriques distinctes entre les $(q-1)$ rapports des fonctions φ. Je viens de trouver une de ces relations; mais on en peut trouver de plus simples,

Il suffit de comparer le nombre des arbitraires que contient une fonction quadratique homogène de q variables et celui des arbitraires d'une fonction doublement périodique à $2q$ infinis, et l'on s'aperçoit que, pour $q \geqq 5$, il existe entre les fonctions φ des relations quadratiques homogènes.

En vertu de la relation (15), si dans une équation $A = 0$, à laquelle satisfont les fonctions φ, on change φ_n en $e^{\frac{2ni\pi}{q}} \varphi_n$, on obtient une nouvelle relation $B = 0$, également exacte. Que la première soit quadratique et homogène, la seconde l'est aussi, et si ces deux équations sont distinctes, c'est qu'alors il existe un système de relations quadratiques $A = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, ..., linéairement distinctes. Ces relations se transforment en $B = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, ..., qui sont des combinaisons des précédentes. D'après la théorie des substitutions linéaires, il existe une combinaison au moins des fonctions A, A_1, A_2, ..., qui se reproduit, sauf un facteur.

Donc, de toutes manières, il faut admettre qu'il existe une relation quadratique $A = 0$ qui reste inaltérée par le changement de φ_n en $e^{\frac{2ni\pi}{q}} \varphi_n$. Si donc on l'écrit ainsi

$$0 = A = \sum A_{m,n} \varphi_m \varphi_n,$$

on aura toujours

$$m + n \equiv \text{const.} \pmod{q} \quad \text{pour tous les termes de A.}$$

Mais, en vertu de la relation (14), on peut, sans changer les coefficients $A_{m,n}$, augmenter simultanément tous les indices des φ : la relation reste exacte. La fonction A est nécessairement changée. Ainsi nous trouvons q relations quadratiques, que l'on peut distinguer entre elles par la somme $(m + n)$, et écrire ainsi :

$$\begin{aligned}
0 = A_0 &= a\varphi_0^2 + b\varphi_1\varphi_{q-1} + c\varphi_2\varphi_{q-2} + d\varphi_3\varphi_{q-3} + \ldots,\\
0 = A_2 &= a\varphi_1^2 + b\varphi_2\varphi_0 \quad + c\varphi_3\varphi_{q-1} + d\varphi_4\varphi_{q-2} + \ldots,\\
0 = A_4 &= a\varphi_2^2 + b\varphi_3\varphi_1 \quad + c\varphi_4\varphi_0 \quad + d\varphi_5\varphi_{q-1} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Toutes ces fonctions A_0, A_2, A_4, ..., au nombre de q, sont linéairement distinctes. Mais ces équations ne sont pas toutes distinctes. Il faudrait une étude très attentive pour en faire la discussion générale et trouver les relations qui existent entre les coefficients a, b, c, ... Je n'ai fait cette étude que pour le premier cas, $q = 5$.

11. Pour $q = 5$, j'ai les cinq relations, que j'écris dans l'ordre naturel :

$$\begin{aligned}
o = A_0 &= a\varphi_0^2 + b\varphi_1\varphi_4 + c\varphi_2\varphi_3,\\
o = A_1 &= a\varphi_3^2 + b\varphi_4\varphi_2 + c\varphi_0\varphi_1,\\
o = A_2 &= a\varphi_1^2 + b\varphi_2\varphi_0 + c\varphi_3\varphi_4,\\
o = A_3 &= a\varphi_4^2 + b\varphi_0\varphi_3 + c\varphi_1\varphi_2,\\
o = A_4 &= a\varphi_2^2 + b\varphi_3\varphi_1 + c\varphi_4\varphi_0.
\end{aligned}$$

On sait que ces relations doivent se réduire au plus à trois équations distinctes; on peut déduire de là les relations qui existent entre les rapports de a, b, c, lesquels ne peuvent dépendre que du module.

Je multiplie A_0 par φ_1 et A_3 par φ_3, et je retranche membre à membre; voici le résultat :

$$a(\varphi_0^2\varphi_1 - \varphi_4^2\varphi_3) + b(\varphi_1^2\varphi_4 - \varphi_3^2\varphi_0) = o.$$

Je multiplie A_2 par φ_4 et A_1 par φ_0, et j'obtiens, en retranchant membre à membre,

$$a(\varphi_1^2\varphi_4 - \varphi_3^2\varphi_0) + c(\varphi_4^2\varphi_3 - \varphi_0^2\varphi_1) = o.$$

De ces deux dernières relations, je conclus $a^2 + bc = o$. Cette relation est nécessaire, et, si elle a lieu, les équations A_0, A_1, A_2, A_3 se réduisent seulement à trois. Mais, à cause de la forme des équations, je peux conclure que, suivant la même relation, les équations A_2, A_3, A_4, A_0 se réduisent seulement à trois. Ces deux groupes ont en commun A_0, A_2, A_3. Ainsi, moyennant la relation $a^2 + bc = o$, les équations se réduisent effectivement à trois distinctes.

Ainsi, pour $q = 5$, les relations entre les fonctions φ peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
&\varphi_0^2 + \lambda\varphi_1\varphi_4 - \frac{1}{\lambda}\varphi_2\varphi_3 = o,\\
&\varphi_3^2 + \lambda\varphi_4\varphi_2 - \frac{1}{\lambda}\varphi_0\varphi_1 = o,\\
&\varphi_1^2 + \lambda\varphi_2\varphi_0 - \frac{1}{\lambda}\varphi_3\varphi_4 = o,\\
&\varphi_4^2 + \lambda\varphi_0\varphi_3 - \frac{1}{\lambda}\varphi_1\varphi_2 = o,\\
&\varphi_2^2 + \lambda\varphi_3\varphi_1 - \frac{1}{\lambda}\varphi_4\varphi_0 = o.
\end{aligned}$$

Elles contiennent le seul paramètre λ, qui est une fonction du module. On a aisément la valeur de λ en faisant, par exemple, $u=0$, ce qui donne $\varphi_0=0$, dans l'une quelconque des équations autre que la première.

12. A un point de vue général, voici ma conclusion : Pour un ordre q donné, on a entre les fonctions φ des relations algébriques, et l'on peut en tirer un système de développement de ces fonctions suivant les puissances croissantes de l'une d'elles. Afin d'être plus précis, disons qu'on tirera $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$, $\frac{\varphi_3}{\varphi_1}$, ... développés suivant les puissances croissantes de $\frac{\varphi_0}{\varphi_1}$. Il y aura plusieurs systèmes de tels développements. Prenons, par exemple, celui qui est convergent quand v est voisin de zéro. C'est au moyen de ces développements que je vais donner une méthode d'intégration de l'équation (1) dans le cas où a est un entier quelconque.

Les q fonctions doublement périodiques $\frac{\varphi_n(v)}{H(v)^q}$ reproduisent par leurs combinaisons linéaires 1, $p(v)$, $p'(v)$, ..., $p^{(q-2)}(v)$. Soit une fonction doublement périodique n'ayant que les pôles $v\equiv 0$ multiples d'ordre $mq+r$, r étant inférieur à q. Si l'on en retranche le produit $[p^{(q-2)}(v)]^m p^{(r-2)}(v)$, multiplié par un facteur numérique convenable, on compose une nouvelle fonction, n'ayant toujours que les pôles $v\equiv 0$ multiples d'ordre moindre. A cette nouvelle fonction on peut appliquer la même réduction; par conséquent, la fonction proposée peut être représentée sous la forme d'un polynome entier, de degré $(m+1)$, des quantités $p(v)$, $p'(v)$, ..., $p^{(q-2)}(v)$. Si la fonction proposée a les pôles $v\equiv 0$ multiples d'ordre aq, a étant un entier, la première opération exige seulement l'emploi de $[p^{(q-2)}(v)]^a$. Donc *une fonction doublement périodique qui n'a que les pôles $v\equiv 0$ multiples d'ordre aq peut être mise sous la forme d'un polynome entier et homogène, de degré a, des quantités $\frac{\varphi_n(v)}{H(v)^q}$.*

Revenons aux fonctions $\chi(v)$. En les divisant par $H^{aq}(v)$, nous formons de telles fonctions doublement périodiques, et je conclus que *les fonctions $\chi_n(v)$ peuvent être exprimées sous forme de polynomes entiers et homogènes, de degré a, des quantités $\varphi_n(v)$.*

Ces polynomes entiers n'ont pas une forme absolument fixée; on

peut, en effet, les modifier en y ajoutant des combinaisons telles que $B_0 A_0 + B_1 A_1 + B_2 A_2 + \ldots$, où $B_0, B_1, B_2, \ldots$ sont des polynomes homogènes et arbitraires, de degré $(a - 2)$, et $A_0, A_1, \ldots$ les premiers membres des équations auxquelles satisfont les fonctions φ. Mais on peut profiter de cette circonstance pour réduire chaque polynome à une forme irréductible, en y supprimant un certain nombre de termes.

Cette précaution prise, on voit, en appliquant la première des relations (10) que ces polynomes se composent seulement de termes $\varphi_1^{\alpha_0} \varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2} \ldots$ dans lesquels la somme $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots$ a une valeur constante, aux multiples près de q, dans un même polynome.

J'écris un de ces polynomes avec des coefficients indéterminés, puis, en ajoutant l'unité à chacun des indices des quantités φ, j'en déduis un second polynome, en vertu de la seconde relation (10); je continue de la sorte, et j'ai ainsi représenté les q fonctions $\chi_n(v)$ par des expressions dans lesquelles figurent des coefficients indéterminés.

Ces fonctions satisfont ainsi aux conditions énoncées au début du n° 8, sauf à celle qui concerne les exposants auxquels leurs combinaisons appartiennent, relativement à v. C'est par cette condition que l'on déterminera les coefficients. En se servant des développements des fonctions $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \frac{\varphi_3}{\varphi_1}, \ldots$ suivant les puissances croissantes de $\frac{\varphi_0}{\varphi_1}$, dont je viens de parler au début de ce numéro, on aura à traiter un simple problème algébrique.

13. Je vais faire une application à un cas de l'équation du troisième ordre :

$$y''' + \mathrm{A}\, p(u) y' + \mathrm{B}\, p'(u) y = 0.$$

Je prends les coefficients A, B de telle sorte que l'équation déterminante, pour $u = 0$, ait les racines

$$\left(1 - \frac{4n}{3}\right), \quad \left(1 - \frac{4n}{3}\right) + 2n - 1, \quad \left(1 - \frac{4n}{3}\right) + 2n + 1,$$

dont la somme est égale à 3, comme il convient. On obtient ce résultat en prenant

$$\mathrm{A} = -\frac{4n^2}{3}, \qquad \mathrm{B} = -\frac{2n(n+3)(4n-3)}{27}.$$

C'est ainsi l'équation

$$(18)\qquad y''' - \frac{4n^2}{3}p(u)y' - \frac{2n(n+3)(4n-3)}{27}p'(u)y = 0$$

que j'envisage; n est un nombre entier, et il est alors visible que les intégrales appartiennent effectivement aux exposants ci-dessus, dont les différences sont ou impaires ou égales à 2.

Si n est un multiple de 3, l'intégrale générale est uniforme; ce n'est pas de ce cas que je m'occupe.

C'est quand n est de la forme $3\nu \pm 1$ qu'il y a lieu d'appliquer la théorie précédente.

Si n est l'unité, j'ai l'équation déjà envisagée au chapitre II; c'est celle dont la solution est fournie par les fonctions φ.

Je vais intégrer l'équation (18) *dans le cas où* $n=2$. Le nombre a est ici égal à 5. Il n'est pas nécessaire de reproduire ici, par le détail, l'analyse qui conduit au résultat. Il suffira que je donne ce résultat lui-même et que je le vérifie. Les fonctions $\chi(\nu)$ sont les suivantes :

$$(19)\qquad \begin{cases} \chi_0(\nu) = \varphi_0^2(\varphi_0^3 - 5\varphi_1^3 - 5\varphi_2^3), \\ \chi_1(\nu) = \varphi_1^2(\varphi_1^3 - 5\varphi_2^3 - 5\varphi_0^3), \\ \chi_2(\nu) = \varphi_2^2(\varphi_2^3 - 5\varphi_0^3 - 5\varphi_1^3). \end{cases}$$

Je dois vérifier que leurs combinaisons linéaires appartiennent, relativement à ν, aux exposants 0, 3, 5. Suivant la méthode expliquée au n° 12, je prends pour point de départ la relation

$$\varphi_0^3 + \varphi_1^3 + \varphi_2^3 = 6b\varphi_0\varphi_1\varphi_2.$$

Au lieu de développer $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{\varphi_0}{\varphi_1}$, je développe $\frac{\varphi_0}{\varphi_2}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{\varphi_2}$, ce qui revient au même. J'ai ainsi, en posant $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{\varphi_2} = \xi$,

$$(20)\qquad \frac{\varphi_0}{\varphi_2} = -\frac{1}{2b}\xi + \frac{1}{6b}\left(\frac{1}{8b^3} - 1\right)\xi^3 + \frac{1}{6b}\left(\frac{1}{8b^3} - 1\right)\xi^4 + \ldots.$$

De (19) je tire

$$(21)\qquad \chi_1 + \chi_2 = \varphi_1^5 + \varphi_2^5 - 5\varphi_1^3\varphi_2^2 - 5\varphi_2^3\varphi_1^2 - 5\varphi_0^3(\varphi_1^2 + \varphi_2^2),$$

ce qui peut s'écrire ainsi :

$$\chi_1 + \chi_2 = (\varphi_1 + \varphi_2)^3(\varphi_2^2 - 3\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2) - 5\varphi_0^3(\varphi_1^2 + \varphi_2^2).$$

D'où l'on voit déjà que $(\chi_1+\chi_2)$ a le zéro triple $v=0$, puisque φ_0 et $(\varphi_1+\varphi_2)$ sont nuls avec v. Pour la même raison, l'expression même de $\chi_0(v)$ montre que cette fonction a aussi le zéro triple $v=0$.

Il reste à montrer que la combinaison formée avec χ_0 et $(\chi_1+\chi_2)$ de telle sorte qu'elle ait le zéro $v=0$ multiple d'ordre supérieur à 3 a ce zéro multiple d'ordre supérieur à 4, du même coup.

En remplaçant, dans le second membre de (21), $\frac{\varphi_0}{\varphi_1}$ par son premier terme, tiré de (20), on ne néglige que des quantités du cinquième ordre, ce qui est permis pour le but que nous voulons atteindre. J'ai ainsi

$$\chi_1+\chi_2=(\varphi_1+\varphi_2)^3\left[\varphi_2^2-3\varphi_1\varphi_2+\varphi_1^2+\frac{5}{8b^3}(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\right]+\ldots.$$

De même, en négligeant les termes du cinquième ordre, j'ai

$$\chi_0=-\frac{5}{4b^2}(\varphi_1+\varphi_2)^3(\varphi_2^2-\varphi_1\varphi_2+\varphi_1^2)+\ldots.$$

Il est manifeste que l'on peut faire une combinaison linéaire de ces deux quantités, de telle sorte que le second membre ait la forme $A(\varphi_1+\varphi_2)^5$. La vérification est donc faite, et j'ai cette conclusion :

Si l'on pose

$$\begin{aligned}
\varphi_0(v)&=\qquad \mathrm{H}(v)\quad \mathrm{H}\left(v-\frac{\varpi'}{3}\right)\quad \mathrm{H}\left(v+\frac{\varpi'}{3}\right),\\
\varphi_1(v)&=e^{-\frac{i\pi}{3}}\mathrm{H}\left(v+\frac{\varpi}{3}\right)\mathrm{H}\left(v+\frac{\varpi-\varpi'}{3}\right)\mathrm{H}\left(v+\frac{\varpi+\varpi'}{3}\right),\\
\varphi_2(v)&=e^{\frac{i\pi}{3}}\ \mathrm{H}\left(v-\frac{\varpi}{3}\right)\mathrm{H}\left(v-\frac{\varpi+\varpi'}{3}\right)\mathrm{H}\left(v+\frac{\varpi'-\varpi}{3}\right);
\end{aligned}$$

et qu'on désigne par x_0, x_1, x_2 les quantités suivantes :

$$x_0=\frac{\varphi_0\left(\frac{u}{3}\right)}{\mathrm{H}(u)^{\frac{1}{3}}},\qquad x_1=\frac{\varphi_1\left(\frac{u}{3}\right)}{\mathrm{H}(u)^{\frac{1}{3}}},\qquad x_2=\frac{\varphi_2\left(\frac{u}{3}\right)}{\mathrm{H}(u)^{\frac{1}{3}}},$$

l'équation (18), *pour $n=2$, a les intégrales suivantes :*

$$\begin{aligned}
y_0&=x_0^2(x_0^3-5x_1^3-5x_2^3),\\
y_1&=x_1^2(x_1^3-5x_2^3-5x_0^3),\\
y_2&=x_2^2(x_2^3-5x_0^3-5x_1^3).
\end{aligned}$$

14. La méthode d'intégration que je viens d'expliquer entraîne à des calculs assez longs; je n'en ferai pas d'autre application. Il m'a paru cependant qu'elle méritait d'être citée, à cause de son caractère purement algébrique. Ce caractère est ici essentiel à noter. J'ai dit, en effet, au début de ce chapitre (p. 235) que, si l'on prend pour variable $p(u)$, l'équation linéaire (1) se change en une équation linéaire à coefficients rationnels. Dans les cas dont je m'occupe actuellement, l'intégrale générale est algébrique. Pour $q = 3$, par exemple, les quantités x_0, x_1, x_2, qui sont les intégrales de l'équation répondant à $a = 1$, sont des fonctions algébriques des racines d'une équation hessienne, l'équation d'où dépend la division par trois de l'argument $(m\varpi + m'\varpi')$. Par la méthode dont je viens de donner un exemple, il est mis en évidence que, pour les autres valeurs de a, les intégrales s'expriment rationnellement en fonction de ces quantités x_0, x_1, x_2.

On peut aussi procéder à l'intégration par une méthode plus naturelle et théoriquement plus simple. Cette méthode s'applique de la même manière à tous les cas. Je vais, pour plus de simplicité, l'expliquer dans le cas du troisième ordre.

15. Je prends l'équation (18) et j'y change n en $-n$; c'est ainsi l'équation

$$(22) \qquad y''' - \frac{4n^2}{3} p(u) y' + \frac{2n(n-3)(4n+3)}{27} p'(u) y = 0,$$

et j'y suppose n entier et positif. Cette nouvelle équation (22) n'est d'ailleurs autre que *l'adjointe* de (18).

Les racines de l'équation déterminante sont

$$-\frac{2n}{3}, \quad -\frac{2n}{3}+2, \quad -\frac{2n}{3}+2n+1$$

ou

$$-\frac{2n}{3}, \quad -\frac{2(n-3)}{3}, \quad \frac{4n+3}{3}.$$

Quand n est premier à 3, l'intégrale générale est non uniforme, et l'on obtient une fonction uniforme z en posant (p. 59)

$$y = z\left[\psi_3\left(\frac{u}{3}\right)\right]^{-\frac{2n}{3}}.$$

Ainsi que je l'ai prouvé précédemment, z est une fonction doublement périodique ordinaire, aux périodes ϖ, ϖ', *relativement à* $\frac{u}{3}$. Parmi les intégrales z, dont $\frac{u}{3} = 0$ est le pôle unique, il en est qui appartiennent, relativement à u, aux exposants $-6n$, $-6n+2$, $-4n+1$.

La fonction z, qui appartient à l'exposant $(-4n+1)$, correspond à l'intégrale y, appartenant à l'exposant $s = -\frac{2n}{3} + 2n + 1$. Cette intégrale y se développe suivant les puissances croissantes de u, sous la forme

$$(23) \qquad y = \left(\frac{u}{3}\right)^s \left[1 + A\left(\frac{u}{3}\right)^4 + B\left(\frac{u}{3}\right)^6 + C\left(\frac{u}{3}\right)^8 + \ldots\right],$$

et ce développement se tire sans ambiguïté de l'équation différentielle (22). Développons, d'autre part, $[\psi_3(v)]^{-\frac{2n}{3}}$; ce développement, dont on peut aisément trouver les termes successifs, a la forme

$$(24) \qquad \left[\frac{1}{3}\psi_3(v)\right]^{-\frac{2n}{3}} = v^{-\frac{16n}{3}}(1 + \alpha v^4 + \beta v^6 + \gamma v^8 + \ldots).$$

Dans (23) mettons v au lieu de $\frac{u}{3}$, et combinons les développements (23) et (24), nous aurons

$$(25) \qquad z = v^{-4n+1}[1 + (A - \alpha)v^4 + \mathfrak{B}v^6 + \mathfrak{C}v^8 + \ldots].$$

Mais on sait que z est une fonction de v, aux périodes ϖ, ϖ' n'ayant que les pôles $v = 0$. J'en conclus donc

$$(26) \qquad z = -\frac{1}{2.3.4\ldots(4n-2)}\,p^{(4n-3)}(v) - \frac{A-\alpha}{2.3.4\ldots(4n-6)}\,p^{(4n-7)}(v) - \frac{\mathfrak{B}}{2.3.4\ldots(4n-8)}\,p^{(4n-9)}(v) - \ldots.$$

Cette intégrale particulière z est ainsi obtenue par des opérations entièrement connues. Remettant ensuite $\frac{u}{3}$ au lieu de v, et revenant à y, j'ai une intégrale particulière, dans laquelle il suffira de changer u en $(u + m\varpi + m'\varpi')$ pour avoir d'autres intégrales. Le problème est ainsi entièrement résolu.

16. *Premier exemple :* $n=1$. — L'équation est l'adjointe de celle qui a été envisagée au chapitre II, nº 21 (p. 94). On pourrait se dispenser de l'examiner. Il est cependant intéressant de trouver ici son intégrale sous une forme différente. Aucun calcul n'est nécessaire, la formule (26) se réduisant à un seul terme. On a donc les diverses intégrales :

$$y_0 = \left[\psi_3\left(\frac{u}{3}\right)\right]^{-\frac{2}{3}} p'\left(\frac{u}{3}\right),$$

$$y_{m,m'} = \left[\psi_3\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{3}\right)\right]^{-\frac{2}{3}} p'\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{3}\right).$$

Deuxième exemple : $n=2$. — C'est l'adjointe de l'équation intégrée au nº 13 par l'autre méthode. La formule (26) se réduit à deux termes, et l'on trouve

$$y_{m,m'} = \left[\psi_3\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{3}\right)\right]^{-\frac{4}{3}} \times \left[p^{\text{v}}\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{3}\right) + \frac{2^2.3^3.19}{5} g_2\, p'\left(\frac{u+m\varpi+m'\varpi'}{3}\right)\right].$$

On pourrait multiplier ces exemples et en trouver d'analogues pour les équations de tous les ordres, mais ce ne serait pas sans de longs calculs. Je me contente d'avoir montré, dans ce chapitre, que, pour les équations à coefficients doublement périodiques et réductibles aux équations à intégrale générale uniforme, il existe effectivement des méthodes d'intégration qui leur sont spéciales.

MÉMOIRE SUR LA CLASSIFICATION

DES

COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES (1).

Journal de l'École Polytechnique, LIIe cahier, 1882, p. 1.

INTRODUCTION

ET RÉSUMÉ DU MÉMOIRE.

Dans la géométrie plane, un nombre unique, le *degré*, permet de caractériser une famille de courbes; tous les membres d'une même famille sont cas particuliers d'un seul et même être, bien défini par une équation, la courbe générale du degré considéré.

Dans la géométrie de l'espace, cette définition générale des courbes d'un même degré fait défaut. On reconnaît même, dès l'abord, que ces courbes forment *plusieurs* familles, entièrement distinctes entre elles. C'est ce qui apparaît dès le quatrième degré, où l'on trouve deux types différents, distingués par le nombre h des *points doubles apparents*.

Ces deux nombres, h et le degré d, suffisent-ils également à caractériser une famille de courbes? Les faits répondent à cette question par la négative; mais ce n'est pas avant le neuvième degré qu'on rencontre deux familles différentes pour les mêmes nombres d, h ($d = 9$, $h = 18$). Ces deux familles, différentes à tous égards, peuvent être distinguées entre elles au moyen d'un nouveau nombre n, dont voici la définition. Par un point arbitraire de l'espace, passent

(1) Couronné par l'Académie des Sciences de Berlin (prix Steiner, 1882), ce mémoire est, en grande partie, la reproduction d'un travail présenté à l'Académie des Sciences de Paris en février 1870. (Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, 1870, p. 380) [*Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 80.]

des *cordes* de la courbe, en nombre h, c'est-à-dire des droites rencontrant chacune la courbe en deux points. Le nombre n est le degré minimum des cônes qui contiennent toutes ces cordes. Il est égal à 4 pour l'une des familles de courbes du neuvième degré dont je parle, à 5 pour l'autre.

Ces trois nombres, d, h, n, peuvent-ils dorénavant suffire à caractériser chaque famille de courbes? Le premier exemple contradictoire se rencontre pour $d = 15$, $h = 63$, $n = 9$. Les faits répondent donc encore négativement, et l'on est bien contraint de reconnaître qu'on chercherait en vain à caractériser, d'une manière générale, toute famille de courbes par quelques nombres, analogues au degré.

Le problème de la classification des courbes gauches algébriques se pose donc en ces termes :

Énumérer, définir et distinguer entre elles les diverses familles de courbes d'un même degré, de telle sorte qu'aucune famille ne puisse jamais être cas particulier d'une autre, plus générale.

C'est à la solution de ce problème qu'est consacré le présent mémoire. Je me borne d'ailleurs, et d'une manière absolue, aux courbes qui n'ont pas de points singuliers (¹).

En premier lieu, il convient d'examiner quelles sont les familles dont on peut obtenir une définition immédiate. A cet égard, on verra, dès le début et de trois manières différentes, le résultat suivant :

Les courbes de degré d, ayant h points doubles apparents, forment une seule famille si le nombre h est compris entre les deux limites $\mathfrak{H}(1)$ et $\mathfrak{H}(2)$ ci-après :

$$\mathfrak{H}(1) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}, \qquad \mathfrak{H}(2) = \frac{(d-2)(d-3)}{2} + 1.$$

Et voici le caractère distinctif de ces familles :

Toute courbe plane, de degré d, ayant des points doubles en nombre h, compris entre ces deux limites, est la perspective d'une courbe gauche de degré d, ayant h points doubles apparents.

(¹) J'indique sommairement et sans démonstration ce théorème, qui n'est nullement évident : *Toute courbe à points singuliers est cas particulier de courbes du même degré sans point singulier;* en sorte que la classification ne sera pas modifiée si l'on tient compte de *toutes* les courbes de chaque degré. Pour le sens exact de ce théorème, voir chap. I [p. 301].

Au contraire, *une courbe plane de degré d ayant des points doubles en nombre h inférieur à* $\mathfrak{H}(2)$, *et d'ailleurs quelconque, n'est pas la perspective d'une courbe gauche de degré d.*

Jusqu'au sixième degré inclusivement, il n'existe pas d'autres courbes que celles dont je viens de parler. Dès le septième degré, il en apparaît d'autres. C'est de là que naît toute la difficulté du problème.

Quoique la caractéristique h ne puisse suffire à distinguer les diverses familles de courbes d'un même degré, elle est cependant très propre à séparer les unes des autres la plupart de ces courbes. Aussi est-il essentiel de connaître d'abord quelles sont les diverses valeurs numériques de cette caractéristique. Son *maximum* est $\mathfrak{H}(1)$, comme l'on sait; elle a aussi un *minimum :*

Le minimum de h est l'entier contenu dans $\left(\frac{d-1}{2}\right)^2$.

Voici maintenant un autre résultat bien saillant :

La caractéristique h n'est pas susceptible de devenir égale à un quelconque des entiers depuis $\left[\left(\frac{d-1}{2}\right)^2\right]$ *jusqu'à* $\left[\frac{(d-1)(d-2)}{3}\right]$, *mais seulement à quelques-uns d'entre eux.*

Ainsi, pour un même degré d, la suite des nombres h est *discontinue ;* elle présente des *lacunes.* Cette circonstance ne s'offre pas avant le neuvième degré.

On a, en même temps, cette proposition :

Les courbes, de degré d, qui ont moins de $\left[\frac{(d-1)(d-2)}{3}\right]$ *points doubles apparents, sont situées sur des surfaces du second degré. Les nombres h qui s'y rapportent sont donnés par la formule*

$$h = \frac{d(d-1)}{2} - \lambda(d-\lambda),$$

où λ *est un entier arbitraire.* Le minimum $\left[\left(\frac{d-1}{2}\right)^2\right]$ est atteint pour $\lambda = \left[\frac{d+1}{2}\right]$; les autres valeurs s'obtiennent quand on fait croître λ.

A chacun de ces nombres h correspond une famille de courbes C_2, *situées sur des surfaces du second degré. Tant que h n'atteint pas la limite* $\left[\frac{(d-1)(d-2)}{3}\right]$, *ces familles seules existent. Quand h dépasse cette limite, sans atteindre une autre limite* $\mathfrak{H}(3)$, *les*

courbes C_2 *composent des familles distinctes qui coexistent avec d'autres, correspondant aux mêmes nombres d, h.*

Le nombre $\mathfrak{H}(3)$ est donné par une formule générale, comprenant aussi $\mathfrak{H}(1)$ et $\mathfrak{H}(2)$, et dont il sera parlé plus loin.

A partir de la limite $\left[\frac{(d-1)(d-2)}{3}\right]$, la suite des nombres h ne présénte plus de lacunes.

A chaque nombre entier pris pour h, à partir de $\left[\frac{(d-1)(d-2)}{3}\right]$, *correspond une famille de courbes* C_3, *situées sur des surfaces du troisième degré. Tant que h n'atteint pas la nouvelle limite* $3\left[\frac{(d-2)^2}{8}\right]$, *ces courbes* C_3 *existent seules conjointement avec les courbes* C_2. *Au delà, elles composent encore des familles distinctes tant que h n'atteint pas une autre limite* $\mathfrak{H}(4)$. *Au delà de cette dernière, elles ne sont plus que des cas particuliers.*

Cette sélection se poursuit encore :

A chaque nombre entier pris pour h, à partir de $3\left[\frac{(d-2)^2}{8}\right]$, *correspond une famille de courbes* C_4, *situées sur des surfaces du quatrième degré* (sauf une lacune d'une unité dans les valeurs de h à partir du minimum, quand le degré est divisible par 4). *Tant que h n'atteint pas la limite* $2\left[\frac{(d-2)(d-3)}{5}\right]$ *ou, pour le cas où d est divisible par* 5, *la limite* $2\frac{d(d-5)}{5}$, *ces courbes* C_4 *coexistent seules avec les courbes* C_2, C_3. *Au delà, elles composent encore des familles distinctes tant que h n'atteint pas une autre limite* $\mathfrak{H}(5)$.

La même sélection, qui ne peut être reconnue que sur des exemples où d soit choisi assez grand, se continue, et voici enfin l'énoncé général de la loi qui y préside :

Soit m un nombre entier égal ou inférieur au plus petit entier M *pour lequel est satisfaite la condition*

$$\frac{(M+1)(M+2)(M+3)}{3} \geqq Md+3.$$

A ce nombre m correspond une fonction $H(m)$, *jouissant de la propriété suivante :*

I. *Toute courbe du degré d, qui a moins de* $\mathrm{H}(m)$ *points doubles apparents, est située sur une surface de degré moindre que m.*

La fonction $\mathrm{H}(m)$ *est toujours croissante avec m* (on dira dans un instant quelle est cette fonction).

II. *A tout nombre h, égal ou supérieur à* $\mathrm{H}(m)$, *correspond une famille de courbes* C_m *du degré d, situées sur des surfaces de degré minimum m* (sauf quelques lacunes dans les plus petites valeurs de h et le cas $m = 2$). *Tant que h reste inférieur à une autre limite* $\mathfrak{H}(m+1)$, *ces courbes* C_m *coexistent conjointement à toutes autres et composent des familles distinctes. Au delà de cette limite, ce ne sont plus que des cas particuliers.*

La limite $\mathfrak{H}(m+1)$ *est donnée par la formule*

$$\mathfrak{H}(m+1) = \frac{(d-m-1)(d-m-2)}{2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{6}.$$

III. *La courbe* C_m, *qui a le plus grand nombre de points doubles apparents,* $h = \mathfrak{H}(m+1) - 1$, *comporte dans sa définition $4d$ arbitraires. Chacune des autres en comporte davantage, savoir* $4d + \mathfrak{H}(m+1) - 1 - h$ (sauf encore quelques exceptions pour les plus petites valeurs de h).

Si, dans la fonction $\mathfrak{H}$, on fait varier l'entier m de toutes les manières (*sans tenir compte d'ailleurs de la condition* $m \leqq \mathrm{M}$), on reconnaît que cette fonction $\mathfrak{H}$ a un minimum. Ce minimum donne lieu à une exception pour la proposition précédente. Voici cette exception : *En général, il existe dans le voisinage de* M *un ou plusieurs entiers m pour lesquels la limite* $\mathrm{H}(m)$ *est supérieure au minimum de* $\mathfrak{H}$; *ce n'est, d'ailleurs, pas pour un de ces nombres que* $\mathfrak{H}$ *atteint son minimum, et, dans tous les cas, comme l'énoncé II l'exige,* $\mathfrak{H}(m+1)$ *est toujours supérieur à* $\mathrm{H}(m)$.

Pour un tel nombre, la fonction $\mathrm{H}(m)$ *jouit toujours des propriétés II et III, mais non plus de la propriété I. A l'égard de cette dernière,* $\mathrm{H}(m)$ *y est remplacée par le minimum de* $\mathfrak{H}$.

Pour les nombres m_1, *supérieurs à* M, *il existe une fonction* $\mathrm{H}_1(m_1)$ *donnant lieu encore à la propriété I. Cette fonction a la même définition que* $\mathfrak{H}$, *mais appliquée à d'autres valeurs de*

l'argument :

$$H_1(m_1) = \frac{(d-m_1)(d-m_1-1)}{2} + \frac{m_1(m_1^2-1)}{6}.$$

L'énoncé II subsiste si l'on y remplace $\mathfrak{H}(m+1)$ *par* $H_1(m_1+1)$. Quant à la proposition III, elle se change en celle-ci :

IV. *Chaque famille générale de courbes du degré* d, *échappant à la définition des courbes* C_m, *comporte* $4d$ *arbitraires.*

Il reste enfin, pour compléter cet énoncé, à définir la fonction $H(m)$.

V. *Soit* σ *le plus petit nombre, non négatif, qui rende* $(d+\sigma)$ *divisible par* m, *et soit* $d+\sigma = m\mu$. *Sous la condition* FORMELLE $m^2-m<d$, *on a*

$$H(m) = \frac{(d-\sigma)(m-1)(\mu-1)}{2}.$$

Mais pour les nombres m', *donnant* $m'^2-m' \geqq d$, *il n'y a point de formule simple fournissant l'expression de la fonction* $H(m')$. Je dois me contenter de dire, dans ce résumé, *qu'il existe une méthode certaine pour calculer cette fonction.*

Il est assez malaisé de saisir la portée véritable de ces théorèmes autrement que par des exemples. Mais encore faut-il prendre le nombre d assez grand pour que la plus grande partie des propositions se puisse appliquer. C'est pour cette raison qu'après avoir présenté, au chapitre VI de ce mémoire, la classification suivie et complète des courbes jusqu'au vingtième degré inclusivement, j'ai traité aussi la classification des courbes du degré 120. On verra, par les résultats de cette classification, qui terminent le mémoire, que les théorèmes précédents résolvent véritablement ces deux parties du problème proposé : *Énumérer et distinguer entre elles les diverses familles de courbes d'un même degré.* Quant à cette autre partie : *définir ces courbes*, c'est-à-dire en *donner explicitement une représentation* ou, du moins, le moyen d'y parvenir, la solution n'en est pas complète. Mais c'est qu'aussi cette partie du problème ne paraît pas susceptible d'une solution générale, et doit être abordée à part pour chaque cas.

Le problème dont il s'agit se réduit à cet autre, appartenant à la

géométrie plane : *Trouver deux courbes, de degrés donnés, qui se touchent en des points dont le nombre soit égal à un nombre donné.* C'est là un problème dont il ne semble pas qu'on puisse jamais obtenir une solution générale.

Toutefois, et c'est là un des traits principaux du mémoire actuel, ce problème n'existe, à chaque degré d, que pour une faible minorité des familles de courbes. Effectivement, on a cette proposition :

VI. *Toutes les courbes dénommées tout à l'heure* C_m *sont immédiatement définies et représentées au moyen de courbes de degré moindre.*

Si l'on joint à cette proposition celle que j'ai énoncée (p. 262) au sujet des courbes pour lesquelles h est supérieur à $\mathfrak{H}(2)$, on n'a plus à traiter de nouveaux problèmes que pour un nombre fort restreint de courbes. Ainsi, dans l'exemple $d = 120$ que j'ai examiné, où le minimum de h est 3540, le maximum 7021, ce sont seulement les nombres h compris entre les limites 6020 et 6903 qui donnent lieu au problème dont je parle. Il ne se pose pas, d'ailleurs, avant le onzième degré, et jusqu'au treizième degré inclusivement il se résout immédiatement.

Tels sont, en résumé, les principaux résultats de ce mémoire. Quant à la méthode qui s'y trouve employée et à l'ordonnance des matières, il me reste peu de mots à ajouter. Je me sers principalement, pour représenter les courbes, de deux équations en coordonnées rectilignes

$$(\text{A}) \qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad z = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)},$$

où φ, ψ, χ désignent des polynomes entiers. Les lettres x, y, z sont, ou bien des coordonnées cartésiennes, ou bien les rapports de coordonnées homogènes. Ce mode de représentation, tout naturel, a été employé par M. Cayley dans quelques courtes études sur les courbes du quatrième et du cinquième degré (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LIV), et par M. Édouard Weyr, dans un mémoire auquel j'emprunterai un résultat important.

Après avoir exposé, avec tous les développements nécessaires, les premières notions qui se rattachent immédiatement au mode de représentation (A) et y avoir consacré le chapitre I, je montre, dans

le chapitre II, comment s'offre cette circonstance si curieuse : la suite des nombres h présente des lacunes à partir du minimum.

Le chapitre III, le plus long du mémoire, est aussi celui qui contient la théorie la plus abstraite et la plus importante. J'y expose les propriétés de certaines opérations algébriques, analogues à l'élimination, et qui, appliquées aux trois polynomes φ, ψ, χ, conduisent d'une courbe quelconque à une autre courbe, que j'appelle *adjointe*. Cette adjointe n'a pas de définition géométrique, elle dépend essentiellement des éléments de la représentation (A), qui peuvent être variés à l'infini. Néanmoins toutes les propriétés de la courbe envisagée, qui ont de l'intérêt pour la classification, se reflètent dans cette adjointe. C'est par l'intervention de cette dernière que je parviens aux résultats énoncés précédemment.

La partie de ces énoncés relative aux courbes situées sur les surfaces du troisième degré est exposée en détail dans le chapitre IV ; l'extension des résultats aux courbes tracées sur les surfaces du quatrième et du cinquième degré, et enfin de degré quelconque, fait l'objet du chapitre V, qui se termine par l'exposé des moyens propres à la classification des courbes d'un degré quelconque.

J'ai déjà dit que le chapitre VI contient les applications numériques nécessaires à la parfaite intelligence des résultats généraux dont la démonstration termine le mémoire.

CHAPITRE I.

Notions préliminaires. — Courbes unicursales et courbes du genre 1. — Courbes du degré d et du genre $p \gtreqless d-3$. — Représentation des courbes au moyen des monoïdes. — Courbes du premier et du second groupe. — Minimum du nombre des points doubles apparents. — Conditions imposées à une surface par la condition complexe de contenir une courbe. — Théorème de M. Eduard Weyr. — Quelques mots sur les courbes à points singuliers et les courbes composées.

---

1. Une *courbe algébrique* est le lieu d'un point dont les coordonnées rectilignes sont des fonctions algébriques d'une même variable. La courbe est *gauche* si elle n'est pas contenue dans un plan.

Le nombre des points, réels ou imaginaires, en lesquels la courbe est rencontrée par un plan quelconque, est le *degré* de cette courbe. Le degré est le premier élément de la classification.

Sur une courbe gauche, il peut exister des *points singuliers*. On appelle ainsi un point qui compte pour plus d'une unité dans le nombre des intersections de la courbe avec tout plan mené par ce point. *Il ne sera traité, dans ce mémoire, que des courbes dénuées de points singuliers.*

La droite qui joint deux points pris sur la courbe est une *corde*. Les cordes d'une courbe gauche remplissent l'espace, en d'autres termes, forment une *congruence*. Par un point arbitraire de l'espace viennent passer quelques-unes de ces cordes. Aussi, bien que la courbe n'ait pas de point singulier, sa perspective, faite d'un point de vue quelconque, a des points doubles. Suivant une heureuse expression, consacrée par l'usage, on peut dire que toute courbe gauche, regardée d'un point de vue quelconque, a des *points doubles apparents*. Le nombre de ces points doubles est un second élément important de la classification.

2. D'après sa définition, et en vertu de la théorie de l'élimination, une courbe algébrique est l'intersection de deux surfaces algébriques. La ligne suivant laquelle se coupent deux surfaces algébriques a pour degré le produit des degrés de ces surfaces. S'il arrive que cette ligne se décompose en plusieurs courbes distinctes, chacune de ces courbes

est une *intersection partielle*, leur ensemble est l'*intersection complète* des deux surfaces.

Le plus souvent, une courbe algébrique gauche ne peut constituer, à elle seule, l'intersection complète de deux surfaces. C'est notamment ce qui a lieu quand son degré est un nombre premier.

De cette circonstance naît une difficulté sérieuse quand on veut définir les courbes par l'intersection des surfaces. Cette difficulté, toutefois, est surmontée dans les cas où, à la courbe que l'on veut définir, on peut adjoindre une courbe déjà connue, de telle sorte que l'ensemble constitue une intersection complète. C'est ainsi que, dès l'abord, on a pu aisément classer les courbes du troisième, du quatrième et du cinquième degré. Je rappelle brièvement cette classification (1).

Le principe mis en usage est le suivant. Soit m le degré d'une surface que l'on veut faire passer par une courbe du degré d. Cette condition complexe que l'on impose à la surface équivaut à des conditions simples, dont le nombre N_m ne nous est pas connu, mais dont nous avons immédiatement une limite supérieure,

$$N_m \leqq md + 1. \tag{1}$$

Effectivement, une surface du degré m et une courbe du degré d se rencontrent en md points (2). Si donc on mène la surface par des points, pris sur la courbe, en nombre supérieur à md, la surface contient la courbe.

Posons, pour abréger,

$$\psi(m) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6},$$

en sorte que $\psi(m) - 1$ est le nombre des arbitraires qu'entraîne la définition d'une surface de degré m. Si l'on peut trouver m, de manière à vérifier la condition

$$\psi(m) \geqq md + 2,$$

on est assuré de pouvoir mener par toute courbe, du degré d, une ou plusieurs surfaces dont le degré ne dépasse pas m.

(1) Voir, par exemple, salmon fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes* (II Theil, 3te Auflage, p. 116 et suivantes).

(2) Dans l'ouvrage que je viens de citer, cette proposition est un *postulatum*. En réalité, elle se démontre de bien des manières; elle devient évidente quand on emploie le mode de représentation expliqué ci-après, au moyen des surfaces *monoïdes*.

En prenant successivement $m = 2, 3$ et $d = 3, 4, 5$, on trouve ainsi que toute courbe du troisième degré est sur une infinité de surfaces du second degré ; toute courbe du quatrième degré, sur une surface du second degré et une infinité de surfaces du troisième degré ; toute courbe du cinquième degré sur une infinité de surfaces du troisième degré. Pour les degrés $d = 3, 4, 5$, on peut ainsi trouver des lignes complémentaires ayant les degrés respectifs 1, 2, 4 ; et la classification ne peut rencontrer aucun obstacle. Afin d'effectuer cette classification, on se sert de la formule suivante, qui se rapporte au cas où l'intersection de deux surfaces se décompose en deux courbes.

Par m, m' désignons les degrés des deux surfaces ;

Par d, d' les degrés des deux courbes ;

Par h, h' le nombre des points doubles apparents pour chacune de ces courbes.

Entre ces six nombres, existe la relation (*loco citato*, p. 132)

$$h - h' = \frac{1}{2}(d - d')(m - 1)(m' - 1). \tag{2}$$

Au moyen de cette formule et du principe précédent, on obtient la classification que voici :

1° $d = 3$, une seule famille de courbes, ayant pour nombre de points doubles apparents $h = 1$. C'est la *cubique gauche*, intersection partielle de deux surfaces du second degré, complétée par une ligne droite. C'est ce que j'exprime abréviativement ainsi :

$d = 3$, $h = 1$; surfaces $A_2 A_2$; courbe compl. $d' = 1$, $h' = 0$;

2° $d = 4$, deux familles :

$d = 4$, $h = 2$; surfaces $A_2 A_2$; intersection compl.
$d = 4$, $h = 3$; » $A_2 A_3$; courbe compl. $d' = 2$, $h' = 1$ (deux lignes droites) ;

3° $d = 5$, trois familles (¹) :

$d = 5$, $h = 4$; surfaces $A_2 A_3$; courbe compl. $d' = 1$, $h' = 0$;
$d = 5$, $h = 5$; » $A_3 A_3$; » $d' = 4$, $h' = 3$;
$d = 5$, $h = 6$; » $A_3 A_3$; » $d' = 4$, $h' = 4$ (*).

(*) Une ligne droite et une cubique gauche, ou encore deux coniques.

(¹) Dans l'ouvrage déjà cité est mentionnée une quatrième famille : $d = 5$, $h = 6$, A_2, A_4, complétée par trois lignes droites. Ce n'est pas, à proprement parler, une famille distincte, mais un *cas particulier* de la troisième famille. Les raisons qui viennent à l'appui de cette manière de voir se trouvent quelques lignes plus loin, à propos des *courbes unicursales*.

Pour les courbes du sixième degré, ce procédé ne réussit plus ; on est contraint de l'abandonner.

3. Par un moyen très différent, on définit sans difficulté des courbes, en nombre illimité, classées d'après leur *genre*.

Égalons les trois coordonnées d'un point à des fonctions rationnelles d'une même variable, et soit d le degré commun aux termes de ces fractions. Nous avons ainsi défini les *courbes unicursales* du degré d, c'est-à-dire les courbes dont le nombre h des points doubles apparents est lié au degré d par la relation

$$h = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

L'universalité des courbes unicursales du degré d est donc représentée par des équations générales qui viennent d'être définies ; elle compose une *famille* unique.

Par ce mode de définition, on reconnaît immédiatement quel est le nombre des conditions simples équivalentes à la condition, pour une surface du degré m, de passer par la courbe. C'est précisément

$$N_m = md + 1,$$

c'est-à-dire la limite supérieure (1) considérée plus haut.

Il n'est pas moins aisé de reconnaître qu'une telle courbe comporte, d'après sa définition, $4d$ arbitraires.

Soit maintenant à définir les courbes du genre 1, c'est-à-dire les courbes du degré d, pour lesquelles on aura

$$h = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1.$$

Nous imiterons l'analyse employée par M. Hermite ([1]) pour les courbes planes, et nous égalerons les coordonnées du point mobile à trois fonctions uniformes d'une même variable, doublement périodiques, aux mêmes périodes, et aux mêmes infinis, en nombre d. Pourvu, comme on le reconnaît aisément, que d ne soit pas inférieur à 4, on a défini ainsi la courbe gauche la plus générale, du degré d, du genre 1. Pour une telle courbe, on prouve facilement que le

---

([1]) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXXXII, 1877, p. 343. [*Œuvres d'Hermite*, t. III, p. 420.]

nombre des arbitraires est encore $4d$ et que le nombre N_m est égal à md, c'est-à-dire inférieur d'une unité à la limite (1).

4. L'analyse de M. Hermite a été étendue aux courbes de genre quelconque p, par M. Lindemann ([1]). Suivons aussi cette voie à propos des courbes gauches.

Soit $f(x, y) = 0$ une courbe plane du genre p. Considérons les intégrales abéliennes de première espèce, attachées à cette courbe; leur nombre est p, et nous les désignerons par

$$\int \varphi_1(x, y)\,dx, \quad \int \varphi_2(x, y)\,dx, \quad \ldots, \quad \int \varphi_p(x, y)\,dx.$$

Prenons sur la courbe f des points, en nombre d, désignés par leurs coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_d, y_d); et choisissons des constantes a_1, a_2, ..., a_d, en pareil nombre, de telle sorte qu'elles vérifient les relations suivantes, dont le nombre est p:

$$(3) \quad \begin{cases} a_1\varphi_1(x_1, y_1) + a_2\varphi_1(x_2, y_2) + \ldots + a_d\varphi_1(x_d, y_d) = 0, \\ a_1\varphi_2(x_1, y_1) + a_2\varphi_2(x_2, y_2) + \ldots + a_d\varphi_2(x_d, y_d) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1\varphi_p(x_1, y_1) + a_2\varphi_p(x_2, y_2) + \ldots + a_d\varphi_p(x_d, y_d) = 0. \end{cases}$$

Prenons, de même, un second système de constantes b_1, b_2, ..., b_d, et un troisième c_1, c_2, ..., c_d, qui, mises à la place de a_1, a_2, ..., a_d, vérifient également les p relations (3).

Pour chacun des points (x_1, y_1), ..., (x_d, y_d), considérons encore l'intégrale normale de seconde espèce, attachée à la courbe f, et ayant ce point pour pôle. Soient Z_1, Z_2, ..., Z_d ces intégrales.

Tout ceci fait, et A, B, C étant trois constantes arbitraires, posons

$$(4) \quad \begin{cases} \xi = A + a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \ldots + a_d Z_d, \\ \eta = B + b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + \ldots + b_d Z_d, \\ \zeta = C + c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \ldots + c_d Z_d. \end{cases}$$

Le point dont les coordonnées sont ξ, η, ζ, dans l'espace, varie avec le point (x, y), mobile sur la courbe f. Il a pour lieu la courbe gauche du degré d, la plus générale, qui corresponde *point par point* à la courbe f. Cette courbe gauche est donc du genre p, et

([1]) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXXXIV, 1878, p. 294.

l'on a

$$h = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - p.$$

Discutons maintenant ce mode de définition. Par le moyen des relations (3) on peut exprimer quelques-unes des constantes a en fonction linéaire des autres, en nombre déterminé n. Il en sera de même à l'égard des constantes b et des constantes c. Par là, on peut réduire les seconds membres des équations (4) à ne contenir linéairement que n fonctions distinctes. Si donc n est moindre que *trois*, il existe une relation linéaire entre ξ, η, ζ, et la courbe est plane. Ainsi le nombre n doit être égal ou supérieur au nombre 3.

Soit donc, en premier lieu, $d \geqq p+3$. Il est alors possible de prendre les points $(x_1, y_1), \ldots, (x_d, y_d)$ à volonté. Par conséquent :

A toute courbe plane, du genre p, on peut faire correspondre POINT PAR POINT *des courbes gauches du degré* $d \geqq p+3$. Ces courbes sont, comme on voit, caractérisées par la condition

$$(5) \qquad h \geqq \frac{(d-2)(d-3)}{2} + 1.$$

Pour chaque degré d et chaque nombre h, vérifiant cette condition (5), on est en droit d'envisager toutes les courbes comme formant une seule et même famille, définie par les équations (4).

Il est aisé de trouver le nombre des arbitraires que comporte cette définition. Effectivement, les intégrales de seconde espèce Z, outre leur pôle, admettent dans leur définition $3p-3$ modules, caractéristiques de la courbe f. Les points $(x_1, y_1), \ldots, (x_d, y_d)$ amènent d arbitraires, et les constantes $a, \ldots, b, \ldots, c, \ldots,$ liées par les relations telles que (3), laissent encore disponibles $3d-3p$ arbitraires. Enfin nous avons, en outre, 3 arbitraires A, B, C. En tout, le nombre des arbitraires est donc $(3p-3)+d+(3d-3p)+3 = 4d$. Ainsi *ces courbes admettent* $4d$ *arbitraires*, résultat bien remarquable, en ce qu'il est indépendant de h. Nous le retrouverons plus loin par une autre voie.

Cherchons aussi le nombre N_m, relatif à de telles courbes. Substituons, à cet effet, les expressions (4) dans un polynome du $m^{\text{ième}}$ degré en ξ, η, ζ. La fonction ainsi obtenue, ayant les pôles $(x_1, y_1), \ldots,$ (x_d, y_d), multiples tous de l'ordre m, est susceptible d'une forme réduite : cette forme ne diffère de celle de ξ que par le changement

des coefficients et par l'adjonction de termes contenant les dérivées des intégrales Z, jusqu'à l'ordre $(m-1)$. Il y a donc, dans l'expression réduite, en tout, $(md+1)$ termes. D'ailleurs, les termes qui ne contiennent pas les dérivées des Z se réduisent encore à $(d-p)$ termes linéairement distincts, en vertu des relations analogues à (3), qui existent encore pour ce cas entre leurs coefficients.

Il y a donc, en tout, dans la forme réduite, $(md+1-p)$ coefficients à rendre nuls pour que la fonction soit identiquement nulle. On a donc

$$N_m = md + 1 - p. \tag{6}$$

Cette formule (6) *donne le nombre* N_m *des conditions simples auxquelles équivaut, pour une surface du degré* m, *la condition de passer par une courbe du degré* d, *du genre* p; *elle est prouvée quand il s'agit des courbes de genre* p, *inférieur ou au plus égal à* $(d-3)$.

5. Si nous voulons définir de la même manière une courbe du degré $d < p+3$, nous nous trouvons en présence de difficultés très sérieuses. Les équations (3) doivent permettre de prendre arbitrairement trois des constantes a; il doit donc exister $(p+3-d)$ relations entre les points $(x_1, y_1), \ldots, (x_d, y_d)$, et ces relations sont déjà très difficiles à étudier (¹). Mais, bien plus, si le nombre de ces relations dépasse le nombre des points disponibles, la courbe f ne peut plus être quelconque, dans le genre p. Comme il est visible que trois, au moins, des points (x, y) peuvent être pris à volonté, cette circonstance se présente certainement quand on a $p+3-d > d-3$. Donc, *quand* d *est inférieur à* $\frac{1}{2}p+3$, *ou, en d'autres termes,* h *inférieur à* $\frac{(d-3)(d-4)}{2}+1$, *il ne peut correspondre de courbes gauches du degré* d *avec* h *points doubles apparents, qu'à des courbes du genre* p, *toutes spéciales, à modules particuliers*. La recherche

(¹) Un pas important a été fait dans cette voie par MM. Nœther et Brill dans le mémoire intitulé : *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie*. Il est notamment prouvé, dans ce mémoire, que le nombre des arbitraires est encore $4d$, pour $p \leqq \frac{4}{3}d - 4$ (*Mathematische Annalen*, t. VII, 1874, p. 308).

directe de ces courbes spéciales paraît offrir les plus grandes difficultés, et je ne la tenterai pas. J'aborderai le problème par une voie toute différente, et je ne veux retenir de cette analyse que ce résultat très net : *une ligne de démarcation remarquable sépare les courbes dont les éléments satisfont à la condition* (5), *de toutes les autres.* Ces dernières constituent d'ailleurs, dès que le degré d croît suffisamment, la très grande majorité des cas. Cependant, elles n'existent pas pour $d = 3, 4, 5$. Ainsi les propositions du n° 4 s'appliquent à toutes les courbes jusqu'au cinquième degré inclusivement.

Ces deux propositions s'appliquent encore dans un très grand nombre de cas où la condition (5) n'est pas satisfaite, mais non pas toujours. En dehors de toute théorie générale, il est aisé de reconnaître dès l'abord qu'il existe une infinité de courbes échappant absolument à ces propositions. Les *intersections complètes* nous en fournissent l'exemple.

Soient deux surfaces quelconques, de degrés respectifs μ et μ', dont je considère l'intersection complète, que j'appelle la courbe C. Cette courbe a pour degré $d = \mu\mu'$.

Supposons $\mu > \mu'$, et mettons, comme plus haut,

$$\psi(m) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}.$$

Le nombre des arbitraires qui interviennent dans la définition de C est visiblement

$$A = \psi(\mu) - 1 + \psi(\mu') - 1 - \psi(\mu - \mu') = \mu' \frac{\mu'^2 + 11}{3} - 1 + \mu\mu'\left(\frac{\mu - \mu'}{2} + 2\right).$$

Au cas particulier $\mu = \mu'$, ce nombre doit être diminué d'une unité, et l'on a

$$A' = \frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{3} - 2.$$

On voit immédiatement que, les nombres μ, μ' croissant, les nombres A, A' deviennent rapidement supérieurs respectivement à $4\mu\mu'$ et $4\mu^2$.

La recherche du nombre N_m, pour la même courbe, présente deux cas distincts, suivant que m est supérieur ou inférieur à $(\mu + \mu')$. Effectivement, si $U = 0$, $U' = 0$ sont les équations des deux surfaces proposées, l'équation générale d'une surface W de degré

$$m = \mu + \mu' - \delta,$$

passant par C, aura la forme

$$W = vU + uV = 0,$$

dans laquelle v et u seront des polynomes arbitraires des degrés respectifs $(\mu' - \delta)$ et $(\mu - \delta)$. Si donc δ est positif, la surface W sera susceptible de $\psi(\mu - \delta) + \psi(\mu' - \delta) - 1$ arbitraires; on aura donc

$$N_m = \psi(\mu + \mu' - \delta) - \psi(\mu - \delta) - \psi(\mu' - \delta)$$
$$= \frac{1}{2}\mu\mu'(\mu + \mu' - 2\delta + 4) + \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 3)}{6}.$$

D'après une formule bien connue, le nombre des points doubles apparents de C est

$$h = \frac{1}{2}\mu\mu'(\mu - 1)(\mu' - 1),$$

d'où résulte

$$p = \frac{1}{2}\mu\mu'(\mu + \mu' - 4) + 1, \qquad md + 1 - p = \frac{1}{2}\mu\mu'(\mu + \mu' - 2\delta + 4),$$

$$N_m = md + 1 - p + \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 3)}{6}.$$

Dans le cas, au contraire, où W est de degré égal ou supérieur à $(\mu + \mu')$, c'est-à-dire avec les mêmes notations, où δ est négatif, on peut, sans changer l'expression de W, modifier u et v en prenant, à leur place, $u + \omega U$, $v - \omega V$, ω étant un polynome arbitraire de degré $(-\delta)$.

A cause de cette circonstance, la formule se réduit à

$$N_m = md + 2 - p.$$

Ayant égard maintenant au dernier résultat, je conclus ainsi :

Pour une intersection complète de deux surfaces ayant les degrés μ, μ', *la formule*

$$N_m = md + 1 - p$$

s'applique seulement à la condition que m *soit au moins égal à* $(\mu + \mu' - 3)$. *Dans les autres cas, la formule exacte est*

$$N_m = md + 1 - p + \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 3)}{6},$$

quand on a posé

$$m = \mu + \mu' - \delta.$$

On verra plus loin comment cette proposition se généralise.

6. On a employé, pour représenter les courbes gauches, un autre mode, qui est celui dont je ferai principalement usage. A l'équation $\varphi(x, y) = 0$ de la projection de la courbe, on adjoint une autre équation ayant la forme suivante, dans laquelle ψ et χ désignent des polynomes entiers :

$$z = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)}. \tag{7}$$

Un tel système d'équations définit, sans ambiguïté, une courbe unique, dès que $\varphi(x, y)$ est indécomposable. On peut indifféremment considérer x, y, z comme des coordonnées cartésiennes, ou comme les rapports de trois coordonnées homogènes à une quatrième. Grâce à cette convention, la possibilité de représenter ainsi toute courbe algébrique est évidente, pourvu que le point ($x = y = 0$, $z = \infty$) ne soit pas le sommet d'un cône contenant la courbe et dont chaque arête rencontre cette courbe en plus d'un point.

C'est M. Cayley qui a, le premier, employé ce mode de représentation ([1]). L'illustre géomètre appelle *monoïde* la surface représentée par l'équation (7). La propriété géométrique qui caractérise une telle surface consiste en ceci : m étant son degré, elle possède un point multiple d'ordre $(m - 1)$, qu'on peut appeler son *sommet*. C'est le point ($x = y = 0$, $z = \infty$).

Sans nuire à la généralité, on peut supposer ψ et χ des degrés m et $(m - 1)$ respectivement.

Une courbe gauche s'offre ainsi comme l'intersection d'un cône $\varphi = 0$ et d'une surface monoïde, de même sommet. Elle ne compose pas l'intersection complète des deux surfaces; elle est complétée par des droites qui passent au sommet commun. Les solutions communes aux trois équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ fournissent la représentation de ces droites, qui existent nécessairement : dans le cas opposé, en effet, le sommet serait sur la courbe, hypothèse qu'on peut écarter par le choix des coordonnées.

Toute courbe devenant ainsi, par l'adjonction de lignes droites, l'intersection complète de deux surfaces, le principe relatif au nombre des intersections d'une courbe et d'une surface (p. 270, note 2) devient évident.

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LIV, 1862, p. 55, 396 et 672; et LVIII, 1864, p. 994. [*Œuvres de Cayley*, t. V, p. 7 et 24.]

Je vais passer en revue les premières propriétés du mode de représentation dont il s'agit.

7. Par une même courbe on peut mener une infinité de monoïdes ayant un même sommet. Tout d'abord, au lieu de l'équation (7), on peut prendre celle-ci :

$$z = \frac{\lambda\psi + \mu\varphi}{\lambda\chi + \nu\varphi},$$

où λ, μ, ν sont des polynomes arbitraires. Plus généralement soient ψ_1 et χ_1 deux polynomes qui rendent divisible par φ la quantité $(\psi_1\chi - \psi\chi_1)$; il est visible que la surface $z = \frac{\psi_1}{\chi_1}$ passe encore par la courbe considérée.

Cette liaison entre ψ, χ, ψ_1, χ_1 s'exprime ainsi :

$$\psi_1\chi - \psi\chi_1 = \theta\varphi, \tag{8}$$

où θ est un polynome entier. Des relations de cette espèce se rencontrent à chaque instant dans ce mémoire. Souvent on n'aura pas besoin de préciser le polynome θ. Dans ce cas, la relation (8) sera écrite sous une de ces formes, que j'appelle naturellement des *équivalences :*

$$\psi_1\chi - \psi\chi_1 \equiv 0, \qquad \psi_1\chi \equiv \psi\chi_1, \qquad \frac{\psi_1}{\chi_1} \equiv \frac{\psi}{\chi} \qquad (\text{div. } \varphi),$$

mettant ainsi en évidence par la notation (div. φ), abréviation de *diviseur* φ, le polynome dont on néglige les multiples.

La relation (8) ayant lieu, je dirai que *les systèmes* (ψ, χ) *et* (ψ_1, χ_1) *sont équivalents pour la courbe* φ.

Par le point s, sommet du cône $\varphi = 0$ et des monoïdes, passent des cordes de la courbe gauche. Ce sont des arêtes particulières du cône, rencontrées par la courbe, chacune en deux points. Elles correspondent à des valeurs de x, y, pour chacune desquelles z a deux valeurs, et qui, par suite, font évanouir ψ, χ. Ce sont, en même temps, les coordonnées des points doubles de la courbe plane φ.

Le point s étant pris arbitrairement dans l'espace, il n'y a pas de droite passant par s et rencontrant la courbe plus de deux fois. Donc : *la courbe plane* $\varphi = 0$ *n'a, comme points singuliers, que des points doubles ordinaires* (suivant l'hypothèse que la courbe gauche n'a pas de points singuliers, n° 1). *Le polynome* χ *s'évanouit en chacun de ces points doubles.*

La réciproque de cette dernière proposition a une extrême impor-

tance dans cette théorie. En voici l'énoncé : *Pour qu'un polynome* χ_1 *fasse partie d'un système* (ψ_1, χ_1), *équivalent à* (ψ, χ), *il faut et il suffit que ce polynome s'évanouisse en chacun des points doubles de la courbe* φ.

On peut encore dire : *Pour qu'un polynome* χ_1 *puisse servir de dénominateur à* z, *il faut*, etc....

Cette réciproque est tout à fait évidente, ou, du moins, très facile à prouver si l'on suppose que la courbe $\chi = 0$ ait pour point simple chacun des points doubles de φ. Mais cette supposition semblerait faire disparaître la généralité ; c'est un écueil qu'il faut éviter surtout pour une proposition qui est le principal fondement de toute la théorie actuelle. Cette première difficulté sera surmontée aisément, comme on va voir, grâce à un théorème dû à M. Nöther (¹). Je vais rappeler ce théorème sous la forme la mieux appropriée à l'objet que j'ai en vue.

8. Quelques explications préliminaires sont ici indispensables.

Soient u et y deux fonctions algébriques d'une même variable x. Au moyen de la fonction y, on peut généralement (sauf certains cas d'exception qu'il n'est pas besoin de considérer ici) exprimer u sous forme *rationnelle*, c'est-à-dire comme quotient de deux polynomes entiers en x et y. Mais c'est seulement dans des cas exceptionnels que u peut être exprimée sous forme *entière*, c'est-à-dire par un polynome entier en x et y.

Le théorème a pour but de définir ces cas.

Soit x_0 une valeur attribuée à x, et soit aussi y_0 une valeur correspondante pour y. Dans une certaine étendue (c'est-à-dire, pour des valeurs de $x - x_0$ ayant un module limité), $y - y_0$ est représenté par un ou plusieurs développements procédant suivant les puissances ascendantes de $x - x_0$. Soient

$$(a) \qquad y - y_0 = a(x - x_0)^{\alpha} + a_1(x - x_0)^{\alpha_1} + \ldots,$$

$$(a') \qquad y - y_0 = a'(x - x_0)^{\alpha'} + a'_1(x - x_0)^{\alpha'_1} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ces divers développements.

(¹) *Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen*, par M. Nöther, (*Mathematische Annalen*, t. VI, 1873, p. 351). J'ai donné une autre démonstration du même théorème dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. V, 1877, p. 160 : *Sur une proposition d'algèbre*. [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 98.]

Supposons qu'à un système de valeurs concordantes, choisi arbitrairement pour x, y, corresponde une seule valeur de u. Ceci étant, à chaque développement (a), (a'), ... correspond un seul développement de u; soient alors

$$(b) \qquad u = b\,(x - x_0)^{\beta} + b_1(x - x_0)^{\beta_1} + \ldots,$$
$$(b') \qquad u = b'(x - x_0)^{\beta'} + b'_1(x - x_0)^{\beta'_1} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ces développements, (a) et (b) se correspondant, (a') et (b') de même, etc.

Prenons maintenant un développement suivant les puissances ascendantes, positives et entières de $x - x_0$ et $y - y_0$, ayant la forme de la série de Taylor :

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{aligned} &\mathrm{A} + \mathrm{A}'(x - x_0) + \mathrm{A}''(y - y_0) + \mathrm{A}'''(x - x_0)^2 \\ &\quad + \mathrm{A}^{\mathrm{IV}}(x - x_0)(y - y_0) + \mathrm{A}^{\mathrm{V}}(y - y_0)^2 + \ldots \end{aligned}$$

S'il est possible de déterminer les coefficients A, A′, A″, ... de telle façon qu'en y substituant à la place de $y - y_0$ le développement (a), (A) coïncide avec (b), qu'en y substituant aussi (a') au lieu de $y - y_0$, (A) coïncide avec (b'), et de même pour chaque couple (a) (b), ...; si ces diverses conditions peuvent être satisfaites, alors on dira que *la fonction u présente au point (x_0, y_0) le caractère d'une fonction entière de x et de y.*

En un point arbitraire de la courbe, lieu du point (x, y), ce fait a lieu. Il cesse d'avoir lieu généralement en des points spéciaux, notamment si les exposants α, β, α', β', ..., qui sont toujours commensurables, cessent d'être entiers.

Cette définition entendue, nous pouvons énoncer le théorème sous cette forme :

Soient u et y deux fonctions algébriques de la variable x. Si, en tous les points (x, y), u possède le caractère d'une fonction entière de x, y, alors u est effectivement un polynome entier en x et y.

Je n'en rapporte pas ici la démonstration.

9. Soient, comme précédemment, $\varphi(x, y) = 0$ la projection d'une courbe gauche sans point singulier, et z l'ordonnée du point dont

cette courbe est le lieu. Il est immédiatement visible que z a le caractère d'une fonction entière en tous les points de la courbe φ, sauf en ses points doubles. La proposition du n° 7, que nous devons prouver, consiste en ceci : *il suffit de multiplier z par un polynome s'évanouissant en chacun des points doubles de φ, pour faire acquérir au produit le caractère d'une fonction entière de x, y.* Effectivement, soit alors χ_1 ce polynome, le produit $\chi_1 z$ aura, en tous les points (x, y), le caractère d'une fonction entière; ce sera donc, d'après la proposition de M. Nöther, un polynome entier en x, y. Soit ψ_1 ce polynome; on aura $\chi_1 z = \psi_1$, ce qui prouvera la proposition.

Soient donc x_0, y_0 les coordonnées d'un point double de φ, projection de *deux* points de la courbe gauche. Les branches de la courbe, qui se croisent en ce point double, sont représentées par deux développements :

$$(a) \qquad y - y_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots,$$
$$(a') \qquad y - y_0 = a'_1(x - x_0) + a'_2(x - x_0)^2 + \ldots.$$

Les deux coefficients a_1 et a'_1 sont essentiellement inégaux si, comme on l'a supposé, le point s est arbitrairement choisi dans l'espace. Effectivement, l'hypothèse $a_1 = a'_1$ exprimerait que les tangentes de la courbe gauche, aux deux extrémités de la corde, sont dans un même plan. Les cordes qui donnent lieu à cette propriété forment une surface sur laquelle le point arbitraire s peut n'être pas placé.

A chacun des développements (a) et (a') correspond un développement analogue pour le produit $\chi_1 z$, dès que χ_1 s'évanouit au point (x_0, y_0). Soient donc

$$(b) \qquad \chi_1 z = b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots,$$
$$(b') \qquad \chi_1 z = b'_1(x - x_0) + b'_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

ces deux développements, (b) correspondant à (a), (b') à (a').

Prenons maintenant deux développements suivant les puissances de $(x - x_0)$ seulement, et à coefficients indéterminés

$$P = p_1(x - x_0) + p_2(x - x_0)^2 + \ldots,$$
$$Q = q_0 + q_1(x - x_0) + q_2(x - x_0)^2 + \ldots.$$

Je vais prouver qu'on peut choisir P et Q de telle sorte que l'on

ait identiquement

$$P + (y - y_0) Q = \chi_1 z, \tag{9}$$

quand on substitue aux deux membres, pour $y - y_0$ et $\chi_1 z$, l'un quelconque des deux couples de développements (a), (b) ou (a'), (b').

Rien, en effet, n'est plus aisé. On devra, à cet effet, déterminer les coefficients p, q par les équations successives

$$\begin{array}{ll} p_1 + q_0 a_1 = b_1, & p_1 + q_0 a'_1 = b'_1, \\ p_2 + q_1 a_1 = b_2 - q_0 a_2, & p_2 + q_1 a'_1 = b'_2 - q_0 a'_2, \\ p_3 + q_2 a_1 = b_3 - q_0 a_3 - q_1 a_2, & p_3 + q_2 a'_1 = b'_3 - q_0 a'_3 - q_1 a'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

ce qui ne souffre aucun obstacle, puisque a_1 et a'_1 sont essentiellement inégaux. L'équation (9) a donc lieu effectivement. J'ai donné ici cette forme particulière au développement (A) du n° 8 :

$$(A) = P + (y - y_0) Q,$$

parce qu'elle suffisait à la démonstration.

Il est donc prouvé que le produit $\chi_1 z$ a le caractère d'une fonction entière en chacun des points doubles de φ, si χ_1 s'évanouit en chacun de ces points. C'est ce qu'il fallait démontrer.

10. L'équation $\chi_1 = 0$ peut être envisagée comme représentant un cône ayant le sommet s $(x = y = 0,\ z = \infty)$. La proposition actuelle peut, dès lors, être énoncée ainsi :

Soit un cône quelconque, de sommet s, contenant les cordes d'une courbe gauche, issues du point s. A ce cône correspond une surface monoïde passant par la courbe : cette surface contient les arêtes du cône qui aboutissent aux divers points d'intersection de ce cône avec la courbe. Le degré de la surface monoïde surpasse d'une unité celui du cône.

Cette partie de l'énoncé : *la surface contient les arêtes du cône*, etc., résulte de ce que, z étant représenté par $\frac{\psi}{\chi}$, et n'étant infini qu'avec x, y (suivant la supposition que le sommet s est quelconque), le polynome χ ne peut être nul sans que ψ le soit en même temps.

Parmi tous les cônes de sommet arbitraire s, contenant ainsi toutes

les cordes issues de s, il en est qui sont de degré *minimum*. *Ce degré minimum, que je désignerai par la lettre n, est un élément important de la classification des courbes gauches.* Le nombre $(n+1)$ est le degré minimum des surfaces monoïdes, de sommet arbitraire, et contenant la courbe.

Le problème de la représentation d'une courbe gauche de degré d, avec h points doubles apparents, se trouve maintenant ramené à celui-ci :

Trouver trois courbes planes, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$, *la première du degré d, avec h points doubles, les deux autres de degré* $(\nu+1)$ *et* ν (ν étant quelconque), *de telle sorte que la dernière χ passe par tous les points doubles de φ, et que la seconde ψ passe par tous les points communs aux deux autres.*

11. Sans changer la courbe gauche, on peut, comme je viens de le montrer, prendre arbitrairement le dénominateur χ parmi les polynomes qui s'évanouissent en tous les points doubles de φ. L'idée toute naturelle est alors de choisir, pour ce polynome, l'une des dérivées partielles de φ. Ce n'est pas à ce choix que je m'arrêterai. Mais il n'est pas sans intérêt d'envisager un instant les circonstances qui s'offrent ainsi.

Au lieu de x, y, mettons dans φ trois coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3. On pourra trouver trois polynomes ψ_1, ψ_2, ψ_3, de degré d, propres aux trois représentations suivantes de la même courbe :

$$(10) \qquad \varphi = 0, \qquad z = \frac{\psi_1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}} = \frac{\psi_2}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}} = \frac{\psi_3}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3}} \qquad (\text{div. } \varphi).$$

Ayant, d'ailleurs,

$$x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = 0 \qquad (\text{div. } \varphi),$$

j'en peux conclure

$$x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3 = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)\varphi.$$

Il est permis, d'ailleurs, d'altérer les numérateurs de multiples de φ, et d'écrire ψ_1, ψ_2, ψ_3 au lieu de $\psi_1 - a_1\varphi$, $\psi_2 - a_2\varphi$, $\psi_3 - a_3\varphi$. Par suite,

$$x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3 = 0.$$

Désignant par θ_1, θ_2, θ_3 trois polynomes de degré $(d-1)$, j'aurai ainsi ces expressions :

(11) $\psi_1 = x_3\theta_2 - x_2\theta_3, \qquad \psi_2 = x_1\theta_3 - x_3\theta_1, \qquad \psi_3 = x_2\theta_1 - x_1\theta_2.$

Substituant ces expressions dans l'une quelconque des équivalences (10), je conclus :

$$\theta_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \theta_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \theta_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \equiv 0 \qquad (\text{div. } \varphi).$$

Cette équivalence peut s'écrire, sous forme d'égalité, moyennant un polynome λ,

$$\theta_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \theta_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \theta_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = \lambda\left(x_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right).$$

Sans changer les polynomes ψ, on peut remplacer $\theta_1 - \lambda x_1$, $\theta_2 - \lambda x_2$, $\theta_3 - \lambda x_3$ par θ_1, θ_2, θ_3, et écrire enfin

(12) $$\theta_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \theta_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \theta_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = 0.$$

Ainsi, *pour que la courbe plane* φ, *du degré* d, *soit la perspective d'une courbe gauche de ce degré* d, *sans points singuliers, il faut et il suffit qu'il existe trois polynomes entiers* θ_1, θ_2, θ_3, *de degré* $(d-1)$, *satisfaisant à l'identité* (12). *Ces polynomes doivent être différents des suivants, qui satisfont à l'identité* (12) :

$$\mathfrak{I}_1 = b_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} - b_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \qquad \mathfrak{I}_2 = b_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - b_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \qquad \mathfrak{I}_3 = b_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - b_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1},$$

lesquels donneraient

$$\psi_1 \equiv (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \qquad (\text{div. } \varphi),$$

et fourniraient la représentation de la courbe plane

$$\varphi = 0, \qquad z = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3.$$

J'ai dit : il faut et il *suffit*. En effet, les polynomes θ, différents de $\mathfrak{I}$, satisfaisant à l'équation (12), étant supposés exister, on montre aisément que le polynome ψ_1 s'évanouit en chacun des points pour lesquels on a à la fois $\varphi = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = 0$; ce qui suffit à la démonstration.

12. La relation (12) est traduite géométriquement par ce fait que la courbe $\theta_1 = 0$ passe en les points communs à celles-ci : $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = 0$, sauf les points de φ. De là cet énoncé :

Pour qu'une courbe plane φ, du degré d, soit la perspective d'une courbe gauche, de ce même degré d, sans point singulier, la condition nécessaire et suffisante est la suivante : considérons, par rapport à cette courbe φ, les polaires, de degré $(d-1)$, de deux points arbitraires. Ces polaires se coupent aux points doubles de φ et en d'autres points. Ces derniers points doivent être situés sur une courbe de degré $(d-1)$, qui ne passe pas par les points doubles.

De là, tirons quelques conséquences. Soit toujours h le nombre des points doubles. Les points de rencontre des deux polaires sont au nombre de $(d-1)^2 - h$. On pourra toujours trouver θ, si ce nombre est égal ou inférieur à $\frac{(d-1)(d+2)}{2} - 2$. De là, pour h, cette condition :

$$h \geq \frac{(d-2)(d-3)}{2} + 1. \tag{13}$$

Ainsi *toute courbe plane, du degré d, dont le nombre des points doubles n'est pas inférieur à la limite* (13), *est la perspective d'une courbe gauche de degré d, sans point singulier.*

Dans le cas opposé, θ ne pourra être trouvé que si le groupe de points envisagé jouit de propriétés spéciales. D'ailleurs, ces propriétés appartiendront aussi à tout couple de deux polaires, comme le montre la relation (12); ce sont donc des propriétés de la courbe φ elle-même. Par conséquent, *une courbe plane, de degré d, dont le nombre des poins doubles est inférieur à la limite* (13), *n'est pas, en général, la perspective d'une courbe gauche de degré d, sans point singulier.*

Soit, pour prendre un exemple numérique, $d = 4$, $h = 1$, d'où résulte $(d-1)^2 - h = 8$. Toutes les courbes du troisième degré qui ont huit points communs forment un faisceau. La courbe θ, qui doit avoir huit points communs avec deux polaires, du troisième degré, sans appartenir au faisceau qu'elles déterminent, ne peut exister. Donc il ne peut exister de courbe gauche du quatrième degré, sans point singulier, avec un seul point double apparent.

On ne manquera pas d'observer que la limite (13) coïncide avec celle que j'ai déjà signalée plus haut (p. 274). Elle partage les diverses familles de courbes du même degré en deux groupes bien distincts : le *premier groupe* comprend les courbes pour lesquelles l'inégalité (13) a lieu ; le *second groupe* comprend toutes les autres, la très grande majorité.

En définissant le premier groupe par les fonctions abéliennes, j'ai montré (p. 274) que chaque courbe de degré d, appartenant à ce groupe, comporte $4d$ arbitraires. Ce résultat se retrouve avec la nouvelle définition. Car, d'après les conditions qui lui sont imposées, le polynome ψ_1 admet des arbitraires au nombre

$$\frac{d(d+1)}{2} - (d-1)^2 + h + 1,$$

tandis que la courbe φ en admet

$$\frac{d(d+3)}{2} - h.$$

Le total fait bien $4d$.

13. Pour la facilité du langage, j'emploierai, à l'occasion, une expression abrégée dont je dois prévenir le lecteur. Quand trois polynomes u, v, w, à deux variables, vérifieront une relation de cette forme

$$w = au + bv,$$

a et b étant aussi des polynomes entiers, je dirai w *est de la forme* (u, v).

Le théorème de M. Nöther, rappelé plus haut, donne, en tous les cas, les conditions pour que w ait cette forme. Effectivement, cette forme a lieu quand $\frac{w}{u}$ a le caractère d'une fonction entière en tous les points de la courbe $v = 0$.

Quand tous les points communs aux courbes u, v constituent des intersections simples, la condition se réduit à ce que w passe en chacun de ces points.

Il est un autre cas qui se présentera souvent, c'est celui où les intersections des courbes u, v sont les unes simples, les autres doubles. La condition, à l'égard de ces dernières, consiste en ce que, dans les mêmes points, les courbes w et u, w et v aient aussi des intersections doubles.

14. Je continue l'examen des propriétés de la représentation des courbes par les monoïdes. Dorénavant, j'emploierai les lettres u_1, u_0 au lieu de ψ, χ; la courbe sera toujours représentée par $\varphi = 0$, $z = \frac{u_1}{u_0}$.

J'emploierai la lettre ν pour désigner le degré de u_0; celui de u_1 est alors $(\nu + 1)$. Le minimum de ν sera désigné par n (10).

Comme on l'a vu (9), aucune restriction n'est apportée à la généralité par l'hypothèse que la courbe $u_0 = 0$ passe simplement en chaque point double de φ. La courbe $u_1 = 0$ passe en chaque point commun aux deux courbes u_0, φ.

Les h points doubles de φ appartiennent à u_0; donc, nécessairement,

$$h \leq \frac{\nu d}{2}.$$

Les autres points communs à u_0 et φ sont au nombre $(\nu d - 2h)$. On a donc, sur φ, $(\nu d - h)$ points communs à u_0 et u_1. Comme ces deux polynomes peuvent être supposés sans facteur commun, il en résulte

$$\nu d - h \leq \nu(\nu + 1).$$

De ces deux inégalités, il résulte

$$\frac{\nu d}{2} \geq h \geq \nu(d - \nu - 1),$$

$$\nu \geq \frac{1}{2} d - 1.$$

Voilà donc une limite inférieure du nombre ν, et, par suite, du minimum n :

Le nombre n (p. 284) *ne peut jamais être inférieur à la moitié du degré de la courbe, diminuée d'une unité.* Ce résultat a déjà son importance. Le polynome u_0 de degré ν, étant seulement astreint à s'évanouir en chacun des h points doubles, et, d'autre part, son degré étant ainsi limité, on peut en conclure une limite inférieure du nombre h. Je ne m'arrête pas sur ce sujet; car la limite que l'on trouverait ainsi pour h ne serait qu'une approximation. La véritable limite va être trouvée dans un instant. Il suffit d'observer, pour le moment, que, n étant le minimum de ν, on aura nécessairement

$$h \geq \frac{n(n + 1)}{2}. \tag{14}$$

Cette limite est, on le pressent bien, en général, trop élevée, sauf pour les courbes du *premier groupe*, puisque pour les autres courbes les points doubles doivent posséder des propriétés spéciales.

On a facilement une limite supérieure de n. Déjà, en prenant une dérivée partielle de φ pour u_0, nous avons reconnu que n ne surpasse pas $(d-1)$. Mais n n'atteint jamais cette limite, puisque le maximum de h est $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Pour toute autre valeur de h, on a $n \leqq d-3$; pour

$$h = \frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

n atteint la valeur $(d-2)$.

Les points communs à u_1 et u_0, qui ne sont pas sur φ, et que j'appelle les points (c), sont au nombre

$$c = n(n+1) - nd + h,$$

en supposant u_0 du degré minimum n. Par les points (c), je mène une courbe $f=0$ du degré μ. Alors le produit $f\varphi$ est *de la forme* (u_1, u_0) (13, p. 287); j'exprime cette propriété par l'identité suivante :

$$v_0 u_1 - v_1 u_0 = f\varphi.$$

Le polynome v_0 est du degré $(d+\mu-n-1)$, et le système (v_1, v_0) équivaut au système (u_1, u_0) pour la représentation de la courbe gauche. Puisque n est minimum, j'ai

$$n \leqq d + \mu - n - 1,$$

d'où

$$(15) \qquad \mu \geqq 2n + 1 - d.$$

Prenons, pour μ, le plus petit nombre possible. Le polynome f, du degré μ, étant simplement assujetti à être nul en c points, je dois avoir

$$c \geqq \frac{\mu(\mu+1)}{2}.$$

A cause de la valeur de c et de l'inégalité (15), je conclus

$$n(n+1) - d + h \geqq \frac{(2n+1-d)(2n+2-d)}{2},$$

inégalité que j'écris ainsi

$$(16) \qquad h \geqq \frac{d(d-1)}{2} - (n+1)(d-n-1),$$

ou encore

$$h \geqq \frac{(d-n-1)(d-n-2)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Cette limite de h est supérieure à celle que fournissait la relation (14), sauf pour $n = d-2$, où les deux limites coïncident. La limite (16) est, comme on le verra au chapitre II, une limite définitive pour une classe de courbes, celles qui sont situées sur les surfaces du deuxième degré. Son minimum absolu s'obtient pour $n = \frac{1}{2}d - 1$, ou mieux, comme n est entier, pour $n = \frac{1}{2}d - 1$ ou $n = \frac{1}{2}(d-1)$, suivant la parité de d. Pour ces deux cas, on a cette expression unique

$$h \geqq \left[\left(\frac{d-1}{2}\right)^2\right].$$

Le nombre des points doubles d'une courbe gauche du degré d, sans point singulier, a pour limite inférieure l'entier contenu dans $\left(\frac{d-1}{2}\right)^2$.

Comme on le verra au début du chapitre II, il y a toujours une famille de courbes répondant effectivement à cette limite.

15. Dans la formule (16), faisons $n = d-3$. Le résultat est

$$h \leqq \frac{(d-2)(d-3)}{2} + 1.$$

C'est encore la même limite déjà trouvée deux fois (p. 274 et 286), et qui sépare les courbes du premier et du second groupe. Ainsi, *pour toutes les courbes du second groupe, le nombre n est moindre que* $(d-3)$.

Cette circonstance nous permet de préciser, pour une des familles du second groupe, celle qui répond à la plus grande valeur de h, les propriétés spéciales de la courbe φ (p. 286). Cette courbe plane a $\frac{(d-2)(d-3)}{2}$ points doubles. Par des points, en pareil nombre, on ne peut faire passer généralement une courbe du degré $(d-4)$. Pour que cela soit possible, les points doivent satisfaire à *une* condition. C'est donc ici le cas, et l'on complète aisément cette remarque de façon à pouvoir conclure ainsi :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe du degré d, ayant $\frac{(d-2)(d-3)}{2}$ points doubles, soit la perspective d'une courbe gauche de ce même degré d, sans point singulier, consiste en ce que les points doubles soient situés sur une courbe du degré $(d-4)$.

On reconnaît aisément que les courbes de cette famille admettent, elles aussi, $4d$ arbitraires.

16. Revenons à une courbe gauche quelconque $\varphi = 0$, $z = \frac{u_1}{u_0}$. Suivant la proposition du n° 7 (p. 280), déjà appliquée plusieurs fois, nous pouvons prendre pour dénominateur de z tout polynome, autre que u_0, astreint à cette seule condition de s'évanouir en chacun des points doubles de φ. Or u_1 est un tel polynome; prenant u_1 pour dénominateur, j'aurai un numérateur u_2, qui donne lieu à la relation

$$u_1^2 \equiv u_0 u_2 \qquad (\text{div. } \varphi).$$

Prenant u_2 pour dénominateur, j'aurai un numérateur u_3, et ainsi de suite. Je forme ainsi une série indéfinie de polynomes u_0, u_1, u_2, u_3, ... Si ν est le degré du u_0, le degré de u_m sera $(\nu + m)$. Ces polynomes donnent les équivalences suivantes :

$$z \equiv \frac{u_1}{u_0} \equiv \frac{u_2}{u_1} \equiv \frac{u_3}{u_2} \equiv \ldots \equiv \frac{u_m}{u_{m-1}} \qquad (\text{div. } \varphi),$$

d'où l'on conclura celles-ci :

(17) $$u_m u_0^{m-1} \equiv u_1^m, \qquad \frac{u_m}{u_0} \equiv z^m \qquad (\text{div. } \varphi).$$

Ces polynomes sont propres à la recherche des surfaces qui passent par la courbe gauche. Désignons, en effet, par P_0, P_1, ..., P_m des polynomes entiers en x, y, et soit

$$P = P_0 z^m + P_1 z^{m-1} + P_2 z^{m-2} + \ldots + P_{m-1} z + P_m = 0$$

l'équation d'une surface passant par la courbe. On voit, d'après (17), que *la condition pour que la surface* P *contienne la courbe s'exprime par l'équivalence*

(18) $$P_0 u_m + P_1 u_{m-1} + P_2 u_{m-2} + \ldots + P_{m-1} u_1 + P_m u_0 \equiv 0 \qquad (\text{div. } \varphi).$$

C'est par l'intermédiaire de cette proposition qu'un lien s'établit entre la représentation des courbes par les monoïdes et leur définition par l'intersection des surfaces. Pour le moment, je vais en faire usage en cherchant le nombre N_m dont il a déjà été question (p. 270 et 275), et qui exprime le nombre des conditions que vaut, pour une surface du degré m, la condition de passer par une courbe. Mais, auparavant, quelques explications préalables, concernant la *théorie des groupes de points*, sont nécessaires.

17. Quand on astreint une courbe plane à passer par a points donnés arbitrairement, on impose ainsi à la courbe a conditions distinctes. Mais, si les points ne sont pas arbitraires, s'ils proviennent notamment de l'intersection de deux courbes, il arrive fréquemment que les conditions ne soient pas toutes distinctes. C'est là un fait fort connu.

Soit un groupe de a points. S'il arrive que la condition de passer par tous ces points impose à une courbe de degré m des conditions, en nombre $(a - \alpha)$ moindre que a, je dirai que ces points *ne sont pas indépendants pour le degré m*. Le nombre α des conditions superflues dépend de m. C'est une *fonction discontinue* de m, constamment nulle pour toutes les valeurs entières de m, qui dépassent une certaine limite. Cette limite dépend d'ailleurs de la constitution du groupe.

Une telle propriété est bien connue dans le cas où le groupe se compose de tous les points d'intersection de deux courbes. Si μ, μ' sont les degrés de ces courbes, le nombre α, que je désignerai par $F(m)$, a les valeurs suivantes :

$$F(m) = \frac{(\mu + \mu' - m - 1)(\mu + \mu' - m - 2)}{2} \quad \text{si} \quad \mu + \mu' - m - 2 > 0,$$
$$F(m) = 0 \quad \text{si} \quad \mu + \mu' - m - 2 \leqq 0.$$

Ainsi les points dont il s'agit sont *indépendants* pour les degrés qui surpassent $(\mu + \mu' - 3)$.

Soit maintenant un groupe quelconque de a points. Menons, par ces points, deux courbes arbitraires, des moindres degrés possible, par exemple. Soit b le nombre des points en lesquels ces courbes se coupent en outre; et désignons par μ, μ' les degrés des deux courbes. Les $(a + b)$ points sont indépendants pour les degrés qui surpassent

$(\mu + \mu' - 3)$. Il en est donc de même des a premiers points ; car les b autres points ne peuvent imposer plus de b conditions. Il est donc prouvé que *les points d'un groupe quelconque sont indépendants pour les degrés qui surpassent une certaine limite.*

Supposons un polynome entier $f(x, y)$ du degré m, dont les coefficients dépendent de certaines inconnues qu'on veuille déterminer de manière à rendre $f(x, y)$ identiquement nul, c'est-à-dire quels que soient x, y. Pour y parvenir, il faut égaler à zéro séparément chacun des

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

coefficients de f. Il revient au même d'écrire que $f(x, y)$ est nul en $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ points arbitraires, ou encore en des points non plus arbitraires, en pareil nombre, pourvu que ces points soient indépendants pour le degré m.

Si, en vertu de la manière particulière dont est formé $f(x, y)$, on sait déjà que ce polynome s'évanouit en a points connus, indépendants pour le degré m, il suffit alors, pour rendre f identiquement nul, de poser des conditions en nombre $\frac{(m+1)(m+2)}{2} - a$. Si, au contraire, ces a points ne sont pas indépendants pour le degré m, soit, comme tout à l'heure, $F(m)$ le nombre des points superflus. Il faudra, pour faire évanouir identiquement f, poser des conditions dont le nombre A sera

$$(19) \qquad A = \frac{(m+1)(m+2)}{2} - a + F(m).$$

Ce résultat peut d'ailleurs être adopté pour tous les cas, au moyen de la fonction discontinue $F(m)$, qui est nulle pour les valeurs de m dépassant une certaine limite.

18. Revenons maintenant à la recherche qui nous occupe et à la relation (18). Considérons le polynome

$$f(x, y) = P_0 u_m + P_1 u_{m-1} + \ldots + P_{m-1} u_1 + P_m u_0 + G\varphi,$$

où G est un polynome entier en x, y, comme $P_0, P_1, \ldots$. Je suppose la surface P du degré m, en sorte que P_k est du degré k, marqué par son indice. Soient toujours d, ν les degrés de φ et u_0. Le degré de u_m est $(\nu + m)$, en sorte que G a le degré $(\nu + m - d)$ quand ce dernier

nombre est positif ou nul; G n'existe pas si ce nombre est négatif. Pour n'avoir qu'une seule formule, prenons une autre fonction discontinue $\mathfrak{F}$, en posant

$$\mathfrak{F}(\omega) = 1 \quad \text{pour} \quad \omega < 0,$$
$$\mathfrak{F}(\omega) = 0 \quad \text{pour} \quad \omega \geqq 0.$$

Le nombre B des coefficients arbitraires du polynome G est ainsi

$$B = \frac{(\nu + m - d + 1)(\nu + m - d + 2)}{2}[1 - \mathfrak{F}(\nu + m - d)].$$

Tous les polynomes u_k s'évanouissent en chacun des points, situés sur φ, où s'évanouit u_0. Ces points sont au nombre $(\nu d - h)$. Envisageons ce groupe de points : désignons par F la fonction définie au n° 17, et relative à ce groupe; appliquons la formule (19), et nous reconnaissons que, pour rendre $f(x, y)$ identiquement nul, il faut poser des conditions en nombre A,

$$A = \frac{(\nu + m + 1)(\nu + m + 2)}{2} - (\nu d - h) + F(\nu + m).$$

Le polynome $f(x, y)$ ne contient pas seulement les arbitraires de la surface P, mais encore celles qui proviennent du polynome G, et dont le nombre est B. Le nombre des conditions, imposées à la surface, est donc $(A - B)$. Toutes réductions faites, et à cause de $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - h = p$, la formule $N_m = A - B$ devient

$$(20) \qquad N_m = md + 1 - p + F(\nu + m) + \frac{(\nu + m - d + 1)(\nu + m - d + 2)}{2}\mathfrak{F}(\nu + m - d).$$

Telle est la formule qui résout la question, mais en y laissant subsister un élément $F(\nu + m)$ dont la valeur numérique est bien difficile à prévoir. On peut cependant tirer de la formule (20) des résultats simples pour des cas spéciaux.

Par les points composant le groupe passent les courbes $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, dont les degrés sont ν, $\nu + 1$. Donc (17), $F(\nu + m)$ sera nul quand $\nu + m$ dépassera $2\nu - 2$; dans les autres cas, on aura une limite de F. Ainsi :

$$F(\nu + m) = 0 \qquad \text{pour} \qquad m > \nu - 2,$$
$$F(\nu + m) \leqq \frac{(\nu - m)(\nu - m - 1)}{2} \qquad \text{pour} \qquad m \leqq \nu - 2.$$

D'autre part, le nombre $\mathfrak{F}(\nu + m - d)$ est zéro dès que m atteint $(d - \nu)$ ou le dépasse. Donc, tenant compte de ce que $(\nu - 2)$ n'est jamais inférieur à $(d - \nu)$ (p. 288), j'ai ce résultat où je mets, au lieu de ν, son minimum n :

Pour les surfaces dont le degré m surpasse une certaine limite qui est au plus $(n - 2)$, *la formule* $N_m = md + 1 - p$ *s'applique toujours.*

C'est cette formule même que nous avons déjà trouvée (p. 275) comme s'appliquant, quel que soit m, pour les courbes du premier groupe. Un tel résultat se retrouverait aisément ici, et l'on pourrait même, d'après le n° 15, montrer qu'il s'étend encore au cas

$$h = \frac{(d-2)(d-3)}{2}.$$

19. Par une autre voie, nous allons retrouver la formule (20), non plus avec ce caractère de précision que lui confèrent ses deux termes complémentaires, mais avec un caractère très différent, d'après lequel on reconnaît *a priori*, dans beaucoup de cas, que ces termes complémentaires sont nuls.

C'est un théorème remarquable dû à M. Eduard Weyr [1], s'appliquant à toutes les courbes, même douées de points singuliers, qui va me servir. Voici l'énoncé du théorème, avec la démonstration de son auteur, modifiée à peine dans la forme :

Soit une courbe gauche du genre p, et un faisceau de surfaces dont chacune rencontre la courbe en quelques points fixes et en λ *points qui changent avec la surface du faisceau. Si l'on peut disposer des points fixes, de manière que les* λ *autres points de rencontre de la courbe et d'une des surfaces soient des points arbitrairement choisis sur la courbe, alors on a nécessairement* $p < \lambda$.

Considérons une intégrale abélienne de première espèce, attachée à la courbe gauche. Cette intégrale a la forme $\int f(x, y, z)\, dx$, où f est

---

[1] *Ueber algebraischen Raumcurven, inaugural Dissertation zur Erlangung der philosophischen Doctorwürde an der Universität Göttingen*, par Eduard Weyr. Prag, 1873.

rationnelle. Désignant par a le point (x, y, z), mettons, pour abréger l'écriture, $f(a)$ au lieu de $f(x, y, z)$.

Envisageons toutes les intégrales de première espèce, linéairement distinctes entre elles. Leur nombre est p. Chacune d'elles sera caractérisée par une fonction telle que f, et j'emploie à cet effet les symboles

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_p.$$

Ayant, parmi les intersections d'une surface mobile avec la courbe, des points mobiles dont le nombre est λ, le *théorème d'Abel* me fournit les relations suivantes, dans lesquelles les points mobiles sont $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$:

$$\begin{gathered}
f_1(a_1)\,dx_1 + f_1(a_2)\,dx_2 + \ldots + f_1(a_\lambda)\,dx_\lambda = 0, \\
f_2(a_1)\,dx_1 + f_2(a_2)\,dx_2 + \ldots + f_2(a_\lambda)\,dx_\lambda = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
f_p(a_1)\,dx_1 + f_p(a_2)\,dx_2 + \ldots + f_p(a_\lambda)\,dx_\lambda = 0.
\end{gathered}$$

Si l'on supposait $\lambda \leqq p$, on aurait là des équations homogènes entre les différentielles $dx_1, \ldots, dx_\lambda$, qui entraîneraient des relations entre les coefficients. Or, par hypothèse, un groupe $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$ peut être choisi à volonté. Donc ces relations ne peuvent exister. Donc nécessairement $\lambda > p$. Q. E. D.

20. M. Eduard Weyr a très habilement appliqué ce théorème à des cas particuliers. Je vais ici généraliser l'emploi de ses procédés.

Soit une courbe gauche du degré d, du genre p. Je considère des surfaces du degré m, limité inférieurement par les conditions

$$(21) \qquad \left\{\begin{aligned} &\psi(m) \geqq \frac{md+3}{2}, \\ &\psi(m) \geqq md + 2 - p; \end{aligned}\right.$$

$\psi(m)$ est toujours, comme précédemment, $\dfrac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}$.

Je prends, sur la courbe, des points a en nombre

$$a = \psi(m) - 1 - \sigma;$$

la lettre σ désigne ici un nombre positif que je choisirai tout à l'heure. Pour le moment, je l'astreins seulement aux conditions suivantes :

$$(22) \qquad \sigma \geqq 0, \qquad \psi(m) - 1 - p \leqq \sigma \leqq 2\psi(m) - md - 3.$$

D'après la condition $\sigma \geqq 0$, on peut mener par les points (a) une surface A, du degré m. Cette surface coupe, en outre, la courbe, dans des points (b), dont le nombre est

$$b = md - a = md - \psi(m) + 1 + \sigma.$$

D'après la dernière inégalité (22), on a $b \leqq \psi(m) - 2$. Par les points (b) on peut donc mener un faisceau de surfaces B du degré m. On peut encore assujettir les surfaces de ce faisceau à avoir des pivots communs, au nombre de $\psi(m) - 2 - b$. Le nombre c de ces pivots est ainsi

$$c = 2\psi(m) - md - 3 - \sigma.$$

Nous pouvons prendre ces pivots sur la première surface A, qui, dès lors, fait partie du faisceau (B).

Nous avons donc là un faisceau de surfaces coupant la courbe en des points fixes dont le nombre est b, et en des points mobiles dont le nombre est a. Par construction, un groupe de points (a) a été choisi *ad libitum*. D'ailleurs, d'après l'une des inégalités (22), ce nombre a est au plus égal à p. C'est donc le cas d'appliquer le théorème de M. Eduard Weyr, et de conclure que les points, en nombre a, où chaque surface B coupe la courbe en outre des points fixes (b), ne peuvent être des points mobiles.

Par suite, chaque surface B coupe la courbe en des points dont la totalité est fixe. Que l'on prenne, dans le faisceau (B), une surface B_1 passant par un point quelconque de la courbe, cette surface contiendra nécessairement la courbe tout entière. Or ceci peut être supposé se présenter de deux manières : ou bien B_1 diffère de A, ou bien B_1 coïncide avec A.

Dans le premier cas, nous avons cette conclusion : par la courbe passe une surface du degré m, admettant encore, *au moins*, des arbitraires en nombre c.

Dans le second cas : toute surface passant par a points, pris à volonté sur la courbe, contient cette courbe. Si c'est ce cas qui a lieu, on voit que le nombre des conditions N_m est, au plus, a.

Dans le premier cas, au contraire, nous aurons $N_m \leqq \psi(m) - 1 - c$; mettant pour a et c leurs expressions, j'ai donc l'une ou l'autre de ces conclusions

$$(23) \qquad N_m \leqq \begin{cases} md + 2 + \sigma - \psi(m), \\ \psi(m) - 1 - \sigma. \end{cases}$$

Nous ignorons lequel des deux cas a lieu, et devons, en conséquence, retenir seulement la plus grande des deux limites, en choisissant, d'ailleurs, le nombre σ de la manière la plus favorable, eu égard aux conditions (22) qui lui sont imposées.

D'après la première inégalité (21), le nombre $\psi(m) - 1$ est supérieur au nombre $md + 2 - \psi(m)$. La plus favorable des valeurs que l'on puisse prendre pour σ est donc le plus grand nombre possible qui ne soit pas supérieur à la demi-différence des deux précédents. Ainsi l'on doit prendre pour σ le plus grand entier qui donne

$$\sigma \leqq \frac{1}{2} \{ \psi(m) - 1 - [md + 2 - \psi(m)] \},$$

$$(24) \qquad \sigma \leqq \psi(m) - \frac{md + 3}{2},$$

sauf le cas d'incompatibilité avec les inégalités (22). De là deux cas à distinguer :

Premier cas, $p \geqq \frac{md+1}{2}$. Prenant alors σ égal à l'entier immédiatement inférieur à $\psi(m) - \frac{md+3}{2}$, j'aurai

$$\sigma = \psi(m) - \frac{md + 3}{2} - \frac{\varepsilon}{2}; \qquad \varepsilon = 0 \text{ ou } 1 \text{ suivant la parité de } md.$$

La dernière inégalité (22) sera satisfaite. Quant à l'avant-dernière inégalité (22), elle devient $p \geqq \frac{md+1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$; ce qui est justement l'hypothèse.

La valeur adoptée pour σ nous donne

$$N_m \leqq \frac{md+2}{2} \qquad \text{si } md \text{ est pair,}$$

et

$$N_m \leqq \frac{md+1}{2} \qquad \text{si } md \text{ est impair.}$$

Deuxième cas, $p < \frac{md+1}{2}$. L'analyse précédente montre qu'il faudra prendre pour σ la limite inférieure (22), ce qui donne

$$\sigma = \psi(m) - 1 - p,$$
$$N_m \leqq md + 2 - \psi(m) + [\psi(m) - 1 - p] = md + 1 - p.$$

Voici donc nos conclusions :

Pour une courbe du degré d, du genre p, et une surface du degré m, sous les conditions

$$\psi(m) \geqq \frac{md+3}{2}, \qquad \psi(m) \geqq md+2-p,$$

on a :

1° *Si* $p \geqq \frac{md+1}{2}$,

$$N_m \leqq \frac{md+2}{2} \quad \text{au cas } md \text{ pair,}$$

$$N_m \leqq \frac{md+1}{2} \quad \text{au cas } md \text{ impair;}$$

2° *Si* $p < \frac{md+1}{2}$,

$$N_m \leqq md+1-p.$$

Comparant ce dernier résultat à la formule (20), je conclus, en dernier lieu, non plus une limite inférieure, mais une égalité :

$$N_m = md+1-p.$$

D'ailleurs, $(md+2-p)$ est alors supérieur à $\frac{md+3}{2}$; la première inégalité peut donc être omise. La seconde peut être omise aussi ; car, d'après la valeur de N_m, elle est nécessaire pour qu'il existe une surface du degré m passant par la courbe. Donc :

La formule $N_m = md+1-p$ *s'applique toujours, quand on a*

$$p < \frac{md+1}{2}.$$

21. La propriété essentielle de ces résultats est de fournir, à l'égard du nombre N_m, des renseignements immédiats où ne figurent que les trois nombres d, p, m. C'est donc là un instrument précieux pour la classification. Mais son rôle est nécessairement limité par la condition $\psi(m) \geqq \frac{md+3}{2}$. Pour chaque degré d, il y a une limite inférieure du nombre m, provenant de cette inégalité. Au-dessous de cette limite de m, on ne peut plus rien tirer du théorème de M. Eduard Weyr. Cette limite, cependant, ne croît pas rapidement avec d. Elle reste égale à 2 jusqu'à $d \leqq 8$; égale à 3 jusqu'à $d \leqq 12$; à 4, jusqu'à $d \leqq 16, \ldots$. On voit toutefois que déjà, pour $d \geqq 9$, aucune application n'est possible aux surfaces du second degré. Quelques artifices peuvent encore permettre cependant de conclure à l'existence d'une surface du second

degré passant par la courbe, bien que son degré surpasse 8. On en trouve l'exemple dans le mémoire de M. Weyr (p. 6 et 7). Mais, si l'on pousse plus avant, on voit bientôt ces artifices devenir impuissants ([1]). On va le comprendre immédiatement à l'inspection de la table ci-après, donnant pour chaque degré d la limite inférieure de m d'après l'inégalité $\psi(m) \geqq \frac{md+3}{2}$. Sans même construire cette table, il suffit d'observer que la limite de m est sensiblement voisine de $(-3+\sqrt{3d-2})$. Si l'on fait croître indéfiniment d, et que M soit cette limite, on voit que M^2 a pour expression asymptotique $3d$. Prenant deux surfaces du degré M passant par la courbe, on a une ligne complémentaire dont le degré a pour expression asymptotique $2d$. Il est donc certain qu'en faisant croître d on arrivera bientôt à ne pouvoir tirer de la proposition actuelle qu'une portion très restreinte de la classification : quand M^2 sera supérieur ou égal à $2d$, on ne pourra plus tirer de cette proposition, prise seule, la définition d'aucune courbe.

$d \leqq 8$	12	16	21	27	33	40	48	56	65	75	85	96	108	120	....
$M = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	

D'après ce tableau, on voit que, jusqu'à $d \leqq 95$, le théorème de M. Eduard Weyr pourra être utilement appliqué à définir de nouvelles courbes. Au delà il ne pourra plus, en lui-même, servir à la classification. Mais, comme on le verra au dernier chapitre de ce mémoire, ce théorème, combiné avec d'autres, est de la plus grande utilité.

22. Je terminerai ce chapitre par quelques explications sur un sujet étranger à l'objet même de ce mémoire, mais qui s'y présentera cependant d'une manière incidente : il s'agit des *courbes à points singuliers* et des *courbes impropres* ou *lignes composées*.

On peut manifestement obtenir des courbes gauches à points sin-

---

([1]) Aussi est-ce certainement par erreur que M. Eduard Weyr dit (p. 7 de son mémoire) : *Es ist nun nicht schwer, dieses Raisonnement auf Curven höheren Grades anzuwenden, und man gelangt so zu folgendem Resultat* : *Die Raumcurven* n^{ter} *Ordnung von höchstem Geschlechte liegen nothwendig auf einer Fläche zweiter Ordnung*. Ce résultat, au contraire, ne peut nullement être prouvé par cette voie. On en verra la démonstration dans le présent mémoire.

guliers en supposant, dans la représentation $\varphi = 0$, $z = \frac{u_1}{u_0}$, que la courbe φ ait des points singuliers où ne s'évanouissent pas les polynomes u_0 et u_1. Mais on n'obtient ainsi que des points singuliers très spéciaux; et c'est là un fait sur lequel M. Édouard Weyr a très justement appelé l'attention. Effectivement, la surface monoïde, d'après l'hypothèse, n'a pas ce point pour point singulier, et, par exemple, il est impossible d'y tracer une courbe ayant, en ce point, trois tangentes formant un trièdre.

Par des considérations fondées sur le théorème de M. Nöther, analogues à celles qu'on a vues ici au n° 9, on peut parvenir à la proposition suivante :

Pour la classification des courbes, chaque point singulier est caractérisé par un nombre spécial, son ÉQUIVALENT, *de telle sorte qu'une courbe de degré d, ayant des points singuliers à équivalents σ, σ', ... et h points doubles apparents, est un cas particulier d'une courbe de degré d, sans point singulier et ayant $h + \sigma + \sigma'$, ... points doubles apparents.*

Je ne démontrerai pas ici cette proposition, ce qui m'entraînerait à des longueurs inutiles : effectivement, les courbes à points singuliers dont j'aurai lieu de m'occuper s'offriront d'elles-mêmes comme des cas particuliers de courbes sans points singuliers.

Il faut seulement bien entendre la signification du dernier énoncé, et la nature du nombre σ. Le point singulier, à équivalent σ, exige non seulement que le polynome u_0 s'y évanouisse, mais encore qu'il y satisfasse à des conditions linéaires, équivalentes à celles de passer par σ points. Quant au polynome u_1, il est soumis à des conditions analogues, et de telle façon que les relations des n°s 14, 15 et 16 subsistent toujours.

L'équivalent σ est toujours zéro pour un point double, de quelque nature qu'il soit; généralement, pour un point multiple d'ordre μ, avec μ tangentes distinctes, l'équivalent est

$$\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2};$$

le polynome u_0 est alors astreint à ce que la courbe $u_0 = 0$ ait le point correspondant de φ pour multiple d'ordre $(\mu - 2)$. Mais il se présente

une circonstance très importante quand les μ tangentes ne sont pas distinctes : *l'équivalent peut alors dépasser la limite* $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}$. Par exemple, le point singulier que présente à l'origine des coordonnées la courbe

$$(c)\qquad \begin{cases} x = t^3 + at^4 + \ldots, \\ y = t^7 + bt^8 + \ldots, \\ z = ct^3 + c't^9 + c''t^{10} + c'''t^{11} + c^{\text{IV}}t^{12} + \ldots, \end{cases}$$

bien qu'il soit *triple*, n'a pas l'équivalent 1, mais bien l'équivalent 2. La courbe u_0 doit non seulement passer à l'origine des coordonnées, mais encore y toucher l'axe des x.

L'équivalent σ peut naturellement descendre aussi au-dessous de $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}$, même être nul. C'est ce qui a lieu dans le cas dont j'ai parlé au début de ce numéro. Par exemple, l'équivalent redevient égal à 1 pour la courbe (c) si le coefficient c est nul. Enfin, il est nul si $c = c' = c'' = c''' = 0$.

23. Si les courbes à points singuliers ne font pas exception à la théorie exposée dans ce chapitre, il en est tout autrement des *courbes impropres*. A l'égard de ces dernières, plusieurs des propositions les plus importantes cessent d'avoir lieu. Ce fait provient principalement de ce que les lignes composées sont susceptibles de deux modes de représentation par les monoïdes ; l'un de ces modes est *impropre* ou *dégénéré*.

Soient

$$\varphi = 0, \qquad z = \frac{u_1}{u_0} \qquad \text{et} \qquad \psi = 0, \qquad z = \frac{v_1}{v_0}$$

deux courbes gauches, dont l'ensemble constitue notre ligne composée. Cette ligne pourra être représentée, moyennant deux polynomes arbitraires a, b, par les équations

$$(25)\qquad \varphi\psi = 0, \qquad z = \frac{au_1\psi + bv_1\varphi}{au_0\psi + bv_0\varphi}.$$

De là les cas de dégénérescence $a = 0$ ou $b = 0$, pour lesquels, on le voit, toute notre analyse tombe en défaut. Si donc il arrive que le minimum n se présente pour une représentation impropre, les inégalités (14) et (16) deviennent sans fondement.

En particulier, la limite inférieure $\left[\left(\frac{d-1}{2}\right)^2\right]$, assignée pour le nombre h, est en défaut pour les courbes impropres. En fait, il est facile de trouver des valeurs beaucoup moindres pour le nombre h. Prenons une courbe plane, de degré $(d-1)$, et une ligne droite extérieure au plan de cette courbe. Nous avons ainsi une courbe impropre, de degré d, n'ayant que $(d-1)$ points doubles apparents. Supposons maintenant que la droite rencontre la courbe plane; il n'y a plus que $(d-2)$ points doubles apparents, et un point double effectif. Mais ce dernier a l'équivalent zéro. C'est donc bien une ligne n'ayant que $(d-2)$ points doubles apparents. On pourrait supposer la droite rencontrant la courbe plane en un point multiple de cette dernière, ce qui diminuerait encore le nombre des points doubles apparents effectifs; mais le point singulier n'aurait plus l'équivalent zéro; il devrait, dans cette théorie, compter pour des points doubles apparents. Je n'entre pas dans d'autres détails à ce sujet, et je vais démontrer cette unique proposition : *Le nombre des points doubles apparents d'une courbe impropre, non plane, de degré d, a pour minimum* $(d-2)$.

Il est aisé de généraliser l'expression (25). Soient

$$\varphi = 0, \quad z = \frac{u_1}{u_0}; \qquad \psi = 0, \quad z = \frac{v_1}{v_0}; \qquad \theta = 0, \quad z = \frac{w_1}{w_0}; \quad \ldots$$

les différentes courbes propres qui entrent dans la composition de la ligne composée. Soient d', d'', d''', ... leurs degrés respectifs, et $d = d' + d'' + d''' + \ldots$ le degré de la ligne composée. Cette ligne sera représentée par

$$\varphi\psi\theta\ldots = 0, \qquad z = \frac{a\frac{u_1}{\varphi} + b\frac{v_1}{\psi} + c\frac{w_1}{\theta} + \ldots}{a\frac{u_0}{\varphi} + b\frac{v_0}{\psi} + c\frac{w_0}{\theta} + \ldots} = \frac{U_1}{U_0},$$

$$U_0 = \varphi\psi\theta\ldots\left(a\frac{u_0}{\varphi} + b\frac{v_0}{\psi} + c\frac{w_0}{\theta}\ldots\right),$$

$$U_1 = \varphi\psi\theta\ldots\left(a\frac{u_1}{\varphi} + b\frac{v_1}{\psi} + c\frac{w_1}{\theta}\ldots\right).$$

Les lettres a, b, c, ... désignent des polynomes arbitraires, que nous pouvons réduire à de simples constantes. C'est là une représentation propre.

Les polynomes u_0, v_0, w_0, ... ont, pour degrés respectifs, au plus $d'-2$, $d''-2$, $d'''-2$, ..., sauf le seul cas d'exception où l'une des courbes φ, ψ, θ, ..., ou plusieurs d'entre elles, ont l'unité pour degré. Dans ce cas, le nombre ν se réduit à zéro au lieu de $d'-2$, ... De là résulte que :

S'il n'y a aucune ligne droite dans la composition de la ligne envisagée, le nombre ν, degré du dénominateur dans une représentation propre, peut être rendu inférieur à $(d-2)$. Dans le cas opposé, il peut être réduit à $(d-1)$.

Supposons le cas où ν est réduit à $(d-2)$. Pour une courbe impropre, les représentations propres donnent encore lieu aux inégalités suivantes que j'emprunte au n° **14** :

$$\frac{\nu d}{2} \geqq h \geqq \nu(d-\nu-1).$$

Elles entraînent $\nu \geqq \frac{1}{2}d-1$. Si, comme je le suppose, on a $\nu \leqq d-2$, on voit que, ν variant entre ces deux limites $\left(\frac{1}{2}d-1\right)$ et $(d-2)$, le nombre $\nu(d-\nu-1)$ a pour minimum $(d-2)$. Donc $h \geqq d-2$. La proposition énoncée est donc prouvée pour le cas où il n'y a aucune ligne droite dans la figure.

Considérons, un instant, la figure composée d'une droite A et de $(d-1)$ autres droites B, qui rencontrent A. Pour que cette figure soit gauche, il faut qu'une, au moins, des droites B ne soit pas dans un même plan avec toutes les autres. S'il y en a une seule dans ce cas, nous avons un cas particulier de la ligne impropre dont il a été question tout à l'heure ; elle a $(d-2)$ points doubles apparents. Si le nombre de ces droites surpasse l'unité, le nombre des points doubles apparents augmente. Donc, en ce cas, la limite inférieure $h \geqq d-2$ est encore observée.

Prenons maintenant le cas d'une droite A et d'une courbe quelconque C, de degré $(d-1)$, impropre ou non, contenant ou non des droites. La droite A et la figure C ne peuvent avoir plus de $(d-2)$ points communs, sans quoi C se réduirait à $(d-1)$ droites rencontrant A, ce qui est le cas que je viens d'examiner. Ce cas écarté, A et C se rencontrent au plus en $(d-2)$ points. En outre des points

doubles apparents de C, la figure AC en présente donc un de plus; car on a

$$(d-1)-(d-2)=1.$$

Si donc on admet que C, du degré $(d-1)$, a, au moins, $(d-3)$ points doubles apparents, AC en a au moins $(d-2)$. La proposition est donc prouvée, puisqu'elle est vraie dans le cas où la figure se compose d'une courbe plane et d'une droite.

CHAPITRE II.

Courbes ayant le nombre minimum de points doubles apparents. — Courbes tracées sur les surfaces du second degré. — Appendice.

---

1. Nous avons vu au chapitre I (**14**, p. 288) que le nombre n, minimum du degré du dénominateur de z, ne peut descendre au-dessous de $\left(\frac{1}{2}d-1\right)$. Supposons d un nombre pair, et examinons si cette limite $\left(\frac{1}{2}d-1\right)$ peut être atteinte effectivement.

Soient $\varphi=0$, $z=\frac{u_1}{u_0}$, les équations de la courbe, du degré d. Nous supposons pris, pour le degré n de u_0, le nombre $\frac{1}{2}d-1$.

D'après le n° **16**, il existe un polynome u_2, propre à vérifier la relation

$$u_1^2-u_0u_2\equiv 0 \qquad (\text{div. } \varphi). \tag{1}$$

Cette équivalence ne peut se changer en égalité, u_1 et u_0 n'ayant pas de facteur commun. D'après la supposition $n=\frac{1}{2}d-1$, le premier membre de l'équivalence (1) est du degré d. Il ne diffère donc de φ que par un facteur constant. Ce facteur, ne pouvant être zéro, peut, sans inconvénient, être pris égal à 1.

Ainsi

$$u_1^2-u_0u_2=\varphi. \tag{2}$$

Il existe aussi un polynome u_3, du degré $(n+3)$, vérifiant la condition

$$u_1u_2-u_0u_3\equiv 0 \qquad (\text{div. } \varphi),$$

ou

$$u_1u_2-u_0u_3=a\varphi, \tag{3}$$

a étant un trinome du premier degré. Des équations (2) et (3) je

conclus, en éliminant φ,

$$u_1(u_2 - au_1) = u_0(u_3 - au_2);$$

et, comme u_1 et u_0 sont premiers entre eux,

$$u_2 - au_1 - bu_0 = 0,$$

b étant un polynome du second degré. Suivant le n° 16, cette identité exprime que *la courbe est située sur la surface du second degré*

(4) $$z^2 - az - b = 0.$$

Elle est, dès lors, *l'intersection complète de la surface* (4) *et de la surface monoïde* $z = \frac{u_1}{u_0}$, *du degré* $\frac{1}{2}d$.

La réciproque est évidente : effectivement, l'intersection complète d'une surface du second degré et d'une surface de degré $\frac{1}{2}d$ peut être représentée par l'équation de cette dernière surface, réduite à la forme monoïde, en vertu de l'équation (4), sans changement dans le degré $\frac{1}{2}d$ de la seconde surface.

Le nombre des points doubles apparents de la courbe est connu par la formule générale relative à l'intersection complète de deux surfaces. Mais l'analyse actuelle le donne aussi. Effectivement, on a trouvé au chapitre I (14, p. 290), pour ce cas, la limite inférieure $\left[\left(\frac{d-1}{2}\right)^2\right]$ de h, en écrivant que le nombre des points communs aux courbes $u_1 = 0$, $u_0 = 0$, non situés sur φ, est au moins zéro. D'après l'équation (2), ce nombre est précisément zéro. Donc h *est précisément égal à la limite* $\left[\left(\frac{d-1}{2}\right)^2\right]$.

2. Supposons, en second lieu, d un nombre impair, et prenons pour n sa limite inférieure, qui est alors $n = \frac{d-1}{2}$.

Au lieu des équations (2) et (3), nous avons maintenant

$$u_1^2 - u_0 u_2 = a\varphi, \qquad u_1 u_2 - u_0 u_3 = b\varphi,$$

a et b étant des polynomes du premier et du second degré. Prenons encore le polynome u_4 (16, p. 291), qui fournit une identité analogue, avec un polynome du troisième degré c

$$u_2^2 - u_0 u_4 = c\varphi.$$

De ces trois égalités, je conclus l'équivalence suivante, en négligeant les multiples de u_0

$$b^2 \equiv ac \qquad (\text{div. } u_0).$$

Les termes de cette équivalence sont du quatrième degré. Si d est supérieur à 9, u_0 est de degré supérieur à 4, et l'équivalence se change en égalité. Ayant $b^2 = ac$, et a étant du premier degré, par conséquent indécomposable, je conclus $b = aa'$; d'où résulte, par l'élimination de φ entre les deux premières égalités,

$$u_1(u_2 - a'u_1) = u_0(u_3 - a'u_2).$$

Ce résultat est entièrement semblable à celui du n° **1**; la conclusion est la même : *la courbe est située sur une surface du second degré. Elle est l'intersection incomplète de cette surface et de la surface monoïde de degré* $\frac{1}{2}(d+1)$. *Le reste de l'intersection est la ligne droite* $a = 0$, $z = \frac{u_1}{u_0}$.

Ici encore le nombre h est précisément égal à $\left[\left(\frac{d-1}{2}\right)^2\right]$, comme on le voit par la formule générale rappelée au début du chapitre I [formule (2), p. 271], ou encore par l'analyse actuelle. Je n'insiste pas sur ce sujet, la démonstration devant se trouver plus loin sous une forme plus générale.

Nous savons donc maintenant *que le minimum* $\left[\left(\frac{d-1}{2}\right)^2\right]$ *du nombre* h *a effectivement lieu toujours*. D'ailleurs, ce minimum ne peut être atteint pour d'autres valeurs de n (**14**, p. 290). Donc *ce minimum répond à une famille de courbes : ces courbes sont, au cas où* d *est pair, les intersections complètes de surfaces du second degré avec des surfaces du degré* $\frac{1}{2}d$; *au cas où* d *est impair, ce sont les intersections partielles de surfaces du second degré avec des surfaces du degré* $\frac{1}{2}(d+1)$; *elles sont alors complétées chacune par une ligne droite.*

J'ai supposé, dans la dernière partie, $d > 9$; cette restriction n'est pas nécessaire. C'est ce qui va apparaître dans la suite de ce chapitre.

3. Je vais étendre à d'autres cas le mode de raisonnement employé au n° **2**. Je reprends les équations déjà employées, et j'y change les

notations des seconds membres en cette sorte

$$(5)\qquad u_1^2 - u_0 u_2 = a_{11}\varphi, \qquad u_1 u_3 - u_0 u_4 = a_{12}\varphi, \qquad u_2^2 - u_0 u_4 = a_{22}\varphi;$$

d'où résulte, comme tout à l'heure,

$$(6)\qquad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \equiv 0 \qquad (\text{div. } u_0).$$

Cette équivalence (6) se change en égalité dès que le degré de u_0 est supérieur à celui du premier membre, c'est-à-dire dans le cas

$$2(2n + 3 - d) < n,$$

ou

$$(7)\qquad n < \frac{2}{3}(d - 3).$$

Je *suppose l'inégalité* (7) *satisfaite*, et je vais examiner les conséquences de cette hypothèse, laquelle entraîne

$$(8)\qquad a_{12}^2 = a_{11}a_{22}.$$

Si l'on était assuré que a_{11} ne contînt aucun facteur carré, on en pourrait conclure, comme tout à l'heure, que a_{11} divise exactement a_{12}. Le résultat final serait donc analogue, et l'on aurait cette proposition :

Toute courbe de degré d, pour laquelle le nombre n est inférieur à $\frac{2}{3}(d - 3)$, est sur une surface du second degré.

Cet énoncé est exact effectivement, même si a_{11} contient des facteurs carrés, et c'est ce que je vais prouver.

4. J'envisage la suite indéfinie des polynomes u_m (16, p. 291), et je pose, d'une manière générale,

$$(9)\qquad u_i u_j - u_0 u_{i+j} = a_{ij}\varphi.$$

D'après les propriétés des polynomes u_m, a_{ij} est un polynome entier. Son degré est égal à celui de a_{11}, augmenté de $(i + j - 2)$ unités.

Soit ω un facteur, polynome entier, qui soit au degré μ dans a_{11}, et à un degré moindre, ρ, dans a_{12}. Je dois montrer l'impossibilité de cette supposition.

J'ai ainsi, par hypothèse, $\rho < \mu$; mais, à cause de l'identité (8), $2\rho \geqq \mu$.

Comme conséquence, ω entre dans a_{22} en facteur avec l'exposant $(2\rho-\mu)$.

Envisageons les quatre polynomes $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}$. Je dis que tout facteur, commun à trois d'entre eux, appartient aussi au quatrième. Soit, en effet, Ω un tel facteur. Prenons les égalités (5) et joignons-y celle-ci, cas particulier de l'équation (9) : $u_1 u_3 - u_0 u_4 = a_{13}\varphi$. Nous avons, de la sorte, quatre égalités. Choisissons-en trois quelconques. Les trois polynomes a correspondants ayant le facteur Ω, nous déduirons des trois égalités choisies trois équivalences suivant le diviseur Ω. Cse trois équivalences, quel que soit le choix fait, seront toujours les mêmes, savoir :

$$\frac{u_1}{u_0} \equiv \frac{u_2}{u_1} \equiv \frac{u_3}{u_2} \equiv \frac{u_4}{u_3} \qquad (\text{div. } \Omega).$$

De là on conclut que le quatrième binome, $u_1^2 - u_0 u_2$ ou $u_1 u_2 - u_0 u_3$, ... est divisible par Ω. D'ailleurs ce facteur Ω est de degré moindre que φ, lequel n'est pas décomposable. Donc Ω entre en facteur dans le quatrième polynome a, comme je l'ai annoncé.

Suivant les suppositions, le facteur ω existe dans a_{11}, a_{12}, a_{22} avec les exposants précis $\mu, \rho, 2\rho-\mu$. D'après la supposition $\mu > \rho$, ces trois nombres vont en décroissant. Donc, d'après le lemme que je viens de prouver, ω entre dans a_{13} comme facteur avec l'exposant $(2\rho-\mu)$ *précisément*.

J'envisage maintenant a_{23}, et j'ai entre ce polynome et les précédents cette relation

$$a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13} \equiv 0 \qquad (\text{div. } u_0).$$

Le terme $a_{12}a_{13}$ contient le facteur ω affecté de l'exposant $(3\rho-\mu)$. D'autre part, a_{11} contient ce facteur avec l'exposant μ. Puisque $2\rho \geqq \mu$, $(3\rho-\mu)$ n'est pas moindre que ρ, qui, lui-même, n'est pas moindre que 1. De même, μ est supérieur à 1. Donc ω est au premier degré, au moins, en facteur dans le premier membre de l'équivalence considérée. Le polynome ω est, au moins, du premier degré. C'est donc un facteur du premier degré, au moins, qui existe ainsi au premier membre de l'équivalence. Ce facteur est d'ailleurs premier avec le *diviseur* u_0; car ω, divisant u_0 et a_{11}, diviserait u_1 d'après l'équation (5), et u_0, u_1 ne seraient pas premiers entre eux. Donc ce facteur peut être supprimé dans l'équivalence sans la troubler. Cette suppression faite, il reste une équivalence dont le premier membre est, au

plus, du même degré que le premier membre de l'équivalence (6). Pour la même raison donc, elle se change en égalité. Donc on a

$$a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13} = 0;$$

il en résulte que a_{23} contient le facteur ω avec l'exposant $(3\rho - \mu) - \mu$ ou $(3\rho - 2\mu)$, et que l'inégalité nouvelle $3\rho \geqq 2\mu$ a lieu.

La fraction $\frac{\rho}{\mu}$, plus petite que 1, et non moindre que $\frac{2}{3}$, entraîne cette conséquence : $\mu \geqq 3$, $\rho \geqq 2$.

Généralisons cette analyse : admettons prouvé que tous les polynomes $a_{i+1,j+1}$ contiennent le facteur ω avec l'exposant

$$(i+j)\rho - (i+j-1)\mu,$$

tant que $(i+j)$ ne dépasse pas un entier déterminé m, et montrons qu'il en résulte le même fait quand $(i+j)$ atteint la valeur suivante $(m+1)$.

L'hypothèse entraîne cette conséquence : m' étant un quelconque des nombres 0, 1, 2, ..., $(m-1)$, on a toujours

$$(10) \qquad m\rho > (m'-1)\mu, \qquad m\rho \geqq (m-1)\mu, \qquad \mu \geqq m, \qquad \rho \geqq m-1.$$

Prenons l'équivalence

$$a_{11}a_{2,m+1} \equiv a_{12}a_{1,m+1} \quad (\text{div. } u_0).$$

D'après l'hypothèse, le second membre contient le facteur ω avec l'exposant

$$(m-1)\rho - (m-1)\mu.$$

Cet exposant, suivant l'hypothèse (10), n'est pas moindre que ρ, qui, lui-même, n'est pas moindre que $(m-1)$. Le premier membre contient le facteur ω, au moins, avec l'exposant μ, à cause de a_{11} qui figure dans ce membre. D'ailleurs μ est supérieur à $(m-1)$. Il y a donc, aux deux membres de l'équivalence, un facteur premier avec le diviseur, et au moins du degré $(m-1)$. Ce facteur supprimé, l'équivalence a ses termes au plus du même degré que ceux de l'équivalence (6), et, pour la même raison, se change en égalité. Par conséquent, $a_{2,m+1}$ contient ω avec l'exposant précis $(m+1)\rho - m\mu$.

Le polynome $a_{2,m+1}$ est au nombre de ceux $a_{i+1,j+1}$ pour lesquels $(i+j)$ atteint $(m+1)$. A son égard, la proposition se trouve prouvée. Il reste à étendre cette loi aux autres polynomes analogues. C'est ce que je fais de cette manière.

Je prends les diverses égalités

$$u_1 u_{m'+1} - u_0 u_{m'+2} = a_{1,m'+1}\varphi$$

pour $m' = 0, 1, 2, \ldots, m$. Les divers polynomes $a_{1,m'+1}$ ont chacun le facteur ω avec l'exposant $[m'\rho - (m'-1)\mu]$, dont le plus petit est $[m\rho - (m-1)\mu]$. De l'ensemble de ces égalités, je conclus, en négligeant les multiples de cette puissance de ω,

(11) $$\frac{u_1}{u_0} \equiv \frac{u_2}{u_1} \equiv \frac{u_3}{u_2} \equiv \ldots \equiv \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} \qquad (\text{div. } \omega^{m\rho-(m-1)\mu}).$$

Je prends maintenant l'égalité

(12) $$u_2 u_{m+1} - u_0 u_{m+3} = a_{2,m+1}\varphi.$$

Il vient d'être prouvé que $a_{2,m+1}$ contient ω avec l'exposant

$$(m+1)\rho - m\mu,$$

qui est moindre que le précédent. Les équivalences (11) ont lieu, *a fortiori*, suivant le diviseur $\omega^{(m+1)\rho-m\mu}$; j'en conclus, notamment,

$$u_0 u_{m+2} \equiv u_1 u_{m+1} \qquad (\text{div. } \omega^{(m+1)\rho-m\mu}),$$

en même temps que de l'égalité (12)

$$u_2 u_{m+1} \equiv u_0 u_{m+3} \qquad (\text{div. } \omega^{(m+1)\rho-m\mu}).$$

Multipliant membre à membre ces deux dernières, et supprimant les facteurs communs, j'obtiens

$$u_2 u_{m+2} \equiv u_1 u_{m+3}, \qquad \frac{u_{m+3}}{u_{m+2}} \equiv \frac{u_2}{u_1} \qquad (\text{div. } \omega^{(m+1)\rho-m\mu}).$$

Je peux donc, au lieu de (11), écrire

$$\frac{u_1}{u_0} \equiv \frac{u_2}{u_1} \equiv \frac{u_3}{u_2} \equiv \ldots \equiv \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} \equiv \frac{u_{m+3}}{u_{m+2}} \qquad (\text{div. } \omega^{(m+1)\rho-m\mu}).$$

De là, on déduit, pour $i+j = m+1$, toutes les équivalences

$$u_{i+1} u_{j+1} - u_0 u_{m+3} \equiv 0 \qquad (\text{div. } \omega^{(m+1)\rho-m\mu}).$$

Donc, pour $i+j = m+1$, tous les polynomes $a_{i+1,j+1}$ contiennent le facteur ω avec l'exposant $(m+1)\rho - m\mu$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

La loi étant générale, nous voyons que l'hypothèse entraîne cette conséquence $\frac{\rho}{\mu} \geqq \frac{m-1}{m}$, l'entier m prenant toutes les valeurs 0, 1, 2, ... à l'infini. Une telle fraction $\frac{\rho}{\mu}$, inférieure à l'unité, n'existe pas. Donc $\rho = \mu$.

Donc, enfin, a_{11} *divise exactement* a_{12}. La proposition énoncée à la fin du nº 3 est donc exacte.

5. Rappelant la signification du nombre n, nous avons cette proposition :

Pour une courbe gauche, de degré d, sans point singulier, si les cordes issues d'un point quelconque de l'espace sont situées sur un cône de degré moindre que $\frac{2}{3}(d-3)$, la courbe est située sur une surface du second degré.

Pour préciser ces courbes, étudions, d'une manière générale, les courbes tracées sur les surfaces du second degré. Elles sont entièrement caractérisées par la condition que nous avons rencontrée au nº 1 (p. 307).

$$u_2 - au_1 - bu_0 = 0. \tag{13}$$

Cette identité exprime que u_2 s'évanouit en tous les points communs aux courbes $u_1 = 0$, $u_0 = 0$. Ces points forment trois groupes distincts :

1° Les h points doubles de φ ;
2° $(nd - 2h)$ points situés sur φ ;
3° $[n(n+1) - nd + h]$ points non situés sur φ.

Prenons maintenant l'identité $u_1^2 - u_0 u_2 = a_{11}\varphi$. Elle nous prouve que la courbe $a_{11} = 0$ passe en chacun des points qui composent le second groupe ; et, puisque u_2 s'évanouit, comme u_1 et u_0, en chacun des points du troisième groupe, elle prouve aussi que la courbe $a_{11} = 0$ a ces derniers pour points doubles.

Les équations $a_{11} = 0$, $z = \frac{u_1}{u_0}$ définissent ainsi une courbe, du même degré que a_{11}, exactement comme la courbe gauche proposée est définie par $\varphi = 0$, $z = \frac{u_1}{u_0}$. Ces deux courbes, dont les degrés sont $(2n + 2 - d)$ et d, composent l'intersection complète de la surface

du second degré et de la surface monoïde, qui est du degré $(n+1)$.

Ces conséquences ont lieu indépendamment de l'hypothèse que n soit le minimum du degré de u_0. Supposons maintenant n effectivement minimum. Dans ce cas, h a une limite inférieure, fournie par l'inégalité (289) (p. 31). On a obtenu cette inégalité en écrivant précisément que les points du troisième groupe sont, au moins, en nombre égal à $\frac{(2n+2-d)(2n+1-d)}{2}$. Or ici ces points sont les points doubles de la courbe $a_{11}=0$, dont le degré est $(2n+2-d)$. Le nombre-limite que je viens de citer ne peut pas être dépassé, et ne peut même être atteint que d'une seule manière, par la réduction de cette courbe à l'ensemble de $(2n+2-d)$ lignes droites. De là cette conséquence :

Les surfaces, de degré minimum, qui passent par une courbe algébrique tracée sur une surface du second degré, coupent cette dernière, en outre, suivant des droites complétant l'intersection, et qui appartiennent toutes à un même système de génératrices.

A chaque valeur du nombre entier n, entre $\left(\frac{1}{2}d-1\right)$ et $(d-2)$, correspond une famille unique de courbes du degré d, situées sur des surfaces du second degré. Le nombre h des points doubles apparents, pour chaque famille, est

$$h = \frac{d(d-1)}{2} - (n+1)(d-n-1). \tag{14}$$

Les surfaces de degré minimum passant par la courbe sont du degré $(n+1)$.

Il n'est pas nécessaire d'entrer ici dans plus de détails au sujet de ces courbes, dont la théorie générale est fort connue. Pour que l'on puisse aisément combiner notre mode de définition avec celui qu'a donné M. Chasles [1], ajoutons ces trois propriétés, faciles à établir :

La courbe rencontre en $(n+1)$ points chaque droite de la surface du second ordre qui appartient au même système que les droites complémentaires de l'intersection, et en $(d-n-1)$ points chacune des droites du système opposé.

Les $(2n+2-d)$ droites complémentaires peuvent être arbi-

---

[1] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LIII, 1861, p. 985, 1077 et 1203.

trairement choisies dans le système auquel elles appartiennent.

Sur une surface du second degré donnée, la courbe est définie par $[(n+2)(d-n)-1]$ *arbitraires; dans l'espace, le nombre des arbitraires est* $[(n+2)(d-n)+8]$.

6. Pour la classification générale, voici le trait essentiel des résultats précédents. Les valeurs de h, marquées par la formule (14), forment une suite de nombres entiers non consécutifs. Ce sont, d'ailleurs, comme il résulte de la proposition du n° 3, les seules qu'on puisse obtenir tant que n n'atteint pas $\frac{2}{3}(d-3)$. En outre, suivant l'inégalité (16) du chapitre I (p. 289), toutes les autres valeurs de h, obtenues avec d'autres nombres n, sont supérieures à ces dernières. Soit donc H le nombre obtenu en mettant dans (14), pour n, $\frac{2}{3}(d-3)$ si ce nombre est entier, ou, dans le cas opposé, l'entier immédiatement supérieur; et concluons que, *parmi les entiers compris entre* $\left[\left(\frac{d-1}{2}\right)^2\right]$ *et* H, *il n'y en a que quelques-uns qui puissent être égaux au nombre des points doubles apparents d'une courbe de degré d, sans point singulier. Toutes les courbes correspondantes sont situées sur des surfaces du second degré.*

Je ne formule pas explicitement la limite H qui, comme on le verra au chapitre IV, n'est pas la véritable limite, mais seulement une approximation.

Ici se termine le chapitre II, dont la matière est courte, mais importante pour notre sujet. On y saisit facilement les conséquences qui se peuvent tirer de la représentation des courbes par les monoïdes. Généraliser ces conséquences, tel est le but que je vais poursuivre. Il me faudra, pour y parvenir, une analyse longue et compliquée, sans doute, mais qui, je pense, se trouvera éclaircie par le cas particulier qui vient d'être traité.

Appendice du chapitre II.

Je donne, dans cet appendice, pour mieux faire entendre le sujet, le calcul explicite des équations d'une courbe, tracée sur une surface du second degré, et mises sous la forme $\varphi=0$, $z=\frac{u_1}{u_0}$.

Soient des droites quelconques, de l'espace, en nombre k, représentées par les équations

$$\begin{array}{llll} D_1 = 0, & D_2 = 0, & \ldots, & D_k = 0, \\ z = P_1, & z = P_2, & \ldots, & z = P_k, \end{array}$$

où les D et les P désignent des trinomes $(\alpha x + \beta y + \gamma)$.

Par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ je désigne des polynomes entiers arbitraires en x, y, tous d'un même degré. Je pose, pour abréger,

$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{D_1}, \quad \rho_2 = \frac{\theta_2}{D_2}, \quad \ldots, \quad \rho_k = \frac{\theta_k}{D_k},$$
$$\mathfrak{a} = D_1 D_2, \ldots, D_k.$$

Pour représenter à la fois l'ensemble des k droites, je ferai, comme au chapitre I (23),

$$u_0 = \mathfrak{a}(\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k),$$
$$u_1 = \mathfrak{a}(\rho_1 P_1 + \rho_2 P_2 + \ldots + \rho_k P_k).$$

En prenant maintenant u_2 ainsi

$$u_2 = \mathfrak{a}(\rho_1 P_1^2 + \rho_2 P_2^2 + \ldots + \rho_k P_k^2),$$

j'aurai, comme il convient,

$$\text{(I)} \qquad u_1^2 - u_0 u_2 = \mathfrak{a}\Phi,$$

et l'expression de Φ sera

$$\text{(II)} \qquad \Phi = -\mathfrak{a}[\rho_1\rho_2(P_1 - P_2)^2 + \rho_1\rho_3(P_1 - P_3)^2 + \ldots].$$

Je vais maintenant supposer les k droites sur une surface du second degré, et faire jouer à $\mathfrak{a}$ le rôle du polynome a_{11}.

Soit $z^2 + Az + B = 0$ l'équation de la surface. L'existence des droites sur cette surface donne les conditions

$$\begin{array}{l} P_1^2 + AP_1 + B = C_1 D_1, \\ P_2^2 + AP_2 + B = C_2 D_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_k^2 + AP_k + B = C_k D_k, \end{array}$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_k$ sont des trinomes du premier degré. Ces identités satisfaites, on aura

$$u_2 + A u_1 + B u_0 = (C_1\theta_1 + C_2\theta_2 + \ldots + C_k\theta_k)\mathfrak{a} = \mathfrak{C}\mathfrak{a}.$$

Par le moyen de cette identité, l'équation (I) devient

$$u_1^2 + A u_1 u_0 + B u_0^2 = \mathfrak{a}(\Phi + \mathfrak{C} u_0).$$

J'obtiens donc une courbe tracée sur la surface du second degré, en posant les équations

$$\varphi = \Phi + \mathfrak{C} u_0 = 0, \qquad z = \frac{u_1}{u_0}.$$

D'après l'analyse de ce chapitre, toute courbe tracée sur la surface s'obtiendra de cette manière, pourvu qu'on fasse varier le nombre k et le degré des polynomes θ. Chaque courbe est ainsi obtenue une seule fois, et u_0 est du degré minimum. Il est entendu que, pour chaque nombre k, il n'y a pas lieu de faire varier les droites; car la courbe ne serait pas changée par là (p. 314).

Pour rendre ces résultats tout à fait explicites, prenons l'équation de la surface sous la forme

$$(z + H)(z + H_1) = EE_1;$$

H, H_1, E, E_1 sont des polynomes du premier degré, en sorte qu'un système de droites est représenté par les équations

$$D = \omega E - \frac{1}{\omega} E_1 + H_1 - H = 0,$$
$$z = \sigma(\omega E - H) + (1 - \sigma)\left(\frac{1}{\omega} E_1 - H_1\right) = P,$$

où ω, σ sont des constantes arbitraires. De là résulte

$$(P + H)(P + H_1) - EE_1 = D\left[\sigma\omega E - \frac{1-\sigma}{\omega} E_1 - \sigma(1-\sigma) D\right].$$

Donnons maintenant aux constantes σ et ω les indices $1, 2, \ldots, k$; nous aurons

$$C_i = E\sigma_i\omega_i - E_1 \frac{1-\sigma_i}{\omega_i} - D\sigma_i(1-\sigma_i),$$
$$\mathfrak{C} = E\sum \sigma_i\omega_i\theta_i - E_1\sum \frac{1-\sigma_i}{\omega_i}\theta_i - D\sum \sigma_i(1-\sigma_i)\theta_i.$$

Les formules sont ainsi rendues complètement explicites.

Pour obtenir les courbes répondant aux nombres (d, n), il faudra faire

$$k = 2n + 2 - d,$$

et prendre pour le degré des polynomes θ le nombre $(d - n - 1)$.

CHAPITRE III.

Formation d'une double suite indéfinie de polynomes, d'après une loi déterminée. — Polynomes correspondants. — Propriété des doubles suites consistant en ce qu'elles peuvent toujours être arrêtées à un polynome identiquement nul. — Emploi des doubles suites dans la théorie des courbes gauches. — Courbes adjointes. — Intersections complètes. — Exemples. — Deux propositions accessoires.

---

1. Soient S_0, S_1 deux polynomes entiers à deux variables x, y. Les équations $S_0 = 0$, $S_1 = 0$ représentent deux courbes que, pour abréger, je désignerai par ces mots : *courbes* S_0, S_1. Je suppose que les points d'intersection de ces deux courbes soient simples sur chacune d'elles, et se partagent en deux groupes : 1° des points de contact, au nombre de h_0, et que j'appelle *les points* (h_0); 2° des points de simple intersection, que j'appelle *les points* (P), et qui sont au nombre P, savoir :

$$P = d_0 d_1 - 2 h_0,$$

si d_0, d_1 désignent les degrés de S_0, S_1.

L'ensemble des points (h_0), (P) sera désigné par (E_0). Le nombre E_0 des points composant cet ensemble est $h_0 + P$, c'est-à-dire

$$E_0 = d_0 d_1 - h_0.$$

En outre des polynomes S_0, S_1, j'en considère deux autres β_0, β_1, ayant respectivement pour degrés $(d_0 + 1)$ et $(d_1 + 1)$, et choisis de telle sorte qu'ils s'évanouissent en chacun des points (E_0). De plus, l'ensemble de ces quatre polynomes sera, *par hypothèse*, doué d'une autre propriété, que je vais définir.

En général, pour deux polynomes quelconques u, v, employons la notation

$$[u, v] = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

La propriété que je suppose, et qui est essentielle, est la suivante :

En chacun des points (h_0) *a lieu l'égalité*

$$(1) \qquad [\beta_0, S_1] + [\beta_1, S_0] = 0.$$

Telles sont les données que j'admets. Avec ces données je vais

montrer qu'on peut construire une double suite de polynomes analogues S_2, β_2, S_3, β_3, ... tellement choisis qu'entre deux paires de polynomes consécutifs S_i, S_{i+1}, β_i, β_{i+1} existent toujours les mêmes liaisons, supposées entre les quatre polynomes donnés.

2. J'emploie ici l'abréviation dont j'ai précédemment fait usage, et que je rappelle : u, v, w étant trois polynomes entiers à deux variables, si l'on peut trouver deux autres polynomes a, b donnant lieu à l'identité $w = au + bv$, alors je dis que w *est de la forme* (u, v). J'ai rappelé au chapitre I (p. 287) les conditions sous lesquelles existe une telle relation.

D'après les hypothèses, chacun des polynomes β_0 et β_1 s'évanouit en tous les points communs aux courbes S_0, S_1. Mais, parmi ces points, il en est qui comptent double. Il n'en résulte donc pas que β soit de la forme (S_0, S_1) ; cette conséquence s'applique seulement au carré de β. J'exprime cette propriété, pour β_1, par l'identité

$$(2) \qquad \beta_1^2 = S_2 S_0 + \gamma_1 S_1.$$

J'ai désigné par γ_1 le coefficient de S_1 ; c'est un polynome auxiliaire s'adjoignant aux données. Quant au coefficient de S_0, je l'ai désigné par S_2 : c'est le polynome qui doit succéder à S_0, S_1 dans la suite S_0, S_1, S_2, S_3, ... que j'ai annoncée.

D'après l'identité (2), la courbe S_2 coupe simplement la courbe S_1 en chaque point (P) et la touche en d'autres points (h_1). Ces derniers sont ceux qui appartiennent à S_1 et à β_1 sans appartenir en même temps à S_0. Donc on voit déjà que les intersections de S_1 et S_2 se partagent en deux groupes [dont l'un est composé des mêmes points (P)] comme celles de S_0 et S_1, et que le polynome β_1 s'évanouit en chacun des points (E_1) de l'un quelconque de ces deux groupes, comme le polynome β_0 en chacun des points (E_0).

Il nous faut maintenant définir le polynome β_2. Un détour assez long est ici nécessaire.

Les intersections de β_1 et S_1 ont lieu dans les points (E_0) et (h_1). Par les premiers passe la courbe β_0, par les seconds la courbe S_2. Donc le produit $\beta_0 S_2$ est de la forme (β_1, S_1). C'est ce que j'exprime ainsi

$$(3) \qquad \beta_0 S_2 \equiv -\pi_1 \beta_1 \qquad (\text{div. } S_1).$$

J'aurai à faire usage du polynome auxiliaire π_1.

Je considère maintenant deux fonctions algébriques de x, que j'appelle z et z' et que je définis, la première par les équations

$$S_1 = 0, \qquad z = \frac{\beta_0}{\beta_1},$$

et la seconde par

$$\beta_1 = 0, \qquad z' = \frac{S_0}{S_1}.$$

D'après (3), on peut encore écrire pour z

$$S_1 = 0, \qquad z \equiv \frac{\beta_0}{\beta_1} \equiv -\frac{\pi_1}{S_2};$$

et, d'après (2), pour z',

$$\beta_1 = 0, \qquad z' \equiv \frac{S_0}{S_1} \equiv -\frac{\gamma_1}{S_2}.$$

Les deux expressions équivalentes prises ainsi, soit pour z, soit pour z', présentent des caractères très différents en chacun des points (h_0). Tandis que la première expression prend la forme $\frac{0}{0}$, la seconde revêt une forme déterminée. Dans la première expression l'indétermination disparaît par l'application des règles ordinaires, qui fournissent ces valeurs limites

$$z = \frac{[\beta_0, S_1]}{[\beta_1, S_1]}, \qquad z' = \frac{[\beta_1, S_0]}{[\beta_1, S_1]}.$$

C'est ici que va intervenir pour la première fois la relation (1), d'où je tire cette conséquence : en chaque point (h_0), on a $z + z' = 0$. Tenant compte de la seconde expression de z et de z', je conclus que *le polynome* $(\pi_1 + \gamma_1)$ *s'évanouit en chacun des points* (h_0).

D'après cette propriété, le produit de ce dernier polynome par β_1 est de la forme (S_0, S_1). Dans cette forme, le coefficient de S_0 est le nouveau polynome β_2 que je voulais définir. Ainsi :

$$(4) \qquad (\pi_1 + \gamma_1)\beta_1 \equiv \beta_2 S_0 \qquad (\text{div. } S_1).$$

Ce polynome β_2 est d'un degré supérieur d'une unité à celui de S_2, comme on le voit immédiatement par la comparaison de (3) et (4). Il s'évanouit en chacun des points (E_1).

Je dois, en outre, montrer qu'en chaque point (h_1) la relation analogue à (1) est vérifiée par S_1, S_2, β_1, β_2.

Pour le prouver, j'emploie encore deux fonctions analogues à z et z',

la première ζ, que, en vertu de l'équation (4), je peux définir de deux manières équivalentes ainsi

$$S_1 = 0, \qquad \zeta = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\pi_1 + \gamma_1}{S_0};$$

la seconde ζ', que, en vertu de (2), je peux définir de même par

$$\beta_1 = 0, \qquad \zeta' = \frac{-S_2}{S_1} = -\frac{\gamma_1}{S_0}.$$

D'après (3), π_1 s'évanouit en chaque point (h_1); car les courbes S_1 et S_2 s'y touchent, tandis que la courbe β_1 passe en ce point sans toucher S_1 et S_2. Suivant la seconde expression de ζ et ζ', je conclus qu'en chaque point (h_1) on a $\zeta + \zeta' = 0$. Suivant la première expression de ζ et ζ', et par le même raisonnement que tout à l'heure, j'ai cette conséquence : *en chacun des points* (h_1) *a lieu la relation*

$$[\beta_2 S_1] + [\beta_1 S_2] = 0.$$

C'est ce qu'il fallait prouver. Donc, en résumé :

Au moyen de quatre polynomes S_0, S_1, β_0, β_1 *satisfaisant aux conditions précitées* (1), *on peut, par l'intermédiaire des identités* (2), (3) *et* (4), *former deux nouveaux polynomes* S_2, β_2, *qui composent avec* S_1, β_1 *un système analogue au proposé. Avec ce dernier on peut former deux nouveaux polynomes* S_3, β_3, ... *On a ainsi une double suite de polynomes* S, β *dans laquelle deux couples consécutifs jouissent toujours des propriétés supposées pour les deux couples qui ont servi de point de départ.*

3. Je peux, par les mêmes lois, prolonger la double suite dans l'autre sens, et trouver deux polynomes S_{-1}, β_{-1}, qui, associés avec S_0 et β_0, forment un système analogue à celui de S_0, β_0, associé avec S_1, β_1. C'est ce que je vais montrer.

Comme je l'ai fait observer au début du n° 2, le carré de β_0 est de la forme (S_0, S_1). Écrivant cette forme, j'ai une relation analogue à (2), qui définit S_{-1} et le polynome auxiliaire γ_0

$$\beta_0^2 = S_1 S_{-1} + \gamma_0 S_0. \tag{5}$$

De cette relation je tire, à l'égard des intersections de S_0 et S_{-1}, des conclusions analogues à celles que j'ai tirées de (2) à l'égard des

intersections de S_1 et S_2. Le produit $\beta_1 S_{-1}$ est de la forme (β_0, S_0). Par analogie avec l'équivalence (4), j'écris cette relation ainsi

$$(6) \qquad \beta_1 S_{-1} \equiv (\pi_0 + \gamma_0)\beta_0 \qquad (\text{div. } S_0).$$

Ceci définit π_0, puisque γ_0 est déjà connu par (5). Prenant maintenant deux fonctions analogues à ζ et ζ', que j'obtiens en diminuant d'une unité chaque indice dans la définition de ζ et ζ', et recommençant en ordre inverse le raisonnement ci-dessus, je reconnais que π_0 s'évanouit en chaque point (h_0). J'en conclus que $\pi_0 \beta_0$ est de la forme (S_0, S_1), et j'ai ainsi une relation analogue à (3)

$$(7) \qquad -\pi_0 \beta_0 \equiv \beta_{-1} S_1 \qquad (\text{div. } S_0).$$

Par là se trouve défini β_{-1}. Enfin je prends deux fonctions analogues à z et z', obtenues en diminuant d'une unité chaque indice dans la définition de ces dernières; j'observe que, d'après (6), $(\pi_0 + \gamma_0)$ s'évanouit en chaque point (h_{-1}), où S_{-1} et S_0 se touchent.

Répétant alors en ordre inverse le raisonnement fait plus haut sur z et z', je conclus à l'existence de la relation $[\beta_{-1}, S_0] + [\beta_0, S_{-1}] = 0$ en chaque point (h_{-1}). Par conséquent :

La double suite de polynomes S, β *peut être prolongée dans les deux sens.*

4. Une observation bien naturelle et très importante est suggérée par la symétrie des données. En intervertissant les rôles de S_0 et S_1 et, en même temps, ceux de β_0 et β_1, on peut construire une autre double suite analogue à la précédente. Quel lien existe-t-il entre ces deux doubles suites? Elles coïncident, comme on va voir.

Pour éviter toute confusion, donnons aux polynomes proposés des désignations nouvelles, appropriées à leur nouveau rôle. Posons

$$S_1 = S'_0, \qquad S_0 = S'_1,$$
$$\beta_1 = \beta'_0, \qquad \beta_0 = \beta'_1,$$

et distinguons de même par des accents les polynomes qui vont s'introduire. Prolongeons dans le sens direct, par exemple, la suite $S'_0, \beta'_0, S'_1, \beta'_1$, en nous conformant au procédé indiqué au nº 2.

Écrivons d'abord la relation analogue à (2)

$$\beta'^2_1 = S'_2 S'_0 + \gamma'_1 S'_1,$$

ou bien, avec les notations primitives,

$$\beta_0^2 = S'_2 S_1 + \gamma'_1 S_0.$$

Cette relation, comparée avec (5), me donne

(8) $$S'_2 = S_{-1},$$

(8 *bis*) $$\gamma'_1 = \gamma_0.$$

Je forme ensuite la relation (3) pour déterminer π'_1, savoir :

$$\beta'_0 S'_2 \equiv - \pi'_1 \beta'_1 \qquad (\text{div. } S'_1)$$

ou, en d'autres termes, à cause de (8),

$$\beta_1 S_{-1} \equiv - \pi'_1 \beta_0 \qquad (\text{div. } S_0).$$

Comparant avec (6), je conclus

(9) $$\pi'_1 = -(\pi_0 + \gamma_0),$$

et j'adjoins à cette dernière relation celle-ci, qu'on en déduit par le moyen de (8 *bis*) :

(9 *bis*) $$\pi_0 = -(\pi'_1 + \gamma'_1).$$

Enfin, l'équivalence (4) définit β'_2 ainsi

$$(\pi'_1 + \gamma'_1)\beta'_1 \equiv \beta'_2 S'_0 \qquad (\text{div. } S'_1)$$

ou, en d'autres termes, à cause de (9 *bis*),

$$- \pi_0 \beta_0 \equiv \beta'_2 S_1 \qquad (\text{div. } S_0).$$

La comparaison avec (7) me donne

(10) $$\beta'_2 = \beta_{-1}.$$

Les relations (8) et (10) démontrent la coïncidence des deux doubles suites entre elles. En poursuivant leur génération, on obtient la proposition que voici :

Dans une double suite de polynomes S, β, *l'ordre de deux couples consécutifs est indifférent.*

5. Il importe de noter que les polynomes successifs ne sont pas, en général, entièrement déterminés. Ainsi, par l'équation (2), S_2 n'est

entièrement déterminé que si son degré est inférieur à celui de S_1. Dans le cas opposé, S_2 n'est déterminé qu'à un multiple près de S_1.

Il est aisé d'obtenir le degré de S_2, que je désignerai par d_2, comme j'ai désigné par d_1 et d_0 ceux de S_1 et S_0. La relation (2) montre que l'on a

$$d_2 = 2d_1 - d_0 + 2,$$

puisque, par hypothèse, β_1 est du degré $(d_1 + 1)$. Désignant de même par d_m le degré de S_m, j'aurai la relation récurrente

$$d_m = 2d_{m-1} - d_{m-2} + 2,$$

d'où résulte

$$d_m = m^2 + (d_1 - d_0 - 1)m + d_0. \tag{11}$$

Suivant les valeurs numériques de d_1 et d_0, la formule (11) présente deux cas très différents :

Premier cas. — *Le second membre de* (11) *devient nul ou négatif pour une valeur entière de m.*

Second cas. — *Le second membre de* (11) *reste positif pour toute valeur entière de m.*

Dans le premier cas, la double suite s'arrête d'elle-même. Soit, en effet, d_{m+1} le premier des nombres négatifs dans la suite $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_m, d_{m+1}$. Alors S_{m+1} ne peut exister. La suite s'arrête à S_m, et, suivant l'équation analogue à (2), on a

$$\beta_m^2 = \gamma_m S_m.$$

Ce résultat est, comme on le verra plus loin, une généralisation de la formule (6) du chapitre II, et je montrerai qu'il entraîne cette conséquence : S_m *divise exactement* β_m.

Quant au cas particulier où la formule (11) donne $d_m = 0$, je conviendrai, pour ce cas, d'arrêter la suite à S_m, qui est alors une simple constante. Le polynome β_m est du premier degré, et l'on peut encore dire que S_m divise exactement β_m.

Ce que je viens de dire, relativement à des nombres positifs m, s'applique aux nombres négatifs, puisque l'ordre des polynomes S_0, S_1 est indifférent.

Si, au contraire, pour la suite indéfinie des nombres entiers positifs ou des nombres entiers négatifs m, la quantité d_m reste toujours

positive, la double suite peut être indéfiniment prolongée dans le sens correspondant. Mais aussi ces quantités d_m croissent avec m. Les polynomes consécutifs S_m ne sont plus entièrement déterminés. Je montrerai plus loin qu'on peut alors les choisir de telle sorte que l'un d'eux soit identiquement nul. On pourra alors limiter la suite au polynome qui le précède, exactement comme dans le cas précédent.

Ces circonstances s'offrent, soit pour la suite prolongée dans l'un et l'autre sens (second cas), soit pour la suite prolongée dans un seul sens (premier cas). Mais, comme je viens de l'énoncer, *on peut toujours envisager la double suite* S, β *comme limitée dans les deux sens, et de telle sorte que le dernier polynome* S *divise exactement le dernier polynome* β. C'est là le point capital dans cette théorie. Pour l'établir, il me faut avoir recours à une analyse assez longue, mais dont les détails tiennent à la nature intime du sujet.

6. Plusieurs fois déjà, notamment en établissant les relations (2) et (4), nous avons observé que le produit de β_1 par un polynome qui s'évanouit en chacun des points (h_0) est de la forme (S_0, S_1). Nous allons maintenant considérer un polynome quelconque ayant cette propriété, et nous le désignerons par r_0.

Ainsi r_0 *désigne un polynome quelconque s'évanouissant en chaque point* (h_0), où se touchent S_0 et S_1.

Le produit $r_0 \beta_1$ est, disons-nous, de la forme (S_0, S_1). Le coefficient de S_0, dans cette forme, s'évanouit en tout point commun aux courbes S_1 et β_1, et qui n'est pas, en même temps, sur la courbe S_0, c'est-à-dire en l'un quelconque des points (h_1).

Désignant par r_1 ce coefficient, on aura l'identité

$$(12) \qquad r_0 \beta_1 \equiv r_1 S_0 \qquad (\text{div. } S_1).$$

Le polynome r_1, qui dépend du choix de r_0, est un de ceux qui s'évanouissent en les points (h_1). Faisons maintenant abstraction de r_0 et prenons un polynome r_1 *quelconque* qui s'évanouisse en les points (h_1). Les autres points communs aux courbes S_1 et β_1 sont sur S_0; donc $r_1 S_0$ est de la forme (β_1, S_1), ce qui donne lieu à une relation telle que (12). En conséquence, *si l'on considère le groupe indéfini des polynomes* r_0 *qui s'évanouissent en les points* (h_0),

et le groupe indéfini des polynomes r_1 qui s'évanouissent en les points (h_1), on voit qu'un quelconque des polynomes d'un de ces deux groupes a son CORRESPONDANT *dans l'autre groupe, de telle sorte que deux polynomes correspondants soient liés par la relation* (12).

Par suite aussi, *dans le groupe indéfini des polynomes r_i qui s'évanouissent en les points (h_i), chaque polynome a son correspondant dans l'un quelconque des autres groupes analogues*. La liaison entre deux polynomes correspondants consécutifs n'est autre que la relation (12) avec les indices modifiés

$$r_i \beta_{i+1} \equiv r_{i+1} S_i \qquad (\text{div. } S_{i+1}). \tag{13}$$

La liaison entre deux polynomes correspondants est indépendante de l'ordre dans lequel on envisage deux polynomes S *consécutifs*, comme je vais le prouver.

Prenons les mêmes notations qu'au n° 4 (p. 322), et désignons par r'_1 le correspondant de r_0 dans le nouvel ordre. On aura

$$r_0 \beta'_1 \equiv r'_1 S'_0 \qquad (\text{div. } S'_1)$$

ou, en d'autres termes,

$$r_0 \beta_0 \equiv r'_1 S_1 \qquad (\text{div. } S_0). \tag{14}$$

Considérons ce cas de la relation (13), savoir

$$r_{-1} \beta_0 \equiv r_0 S_{-1} \qquad (\text{div. } S_0),$$

et multiplions membre à membre ces deux dernières équivalences. Il vient ainsi, après suppression du facteur commun r_0,

$$r_{-1} \beta_0^2 \equiv r'_1 S_1 S_{-1} \qquad (\text{div. } S_0).$$

Mais, d'après (5) (p. 321), les deux quantités β_0^2 et $S_1 S_{-1}$ sont équivalentes (div. S_0).

Il reste donc $r_1 \equiv r'_1$ (div. S_0). Si le degré de r'_1 est moindre que celui de S_0, cette équivalence se change en égalité. Mais, d'après la relation (12), on ne manquera pas d'observer que *généralement r_i, quand son degré le permet, n'est déterminé par r_{i-1} qu'à un multiple près de S_i*. Eu égard à cette indétermination dont il n'est pas possible de s'affranchir, nous pouvons écrire $r_{-1} = r'_1$. C'est ce qu'il fallait prouver.

Notons, au passage, la relation (14) qui devient

$$r_0 \beta_0 \equiv r_{-1} S_1 \qquad (\text{div. } S_0)$$

ou, sous une forme plus générale,

(13 *bis*) $$r_i \beta_i \equiv r_{i-1} S_{i+1} \qquad (\text{div. } S_i).$$

7. Il y a ainsi des relations de deux formes, d'ailleurs équivalentes, entre les polynomes r correspondants et consécutifs. Ce sont les relations (13) et (13 *bis*). Il convient maintenant de compléter ces relations en les écrivant sous forme d'égalités, ainsi :

(15) $$r_i \beta_{i+1} = r_{i+1} S_i + t_i S_{i+1},$$
(16) $$r_i \beta_i = r_{i-1} S_{i+1} - g_i S_i.$$

J'introduis ainsi de nouveaux polynomes dont je vais avoir besoin. Ils sont d'un même degré, supérieur d'une unité à celui de r_i. Ils nous fournissent de nouvelles expressions pour les fonctions z et z', envisagées au nº 2. Effectivement, en vertu de (15) et (16), on pourra écrire pour z

$$S_1 = 0, \qquad z = \frac{\beta_0}{\beta_1} = -\frac{g_0}{r_1},$$

et pour z'

$$\beta_1 = 0, \qquad z' = \frac{S_0}{S_1} = -\frac{t_0}{r_1}.$$

De là je conclus, comme au nº 2, que $(g_0 + t_0)$ *s'évanouit en chaque point* (h_0). En conséquence, $(g_0 + t_0)$ appartient au groupe des polynomes r_0. C'est ainsi un polynome de même indice, déduit de r_0 d'une manière spéciale, fixée par les égalités (15) et (16). Ce que je viens de dire pour l'indice zéro s'applique à un indice quelconque.

D'une manière générale, *t_i et g_i étant liés à r_i par* (15) *et* (16), *je poserai*

$$t_i + g_i = (r_i)^1,$$

et ce polynome $(r_i)^1$ appartient au groupe r_i.

Du polynome $(r_i)^1$ on peut déduire un autre polynome par la même loi; je désigne ce dernier par $(r_i)^2$, et ainsi de suite, en sorte que r_i donne lieu à une suite indéfinie de polynomes analogues $(r_i)^j$ où $j = 1, 2, 3, \ldots$. Le degré de $(r_i)^j$ surpasse celui de r_i de j unités.

En faisant l'inversion de S_0, S_1 et de β_0, β_1, comme au n° 4, on voit immédiatement que t_0 et g_0 se changent en $-g'_0$ et $-t'_0$. Par suite, *la liaison entre* r_0 *et* $(r_0)^1$ *se conserve, au signe près, quand on inverse* S_0, S_1 *et* β_0, β_1.

8. Au n° 6 j'ai défini une opération qui, faite sur un polynome r_i, conduit à un autre polynome r_{i+1} ; elle est figurée par la relation (13). Appelons-la l'opération A. Ainsi, par définition de ce symbole d'opération,

$$r_i A = r_{i+1}.$$

Au n° 7 je viens de définir une autre opération qui, faite sur r_i, conduit à un autre polynome de même indice, et que j'ai désigné par $(r_i)^1$. Désignons cette opération par la lettre B, en sorte que

$$r_i B = (r_i)^1 = t_i + g_i ;$$

les polynomes t_i, g_i sont d'ailleurs définis par les identités (15) et (16).

Je vais démontrer la proposition suivante :

Les opérations A *et* B *sont commutatives entre elles, c'est-à-dire qu'on peut changer leur ordre sans changer le résultat.*

En écrivant les symboles d'opération à gauche dans l'ordre où se font ces opérations, et prenant, d'ailleurs, l'indice i égal à zéro pour simplifier l'écriture, j'ai, par définition des opérations A et B,

$$r_0 AB = t_1 + g_1.$$

Je vais maintenant former $r_0 BA$. Le polynome $r_0 B$ n'est autre que $(t_0 + g_0)$. Le produit $(t_0 + g_0)\beta_1$ est de la forme (S_0, S_1). D'après la définition (12), $r_0 BA$ est le coefficient de S_0 dans cette dernière forme. Ainsi, pour avoir $r_0 BA$, il nous faut mettre explicitement $(t_0 + g_0)\beta_1$ sous la forme $a S_0$ (div. S_1). Le polynome cherché est a. C'est ce que je fais par le calcul suivant.

Prenant les identités (15) et (2) aux multiples près de S_0, j'ai

$$r_0 \beta_1 \equiv t_0 S_1, \qquad \beta_1^2 \equiv \gamma_1 S_1 \qquad (\text{div. } S_0).$$

J'en conclus $t_0 \beta_1 \equiv r_0 \gamma_1$, ce que j'écris sous forme d'identité

$$(17) \qquad t_0 \beta_1 = r_0 \gamma_1 + u S_0,$$

le polynome u étant, pour le moment, inconnu. En vue de déterminer u, je considère ce cas de l'équation (16)

$$(18) \qquad r_1 \beta_1 = r_0 S_2 - g_1 S_1.$$

Multipliant les deux membres de (17) par S_1, ceux de (18) par S_0, et ajoutant membre à membre, j'ai

$$(t_0 S_1 + r_1 S_0)\beta_1 = r_0(\gamma_1 S_1 + S_0 S_2) + (u - g_1) S_0 S_1.$$

A cause de (15), le premier membre se réduit à $r_0 \beta_1^2$. A cause de (2), le terme $r_0(\gamma_1 S_1 + S_0 S_2)$ se réduit aussi à $r_0 \beta_1^2$. Ces termes se détruisant, il reste $u = g_1$. La relation (17) prend donc la forme

$$(19) \qquad t_0 \beta_1 = r_0 \gamma_1 + g_1 S_0.$$

D'autre part, les équations (15) et (16), pour $i = 0$, et prises aux multiples près de S_1, nous donnent, si nous les divisons membre à membre,

$$g_0 \beta_1 \equiv - r_1 \beta_0 \qquad (\text{div. } S_1).$$

Cette relation, jointe à (19), conduit à celle-ci :

$$(20) \qquad (t_0 + g_0)\beta_1 \equiv r_0 \gamma_1 - r_1 \beta_0 + g_1 S_0 \qquad (\text{div. } S_1).$$

Il nous reste à mettre effectivement sous la forme $a' S_0 (\text{div. } S_1)$ la quantité suivante

$$v = r_0 \gamma_1 - r_1 \beta_0,$$

qui figure au second membre de (20). A cet effet, recourons aux équivalences (3) et (4), que je transcris ici

$$\beta_0 S_2 \equiv - \pi_1 \beta_1, \qquad (\pi_1 + \gamma_1)\beta_1 \equiv \beta_2 S_0 \qquad (\text{div. } S_1),$$

et concluons d'abord

$$\gamma_1 \beta_1 \equiv \beta_2 S_0 + \beta_0 S_2 \qquad (\text{div. } S_1).$$

Par l'élimination de γ_1 j'ai ensuite

$$\beta_1 v \equiv r_0(\beta_2 S_0 + \beta_0 S_2) - r_1 \beta_0 \beta_1 \qquad (\text{div. } S_1).$$

D'après l'équation (16), où l'on fait $i = 1$, $r_1 \beta_1$ peut être remplacé par $r_0 S_2$. La dernière équivalence se réduit ainsi à

$$\beta_1 v \equiv r_0 \beta_2 S_0 \qquad (\text{div. } S_1).$$

Enfin des équations (15) et (16), prises pour $i = 1$, aux multiples près de S_1, et divisées membre à membre, je conclus

$$r_0 \beta_2 \equiv t_1 \beta_1 \quad (\text{div. } S_1),$$

et, par suite, le facteur β_1 supprimé,

$$v \equiv t_1 S_0 \quad (\text{div. } S_1).$$

Cette expression étant mise pour v dans l'équivalence (20) me donne

$$(t_0 + g_0)\beta_1 \equiv (t_1 + g_1) S_0 \quad (\text{div. } S_1).$$

Suivant la remarque ci-dessus, cette relation exprime la propriété

$$r_0 \mathrm{BA} = r_0 \mathrm{AB}.$$

C'est la proposition qu'il s'agissait d'établir.

9. D'après cette proposition, on peut indiquer un nombre quelconque d'opérations A et B successives sans préciser leur ordre. J'ai tout d'abord défini l'opération B faite sur un polynome d'indice quelconque i, et j'ai désigné le résultat $r_i\mathrm{B}$ par $(r_i)^1$. Je peux maintenant, dans cette notation, supprimer les parenthèses et considérer d'une manière générale le symbole r_i^j comme le résultat de i opérations A, et j opérations B faites sur r_0.

Il est à remarquer que l'indice inférieur i est susceptible de valeurs négatives comme on l'a déjà vu, tandis que l'indice j n'est susceptible que de valeurs positives.

Au moment de pénétrer plus avant dans cette étude, notons ces deux propriétés évidentes d'après les définitions :

1° Si l'on considère divers polynomes du groupe r_0, désignés par r'_0, r''_0, ..., on a

$$(r'_0 + r''_0 + \ldots)\mathrm{A}^i \mathrm{B}^j = r'^j_i + r''^j_i + \ldots.$$

2° Si l'on désigne par u un polynome quelconque, on a

$$(ur_0)\mathrm{A}^i \mathrm{B}^j = ur_i^j.$$

J'ai déjà fait observer (p. 326) que l'opération A n'est généralement pas entièrement déterminée. Cette indétermination a lieu, pour l'opération appliquée à r_{i-1}, quand le degré de r_i égale ou surpasse celui de S_i. Le polynome r_i comporte alors dans sa détermina-

tion un multiple arbitraire de S_i, c'est-à-dire un produit de la forme HS_i où H est un polynome arbitraire d'un degré égal à la différence des degrés de r_i et S_i. C'est ce que montre bien l'une ou l'autre des relations (15) ou (16).

Par la première de ces relations, on voit que, r_0 étant de degré $(d_0+\delta)$, r_1 est de degré $(d_1+\delta+1)$, r_2 de degré $(d_2+\delta+2)$, etc., et généralement r_i de degré $(d_i+\delta+i)$. Je désigne ici, comme précédemment, le degré de S_i par d_i.

En général, si r_0 est donné, de degré $(d_0+\delta)$, le correspondant r_i comprend des arbitraires introduites par des polynomes successifs tels que H, et ayant les degrés $\delta\pm 1$, $\delta\pm 2$, ..., suivant le signe de i. Je me propose de préciser ces faits.

10. Je vais considérer une suite spéciale de polynomes r correspondants. Les équations (15) et (16) sont satisfaites si l'on prend

$$r_{i-1}=0, \qquad r_i=S_i, \qquad r_{i+1}=\beta_{i+1}, \qquad g_i=-\beta_i, \qquad t_i=0.$$

On peut donc envisager S_i comme appartenant au groupe r_i et succédant à $r_{i-1}=0$. Telle est l'origine de la suite que je considère. J'emploierai, pour la représenter, une notation qui rappelle sa définition

$$\ldots, \qquad (S_i)_{-2}=0, \qquad (S_i)_{-1}=0, \qquad (S_i)=S_i, \qquad (S_i)_1=\beta_{i+1}, \qquad \ldots,$$

en sorte que le polynome correspondant r_{i+m} sera représenté par $(S_i)_m$.

D'après les valeurs de g_i et t_i ci-dessus, nous avons

$$(S_i)^1=g_i+t_i=-\beta_i.$$

Comparons ce résultat avec $(S_i)_1=\beta_{i+1}$, pour en déduire, après changement de i en $(i+1)$, cette relation

$$(21) \qquad (S_i)_1=-(S_{i+1})^1.$$

C'est la propriété essentielle de ces suites particulières. On la généralise aisément. Effectuant l'opération A aux deux membres de (21), j'ai d'abord

$$(S_i)_2=-(S_{i+1})^1_1.$$

Changeant ensuite, dans (21), i en $(i+1)$ et faisant l'opéra-

tion B, j'ai

$$(S_{i+1})'_1 = -(S_{i+2})^2;$$

donc

$$(S_i)_2 = +(S_{i+2})^2,$$

et généralement

$$(S_i)_m = (-1)^m (S_{i+m})^m. \tag{22}$$

Au moyen des équations (2) et (3) (p. 319) on trouve aisément $(S_i)_2 = -\pi_{i+2}$. Quant à $(S_i)_3$, $(S_i)_4$, ..., ce sont des polynomes qui n'avaient pas été introduits jusqu'à présent.

11. Il est naturel d'introduire en même temps des suites analogues de polynomes particuliers, relatifs à l'ordre inverse de la série des S. Ceci nous conduit à des suites dont nous pouvons reconnaître les propriétés en conservant l'ordre direct. Faisons, à cet effet, dans les relations (15) et (16), qui se trouvent ainsi vérifiées,

$$r_{i-1} = \beta_i, \qquad r_i = S_{i+1}, \qquad r_{i+1} = 0, \qquad t_i = \beta_{i+1}, \qquad g_i = 0.$$

Désignons par (S'_i) le polynome S_{i+1} ainsi envisagé comme appartenant au groupe r_i; par $(S'_i)_m$ le correspondant r_{i+m}. Nous avons, de la sorte, la suite particulière

$$\ldots, \quad (S'_i)_{-2} = \pi_{i-1} + \gamma_{i-1}, \quad (S'_i)_{-1} = \beta_i, \quad (S'_i) = S_{i+1},$$
$$(S'_i)_1 = (S'_i)_2 = (S'_i)_3 = \ldots = 0,$$

avec $(S'_i)' = \beta_{i+1}$. De là une propriété corrélative de celle qu'exprime l'égalité (22), et qui est traduite, à son tour, par la relation

$$(S'_i)_{-m} = (S'_{i-m})^m. \tag{23}$$

12. Soit un polynome quelconque du groupe r_i; envisageons une suite de polynomes lui correspondant, r_{i+1}, r_{i+2}, ...; r_{i-1}, r_{i-2}, ..., et choisis en fixant arbitrairement les constantes qui figurent dans leur détermination successive. Désignons par R_{i+m} le plus général des polynomes du groupe r_{i+m} qui corresponde à r_i. Je me propose d'exprimer, au moyen des éléments introduits précédemment, la forme de R_{i+m}, ou, pour mieux dire, la forme de la différence $(R_{i+m} - r_{i+m})$.

D'après l'observation du n° 9, la forme générale de R_{i+1} est

$$r_{i+1} + HS_{i+1},$$

ce que j'écris, d'après la notation du n° 10,

$$R_{i+1} = r_{i+1} + H(S_{i+1}).$$

Ce nouveau polynome du groupe r_{i+1} a pour correspondant particulier, d'après une autre observation du n° 9 et d'après les définitions du n° 10, $r_{i+2} + H(S_{i+1})_1$. Donc le correspondant le plus général est

$$R_{i+2} = r_{i+2} + H(S_{i+1})_1 + H_1(S_{i+2}).$$

D'une manière générale, pour m positif, on aura

$$R_{i+m} = r_{i+m} + H(S_{i+1})_{m-1} + H_1(S_{i+2})_{m-2} + H_2(S_{i+3})_{m-3} + \ldots + H_{m-1}(S_{i+m}).$$

Si $d_i + \delta$ est le degré de r_i, les polynomes H, H_1, ..., H_{m-1} ont respectivement (n° 9) les degrés $\delta + 1$, $\delta + 2$, ..., $\delta + m$, et ces polynomes sont entièrement arbitraires.

Je transforme maintenant cette dernière égalité au moyen de la relation (22), qui permet de réduire les indices inférieurs à zéro. Les polynomes H, H_1, ... étant d'ailleurs arbitraires, nous pouvons faire abstraction des signes $\pm$ qui s'introduisent, et écrire simplement

$$R_{i+m} = r_{i+m} + H(S_{i+m})^{m-1} + H_1(S_{i+m})^{m-2} + H_2(S_{i+m})^{m-3} + \ldots + H_{m-1}(S_{i+m}).$$

J'aurai à appliquer cette formule en y faisant $i = -m$. Dans cette hypothèse, qui ne diffère du cas général que par la forme extérieure, nous pouvons ainsi énoncer ce résultat.

Soit un polynome r_0, supposé donné, de degré $d_0 + \delta$. L'expression la plus générale du polynome R_0, appartenant au même groupe, et ayant un correspondant R_{-m} égal à un correspondant r_{-m} de r_0, est la suivante :

$$(24)\quad R_0 = r_0 + H(S_0)^{m-1} + H_1(S_0)^{m-2} + H_2(S_0)^{m-3} + \ldots + H_{m-1}(S_0),$$

dans laquelle H, H_1, H_2, ..., H_{m-1} sont des polynomes arbitraires dont les degrés respectifs sont

$$\delta - m + 1, \qquad \delta - m + 2, \qquad \delta - m + 3, \qquad \ldots, \qquad \delta.$$

A peine est-il besoin d'observer que ces polynomes n'existent qu'autant que les degrés indiqués sont positifs. Si, par exemple, δ est

négatif, c'est-à-dire si r_0 est de degré moindre que S_0, aucun des polynomes H n'existe, et R_0 ne diffère pas de r_0.

13. C'est d'une manière analogue que se résout le problème corrélatif. D'après la notation du n° 11, le polynome du groupe r_{i-1}, le plus général qui corresponde à r_i, a pour expression

$$R_{i-1} = r_{i-1} + H(S'_{i-1}).$$

Le polynome arbitraire H a ici pour degré la différence entre celui de r_{i-1} et celui de (S'_{i-1}), qui n'est autre que S_i. On reconnaît sans peine que la progression des degrés des polynomes correspondants peut s'exprimer de cette autre manière : *Si r_i est du degré $d_{i+1}+\varepsilon$, alors r_{i-1} est du degré $d_i+\varepsilon+1$.* C'est notamment ce qui s'aperçoit immédiatement sur l'équation (16).

Dénotons donc par $(d_{i+1}+\varepsilon)$ le degré de r_i, alors le degré de H est $(\varepsilon+1)$. J'ai ensuite

$$R_{i-2} = r_{i-2} + H(S'_{i-1})_{-1} + H_1(S'_{i-2}),$$

où H_1 est un polynome arbitraire du degré $(\varepsilon+2)$; enfin

$$\begin{aligned}R_{i-m} = r_{i-m} &+ H(S'_{i-1})_{-(m-1)} \\ &+ H_1(S'_{i-2})_{-(m-2)} + H_2(S'_{i-3})_{-(m-3)} + \ldots + H_{m-1}(S'_{i-m})\end{aligned}$$

ou, d'après (23),

$$\begin{aligned}R_{i-m} = r_{i-m} &+ H(S'_{i-m})^{m-1} \\ &+ H_1(S'_{i-m})^{m-2} + H_2(S'_{i-m})^{m-3} + \ldots + H_{m-1}(S'_{i-m}).\end{aligned}$$

Faisant dans cette formule $i=m$, j'ai cette proposition :

Soit un polynome r_0, supposé donné, de degré $d_1+\varepsilon$. L'expression la plus générale du polynome R_0 qui a un correspondant R_m égal à un correspondant r_m de r_0, est la suivante :

$$(25)\quad R_0 = r_0 + H(S'_0)^{m-1} + H_1(S'_0)^{m-2} + H_2(S'_0)^{m-3} + \ldots + H_{m-1}(S'_0),$$

dans laquelle $H, H_1, H_2, \ldots, H_{m-1}$ sont des polynomes arbitraires ayant respectivement pour degrés les nombres $\varepsilon-m+1$, $\varepsilon-m+2$, ..., ε.

En particulier, si le degré de r_0 est inférieur à celui de S_1, on a $R_0 = r_0$.

Cette proposition est la corrélative de la précédente, et pouvait être énoncée sans démonstration directe.

On doit comprendre aisément la portée de ces deux propositions si l'on envisage les seconds membres des formules (25) et (24). Les opérations par lesquelles s'obtiennent les polynomes $(S_0)^i$ et $(S'_0)^i$ ne sont autres que l'opération B répétée en prenant pour point de départ, soit S_0, soit S_1. Cette opération, définie par les équations (15) et (16), n'exige que la considération des données S_0, S_1, β_0, β_1. Pour former les seconds membres de (24) et (25), il n'est pas nécessaire de calculer les polynomes successifs S_2, S_3, ..., β_2, β_3, ...

14. J'applique maintenant la dernière proposition en supposant $r_0 = (S'_0)^m$. Un de ses correspondants particuliers r_m sera $(S'_0)^m_m$, ou, suivant (23), (S'_m), c'est-à-dire S_{m+1}. J'ai donc cette conséquence :

L'expression la plus générale du polynome r_0 qui a pour correspondant $r_m = S_{m+1}$ est

(26) $$r_0 = (S'_0)^m + H(S'_0)^{m-1} + H_1(S'_0)^{m-2} + \ldots + H_{m-1}(S'_0),$$

dans laquelle H, H_1, ..., H_{m-1} *sont des polynomes arbitraires ayant leurs degrés respectivement égaux à* 1, 2, ..., *m*.

Supposons un de ces cas dont il a été question au n° 5 (p. 324), et dans lesquels la suite S s'arrête à S_m, parce que S_{m+1} est identiquement nul. Ceci étant supposé, il y a nécessairement parmi les polynomes correspondant à S_{m+1}, qui est nul, des polynomes nuls aussi. Donc :

Si S_{m+1} est identiquement nul, il existe des polynomes H, H_1, ..., H_{m-1} *des degrés* 1, 2, ..., (*m* — 1), *fournissant l'identité*

(27) $$(S'_0)^m + H(S'_0)^{m-1} + H_1(S'_0)^{m-2} + \ldots + H_{m-1}(S'_0) = 0.$$

Il y a une proposition corrélative résultant de la formule (24) pour le cas où S_{-m} est nul. Mais je n'ai pas besoin de l'énoncer.

Ce qui importe le plus, c'est de trouver la réciproque de la dernière proposition. A cet effet, je considère le premier membre de l'équation (27) comme étant un polynome r_0, et je cherche son correspondant le plus général r_m. Un de ses correspondants particuliers

est le suivant :

$$(S'_0)_m^m + H(S'_0)_m^{m-1} + H_1(S'_0)_m^{m-2} + \ldots + H_{m-1}(S'_0)_m.$$

D'après la formule (23), cette expression se transforme en cette autre :

$$(S'_m) + H(S'_{m-1})_1 + H_1(S'_{m-2})_2 + \ldots + H_{m-1}(S'_0)_m,$$

et, par la définition du symbole (S'_i), elle se réduit à (S'_m). C'est d'ailleurs ce qui était évident *a priori*, puisque nous avons formé le premier membre de (27) comme expression de r_0 correspondant à $r_m = (S'_m) = S_{m+1}$.

Ainsi le premier membre de (27), envisagé comme un polynome r_0, a pour un de ses correspondants $r_m = S_{m+1}$. D'après le n° 12, l'expression la plus générale de r_m sera, en employant d'autres lettres, K, pour les polynomes arbitraires,

$$r_m = S_{m+1} + K(S_m)^{m-1} + K_1(S_m)^{m-2} + \ldots + K_{m-1}(S_m).$$

Le degré de K_{m-1} est égal à la différence des degrés de S_{m+1} et de S_m; les degrés des autres polynomes K sont moindres. Si donc d_{m+1} est inférieur à d_m, les polynomes K n'existent pas, et r_m n'a qu'une seule détermination qui est S_{m+1}.

Supposons qu'il en soit ainsi. Puisque r_0 est nul, une des déterminations de r_m est identiquement nulle; et puisqu'il n'existe qu'une seule détermination r_m, on a nécessairement $S_{m+1} = 0$.

Cette circonstance $d_{m+1} < d_m$ s'offre dans certains cas dont il a été question au n° 5 (p. 324). Elle se présente quand $d_1 < d_0$. Il y a alors une suite de valeurs décroissantes du degré d_m, disons *une période des degrés décroissants pour les polynomes* S. Suivant les cas, cette période est suivie d'une période de degrés croissants, ou bien se termine par l'arrêt de la série S. Quoi qu'il en soit, nous avons cette proposition :

Si l'identité (27) *a lieu de telle sorte que* S_{m+1} *appartienne à la période des degrés décroissants, alors* S_{m+1} *est nécessairement nul.*

Si, au contraire, S_{m-1} appartient à la période des degrés croissants, nous avons cette simple conséquence qu'*il existe des polynomes* K, $K_1, \ldots, K_{m-1}$ *donnant identiquement*

$$(28) \qquad S_{m+1} + K(S_m)^{m-1} + K_1(S_m)^{m-2} + \ldots + K_{m-1}(S_m) = 0.$$

Mais dans ce cas aussi, comme on l'a vu au n° 5, les polynomes successifs S ne sont pas entièrement déterminés. Je vais maintenant montrer que, *dans le cas où* S_{m+1} *appartient à la période des degrés croissants, il est possible de choisir la suite* $S_2, S_3, \ldots, S_{m+1}$, *de telle sorte que l'on ait identiquement* $S_{m+1} = 0$.

La démonstration de cette proposition va faire l'objet des numéros suivants.

15. Tout d'abord, examinons avec attention de quelle manière les polynomes S, β se déterminent successivement. Revenons à la théorie exposée dans le n° 2 (p. 319-321), et supposons toujours donnés S_0, S_1, β_0, β_1. Par le moyen des équations (2), (3) et (4) on calcule S_2 et β_2, puis par des équations analogues S_3 et β_3, et ainsi de suite. Admettons que les degrés de $S_0, S_1, S_2, \ldots$ décroissent d'abord, en sorte que les premiers polynomes ne présentent aucune indétermination. L'indétermination commencera, je suppose, au couple S_{i+2}, β_{i+2}. Cette hypothèse n'apporte, d'ailleurs, aucune restriction à la généralité : on pourra, en effet, prendre $i = 0$ pour le cas où l'indétermination aurait lieu dès le début.

Le couple S_{i+2}, β_{i+2} se détermine par les relations suivantes, analogues à (2), (3) et (4) :

$$\beta_{i+1}^2 = S_{i+2} S_i + \gamma_{i+1} S_{i+1},$$

$$\left.\begin{array}{r}\beta_i S_{i+2} \equiv -\pi_{i+1}\beta_{i+1} \\ (\pi_{i+1}+\gamma_{i+1})\beta_{i+1} \equiv \beta_{i+2} S_i\end{array}\right\} \quad (\text{div. } S_{i+1}).$$

Par hypothèse, le degré de S_{i+2} égale ou surpasse celui de S_{i+1}. Soit ainsi $d_{i+2} - d_{i+1} = \delta \geqq 0$. Après avoir déterminé, d'une manière quelconque, S_{i+2} par la première identité, on peut, au lieu de ce polynome, en prendre un autre $\mathfrak{S}_{i+2}$, choisi de cette manière

$$\mathfrak{S}_{i+2} = S_{i+2} + \lambda S_{i+1}, \tag{29}$$

λ étant un polynome arbitraire du degré δ. On devra, en même temps, prendre, au lieu de γ_{i+1}, un autre polynome $\mathfrak{g}_{i+1}$, savoir

$$\mathfrak{g}_{i+1} = \gamma_{i+1} - \lambda S_i.$$

La deuxième relation détermine π_{i+1} à un multiple près de S_{i+1}; mais cette circonstance, comme on voit, n'a pas d'influence sur $\mathfrak{b}_{i+2}$, polynome qui doit remplacer β_{i+2} et qui se calculera par la troisième

équivalence se changeant en celle-ci

$$(\pi_{i+1} + \gamma_{i+1} - \lambda S_i)\beta_{i+1} \equiv \mathfrak{b}_{i+2} S_i \qquad (\text{div. } S_{i+1}).$$

On en conclura

$$(29\ bis) \qquad \mathfrak{b}_{i+2} = \beta_{i+2} - \lambda\beta_{i+1} + \mu S_{i+1},$$

et μ sera un nouveau polynome arbitraire, du degré $(\delta + 1)$.

Ce sont donc les formules (29) et (29 *bis*) qui précisent le mode d'indétermination des polynomes S, β. En poursuivant, on a dans S_{i+3} et β_{i+3} deux nouveaux polynomes arbitraires λ_1, μ_1. La formule qui donne les degrés successifs d_m (p. 324) montre que les différences $(d_{i+2} - d_{i+1})$ forment une progression arithmétique, ayant 2 pour raison. De la sorte, λ_1, μ_1 ont les degrés $\delta + 2$, $\delta + 3$, et ainsi de suite. On introduit donc successivement des polynomes arbitraires ayant pour degrés les nombres successifs δ, $\delta + 1$, $\delta + 2$, $\delta + 3$, $\delta + 4$, $\delta + 5$, ...

16. Que l'on prenne un quelconque des couples $\mathfrak{S}_{i+2}$, $\mathfrak{b}_{i+2}$ en place de S_{i+2}, β_{i+2}, le groupe des polynomes r_{i+1} n'en est pas altéré. C'est ce qui résulte de la définition de ce groupe (6). Mais, en outre, la correspondance entre r_i et r_{i+1} n'est pas altérée non plus, comme on le voit par l'identité (15).

De plus, l'opération B, faite sur r_{i+1}, n'est pas altérée non plus. Le résultat est, en effet, r_iAB, et ne diffère pas de r_iBA (8). Or r_iB n'est pas changé, et nous venons de dire que l'opération A, faite sur un polynome d'indice i, n'est pas altérée.

En conséquence, nous pouvons effectuer, sur un polynome r_{i+1}, un nombre quelconque de fois l'opération B sans nous préoccuper de celui des couples $\mathfrak{S}_{i+2}$, $\mathfrak{b}_{i+2}$ que nous adoptons. Il faut toutefois observer que cette opération est déterminée, quand le degré de r_{i+1} le comporte, à un multiple près de S_{i+1}. Si donc nous faisons cette opération d'une manière entièrement déterminée en adoptant le couple $\mathfrak{S}_{i+2}$, $\mathfrak{b}_{i+2}$, et aussi d'une manière déterminée en adoptant un autre couple S_{i+2}, β_{i+2}, les deux résultats peuvent différer, mais seulement par un multiple de S_{i+1}.

C'est précisément le cas où nous nous sommes placés en introduisant les symboles (S) et (S′) (10 et 11). Suivant la définition du symbole (S′), nous aurons

$$(S'_{i+1}) = S_{i+2}, \qquad (\mathfrak{S}'_{i+1}) = \mathfrak{S}_{i+2},$$

et, d'après (29),

$$(\mathfrak{S}'_{i+1}) = (S'_{i+1}) + \lambda(S_{i+1}).$$

Effectuant l'opération B aux deux membres, et remarquant qu'il a été convenu de la faire d'une manière déterminée sur les symboles (S) et (S'), j'aurai à compléter le résultat par un multiple de (S_{i+1}). Ce sera donc

$$(\mathfrak{S}'_{i+1})^1 = (S'_{i+1})^1 + \lambda(S_{i+1})^1 + \nu(S_{i+1}).$$

Nous pouvons aisément trouver le polynome ν. Effectivement, d'après les nos **10** et **11**,

$$(\mathfrak{S}'_{i+1})^1 = \mathfrak{b}_{i+2}, \qquad (S'_{i+1})^1 = \beta_{i+2}, \qquad (S_{i+1})^1 = -\beta_{i+1}, \qquad (S_{i+1}) = S_{i+1}.$$

Donc, suivant (29 *bis*), ν coïncide avec μ. Répétant de nouveau l'opération B de la même manière, j'introduis un nouveau terme analogue à $\nu(S_{i+1})$. J'aurai ainsi une relation de la forme suivante :

$$(\mathfrak{S}'_{i+1})^2 = (S'_{i+1})^2 + \lambda(S_{i+1})^2 + \mu(S_{i+1})^1 + \mathfrak{a}(S_{i+1}$$

D'après le n° **11**, on a

$$(S'_{i+1})^2 = (S'_{i+3})_{-2} = \pi_{i+2} + \gamma_{i+2}.$$

On a une expression analogue pour $(\mathfrak{S}'_{i+1})^2$; il est donc clair que le polynome $\mathfrak{a}$ dépend de la manière dont on prolonge les deux suites par $\mathfrak{S}_{i+3}$, $\mathfrak{b}_{i+3}$ d'une part, par S_{i+3}, β_{i+3} de l'autre.

Faisons maintenant cette convention : les polynomes λ, μ restant quelconques, prenons les deux doubles suites $\mathfrak{S}_{i+3}$, $\mathfrak{b}_{i+3}$, $\mathfrak{S}_{i+4}$, $\mathfrak{b}_{i+4}$, ... et S_{i+3}, β_{i+3}, S_{i+4}, β_{i+4}, ... de telle sorte qu'elles se réduisent à coïncider dès que λ et μ seront nuls. Ceci convenu, $\mathfrak{a}$ sera identiquement nul avec λ et μ. De même on aura

$$(29\ ter)\qquad (\mathfrak{S}'_{i+1})^p = (S'_{i+1})^p + \lambda(S_{i+1})^p + \mu(S_{i+1})^{p-1} + \mathfrak{a}_2(S_{i+1})^{p-2} + \mathfrak{a}_3(S_{i+1})^{p-3} + \ldots + \mathfrak{a}_p(S_{i+1}).$$

On voit que, d'après notre convention, tous ces polynomes $\mathfrak{a}$, qui dépendent non seulement de leur indice, mais encore du nombre p, sont tous nuls en même temps que λ et μ.

17. Après ces détails, il nous est possible de procéder à une démonstration bien nette de la proposition que nous avons en vue.

Par hypothèse, nos données sont S_0, S_1, β_0, β_1, des polynomes

fixes, d'où se déduit une double suite S_2, β_2, S_3, β_3, ... Nous supposons que S_{i+2} est le premier des polynomes S dont le degré surpasse ou égale le degré du polynome précédent. L'indice i pourra d'ailleurs être zéro, et le raisonnement n'exclura pas le cas où le degré de S_1 surpasserait celui de S_0, comme on va voir.

J'imagine la double suite entièrement déterminée, et j'emploie pour les termes de cette suite les lettres gothiques à partir de l'indice $(i+2)$, en sorte que ces termes sont

$$\begin{array}{cccccccc} S_0, & S_1, & S_2, & \ldots, & S_i, & S_{i+1}, & \mathfrak{S}_{i+2}, & \mathfrak{S}_{i+3}, \quad \ldots, \\ \beta_0, & \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_i, & \beta_{i+1}, & \mathfrak{b}_{i+2}, & \mathfrak{b}_{i+3}, \quad \ldots. \end{array}$$

Pour rappeler cette convention, il convient d'employer les lettres gothiques dans les symboles (S'). Par hypothèse, l'égalité (27) a lieu entre les symboles dont il s'agit. Afin d'éviter une redite, je prendrai une égalité un peu plus générale, et je supposerai

$$(30) \quad (\mathfrak{S}'_0)^m + H(\mathfrak{S}'_0)^{m-1} + H_1(\mathfrak{S}'_0)^{m-2} + \ldots + H_{m+1}(\mathfrak{S}'_0) + A(\mathfrak{S}_0) = 0.$$

J'ajoute ainsi un terme qui est multiple de S_0.

Considérons, ainsi que nous l'avons déjà fait au n° 14, le premier membre de l'équation (30) comme un polynome r_0, et prenons son correspondant le plus général r_i. D'après les définitions des symboles employés, on a

$$(\mathfrak{S}'_0)^m_i = (\mathfrak{S}'_i)^{m-i}, \qquad (\mathfrak{S}'_0)^{m-1}_i = (\mathfrak{S}'_i)^{m-i-1}, \qquad \ldots, \qquad (\mathfrak{S}'_0)^i_i = (\mathfrak{S}'_i),$$

puis

$$(\mathfrak{S}'_0)^{i-1}_i = 0, \qquad (\mathfrak{S}'_0)^{i-2}_i = 0, \qquad \ldots, \qquad (\mathfrak{S}'_0)_i = 0;$$

enfin

$$(\mathfrak{S}_0)_i = (-1)^i (\mathfrak{S}_i)^i.$$

En multipliant ces termes par les coefficients correspondants 1, H, H_1, ..., A, et faisant la somme, on a l'expression d'un correspondant r_i. Pour avoir le plus général, il nous faut ajouter une somme de multiples des polynomes $(\mathfrak{S}_i)^{i-1}$, $(\mathfrak{S}_i)^{i-2}$, ..., $(\mathfrak{S}_i)$. Ces multiples, d'après (30), pourront être choisis de manière à rendre r_i identiquement nul. J'ai donc, comme conséquence de (30), cette égalité

$$(31) \quad \begin{aligned} &(\mathfrak{S}'_i)^{m-i} + H(\mathfrak{S}'_i)^{m-i-1} + H_1(\mathfrak{S}'_i)^{m-i-2} + \ldots + H_{m-i-1}(\mathfrak{S}'_i) \\ &+ (-1)^i A(\mathfrak{S}_i)^i + K_1(\mathfrak{S}_i)^{i-1} + K_2(\mathfrak{S}_i)^{i-2} + \ldots + K_i(\mathfrak{S}_i) = 0, \end{aligned}$$

qui coïncide avec (30) quand on suppose $i = 0$. C'est maintenant

cette dernière (31) qui va servir de point de départ pour notre analyse.

Prenant de nouveau le correspondant r_{i+1} du premier membre de (31) et déterminant le polynome qui s'introduit, de manière à avoir zéro pour résultat, j'obtiendrai

$$\begin{aligned}(\mathfrak{S}'_{i+1})^{m-i-1} + \mathrm{H}(\mathfrak{S}'_{i+1})^{m-i-2} + \mathrm{H}_1(\mathfrak{S}'_{i+1})^{m-i-3} + \ldots \\ + \mathrm{H}_{m-i-2}(\mathfrak{S}'_{i+1}) + (-1)^{i+1}\mathrm{A}(\mathfrak{S}_{i+1})^{i+1} + \mathrm{K}_1(\mathfrak{S}_{i+1})^{i} \\ + \mathrm{K}_2(\mathfrak{S}_{i+1})^{i-1} + \ldots + \mathrm{K}_i(\mathfrak{S}_{i+1})^1 + \mathrm{K}_{i+1}(\mathfrak{S}_{i+1}) = 0.\end{aligned}$$

Je vais maintenant substituer à la suite $S_0, S_1, \ldots, S_{i+1}, \mathfrak{S}_{i+2}, \mathfrak{S}_{i+3}, \ldots$ cette autre $S_0, S_1, \ldots, S_{i+1}, S_{i+2}, S_{i+3}, \ldots$, dans laquelle existent les polynomes arbitraires λ, μ, et dont tous les termes sont déterminés par la convention expliquée au n° 16.

On voit aisément que ce changement n'altère en aucune façon les symboles $(\mathfrak{S}_{i+1})^k$, pour lesquels on doit mettre seulement les nouvelles lettres S. Quant aux symboles $(\mathfrak{S}'_{i+1})^k$, il sont modifiés conformément à la formule générale (29 *ter*). Le résultat a donc la forme suivante :

$$(32)\qquad \begin{aligned}&(S'_{i+1})^{m-i-1} + \mathrm{H}(S'_{i+1})^{m-i-2} \\ &+ \mathrm{H}_1(S'_{i+1})^{m-i-3} + \ldots + \mathrm{H}_{m-i-2}(S'_{i+1}) \\ &+ \lambda(S_{i+1})^{m-i-1} + (\mu + \mathrm{H}\lambda)(S_{i+1})^{m-i-2} \\ &+ c_3(S_{i+1})^{m-i-3} + \ldots + c_{m-i}(S_{i+1}) \\ &+ (-1)^{i+1}\mathrm{A}(S_{i+1})^{i+1} + \mathrm{K}_1(S_{i+1})^{i} \\ &\qquad + \mathrm{K}_2(S_{i+1})^{i-1} + \ldots + \mathrm{K}_{i+1}(S_{i+1}) = 0.\end{aligned}$$

Les coefficients c_p, au nombre desquels on doit compter λ et $\mu + \mathrm{H}\lambda$ comme les deux premiers, sont des combinaisons doublement linéaires des H et des quantités α. On voit ainsi que ces coefficients c_p, fonctions entièrement déterminées des arbitraires de λ, μ, s'évanouissent avec λ, μ.

Nous opérons maintenant avec la suite $S_0, S_1, \ldots, S_{i+2}, S_{i+3}, \ldots$. Exécutons l'opération A sur le premier membre de l'équation (32), et de manière à avoir zéro pour résultat. Ceci donnera une relation telle que

$$\begin{aligned}&(S'_{i+2})^{m-i-2} + \mathrm{H}(S'_{i+2})^{m-i-3} + \mathrm{H}_1(S'_{i+2})^{m-i-4} + \ldots \\ &+ \mathrm{H}_{m-i-3}(S'_{i+2}) - \lambda(S_{i+2})^{m-i} - (\mu + \mathrm{H}\lambda)(S_{i+2})^{m-i-1} \\ &- c_3(S_{i+2})^{m-i-2} - \ldots - c_{m-i}(S_{i+2})^1 + (-1)^{i+2}\mathrm{A}(S_{i+2})^{i+2} \\ &- \mathrm{K}_1(S_{i+2})^{i+1} - \mathrm{K}_2(S_{i+2})^{i} - \ldots - \mathrm{K}_{i+1}(S_{i+2})^1 - \mathrm{K}_{i+2}(S_{i+2}) = 0.\end{aligned}$$

Il faut noter que, parmi les polynomes K, le dernier K_{i+2} est le seul qui dépende des arbitraires contenues dans λ et μ.

Je substitue maintenant à la double suite S_0, S_1, ..., S_{i+2}, S_{i+3}, ..., β_0, β_1, ..., β_{i+2}, β_{i+3}, ... une autre double suite qui en diffère, à partir de S_{i+3} et β_{i+3}, d'une manière analogue à celle dont différaient tout à l'heure les doubles suites à partir de S_{i+2} et β_{i+2}. J'introduis de la sorte deux nouveaux polynomes arbitraires λ_1, μ_1, et je transforme la dernière relation en exprimant ses termes par les nouveaux symboles.

Pour ne pas compliquer l'écriture, je garde les mêmes lettres S; le résultat aura cette forme

$$
\begin{aligned}
(33)\quad & (S'_{i+2})^{m-i-2} + H(S'_{i+2})^{m-i-3} + H_1(S'_{i+2})^{m-i-4} + \ldots + H_{m-i-3}(S'_{i+2}) \\
& - \lambda(S_{i+2})^{m-i} - (\mu + H\lambda)(S_{i+2})^{m-i-1} + (\lambda_1 - c_3)(S_{i+2})^{m-i-2} \\
& + (\mu_1 + H\lambda_1 - c_4)(S_{i+2})^{m-i-3} + \mathfrak{c}_5(S_{i+2})^{m-i-4} \\
& + \mathfrak{c}_6(S_{i+2})^{m-i-5} + \ldots + \mathfrak{c}_{m-i+1}(S_{i+2}) + (-1)^i A(S_{i+2})^{i+2} \\
& \qquad - K_1(S_{i+2})^{i+1} - K_2(S_{i+2})^{i} - \ldots - K_{i+1}(S_{i+2})^1 - K_{i+2}(S_{i+2}) = 0.
\end{aligned}
$$

Les coefficients $\mathfrak{c}_p$ se réduisent tous à zéro si λ, μ, λ_1, μ_1 sont nuls.

Continuons de même, en cherchant d'abord le correspondant r_{i+3} de l'expression (33), et l'égalant à zéro, puis, changeant la suite à partir de S_{i+4}, β_{i+4} par l'introduction de deux polynomes λ_2, μ_2, ... Poursuivons ainsi jusqu'à S_{i+2+p}, β_{i+2+p}, en sorte que λ_p, μ_p soient les derniers polynomes introduits. On aperçoit immédiatement que l'équation substituée à (33) a la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
(34)\quad & (S'_{i+p+1})^{m-p-i-1} + H(S'_{i+p+1})^{m-p-i-2} \\
& + H_1(S'_{i+p+1})^{m-p-i-3} + \ldots + H_{m-i-p-2}(S'_{i+p+1}) \\
& + (-1)^p\lambda(S_{i+p+1})^{m+p-i-1} + (-1)^p(\mu + H\lambda)(S_{i+p+1})^{m+p-i-2} \\
& + u_1(S_{i+p+1})^{m+p-i-3} + v_1(S_{i+p+1})^{m+p-i-4} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + u_k(S_{i+p+1})^{m+p-i-2k-1} + v_k(S_{i+p+1})^{m+p-i-2k-2} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (-1)^{i+p+1}A(S_{i+p+1})^{i+p+1} \\
& + (-1)^p[K_1(S_{i+p+1})^{i+p} \\
& \qquad + K_2(S_{i+p+1})^{i+p-1} + \ldots + K_{i+p+1}(S_{i+p+1})] = 0.
\end{aligned}
$$

Les caractères des coefficients sont les suivants :

$\pm u_k = \lambda_k + U_k$, la quantité U_k ne dépendant que des arbitraires contenues dans λ, μ, λ_1, μ_1, ... jusqu'à λ_{k-1} et μ_{k-1}.

$\pm v_k = u_k + H\lambda_k + V_k$, la quantité V_k ne dépendant aussi que de λ, μ, ..., λ_{k-1}, μ_{k-1}.

Les coefficients K_1, K_2, ..., K_i sont les mêmes que précédemment.

Ils ne dépendent pas de λ, μ, λ_1, μ_1, ...

K_{i+2}	ne dépend que de	λ, μ;
K_{i+3}	»	$\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$;
K_{i+4}	»	$\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$;
....	»	................;
K_{i+p+1}	»	$\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1, \ldots, \lambda_{p-1}, \mu_{p-1}$.

Ces propriétés, reconnues précédemment pour $p = 0$ et $p = 1$, sont aisément généralisées, et il n'est pas besoin d'en faire la démonstration. Je pousserai l'application de cette analyse jusqu'à

$$p = m - i - 2.$$

Il convient maintenant de réunir les termes des dernières lignes à ceux des précédentes, qui contiennent les mêmes symboles (S). Tout d'abord, dans le cas particulier $i = 0$, l'indice supérieur le plus élevé du symbole (S) est à la troisième ligne $(m + p - 1)$, aux dernières $p + 1$. L'hypothèse $m = 1$ doit être exclue. Effectivement, l'égalité (30), dont nous sommes partis, se réduirait alors, à cause de la signification des symboles, à ceci

$$\beta_1 + HS_1 + AS_0 = 0.$$

Comme on va le voir dans un instant, cette relation exprime que la suite des S peut être arrêtée à S_1.

Ce cas mis de côté, ce sera seulement pour $m = 2$ que le premier terme des dernières lignes se réunira avec le premier terme de la troisième. Pour les autres valeurs de m, le premier terme des dernières lignes se réunira au terme de rang $(m - 1)$ à partir du premier terme de la troisième ligne inclusivement; et, généralement, le $q^{\text{ième}}$ terme des dernières lignes se réunira au $(q + m - 2)^{\text{ième}}$ terme des précédentes.

Soit, en premier lieu, $q + m$ un nombre impair $2a + 1$, alors le $(q + m - 2)^{\text{ième}}$ terme en question est celui qui a pour coefficient u_{a-1}. Ce coefficient est, avons-nous dit, sauf le signe, de cette forme :

$$\lambda_{a-1} + U_{a-1},$$

où U_{a-1} ne dépend que de λ, μ, ... jusqu'à λ_{a-2}, μ_{a-2}.

D'autre part, le $q^{\text{ième}}$ terme des dernières lignes a pour coeffi-

cient K_{q-1}. Comme i est supposé nul, ce coefficient ne dépend que de λ, μ, ..., λ_{q-3}, μ_{q-3}.

Or, i étant nul, la plus grande valeur de p est $(m-2)$. La quantité q a pour maximum $p+2$; sa plus grande valeur est donc m. Ayant $q \leqq m$ et $q+m=2a+1$, j'en déduis $q-3<a-2$. En conséquence, le terme envisagé dans la dernière ligne peut être réuni au terme correspondant des lignes précédentes sans altérer le caractère du coefficient de ce terme.

Si, en second lieu, $q+m$ est un nombre pair $2b$, le $(q+m-2)^{\text{ième}}$ terme a pour coefficient v_{b-2}, dont la forme $\mu_{b-2}+H\lambda_{b-2}+V_{b-2}$; et V_{b-2} ne dépend que de λ, μ, ..., λ_{b-3}, μ_{b-3}. D'autre part, le $q^{\text{ième}}$ terme de la dernière ligne a encore pour coefficient K_q, ne dépendant que de λ, μ, ..., λ_{q-3}, μ_{q-3}. Ayant $q \leqq m$ et $q+m=2b$, j'en conclus $q \leqq b$ et $q-3 \leqq b-3$. Donc encore le terme envisagé dans la dernière ligne de (34) peut être réuni au terme correspondant sans altérer le caractère du coefficient qui affecte ce dernier.

Une simplification analogue a lieu de même dans le cas général où i n'est pas nul. Nous devons avoir soin de rappeler l'hypothèse faite au début : S_{i+2} est le premier des polynomes S dont le degré surpasse celui du polynome précédent. Conséquemment, on a $d_{i+1}-d_i<0$.

Il a été prouvé (5, p. 324) que les différences $d_{i+1}-d_i$ forment une progression arithmétique de raison 2. Donc $d_{i+1}-d_i=d_1-d_0+2i$, et, par suite,

$$2i<d_0-d_1.$$

D'autre part, l'existence du terme $A(\mathfrak{S}_0)$ dans l'équation (30) suppose le degré de $(\mathfrak{S}'_0)^m$, qui est (d_1+m), au moins égal à celui de $(\mathfrak{S}_0)$, qui est d_0. Ainsi

$$m \geqq d_0-d_1.$$

Par conséquent, si le polynome A existe, on a nécessairement $m>2i$.

Quand le polynome A n'existe pas, l'analyse ci-dessus montre que K_1, K_2, ..., K_i n'existent pas non plus, comme on le voit en passant de l'équation (30) à l'équation (31).

Le $q^{\text{ième}}$ terme des dernières lignes est $K_{q-1}(S_{i+p+1})^{i+p+2-q}$. Son correspondant dans les précédentes occupe le rang $(m-2i-2+q)$. Il existe toujours. Dans le cas, en effet, où existe le polynome A, m est supérieur à $2i$, et $(m-2i-2+q)$ est positif.

On doit seulement excepter le cas spécial $m = 2i + 1$, $q = 1$, et je vais l'examiner tout à l'heure.

Dans le cas où le polynome A n'existe pas, q est au moins $(i+2)$, et $(m - 2i - 2 + q)$ au moins $(m - i)$, qui est positif par hypothèse.

Ceci reconnu, nous avons, pour la valeur extrême de p, $m - i - 2$. Par conséquent, la plus grande valeur de q étant $i + p + 2$, on a $q \leqq m$.

Si $q + m = 2a + 1$, le terme de rang $(m - 2i - 2 + q)$ a pour coefficient u_{a-i-1}, dont la forme est $\lambda_{a-i-1} + U_{a-i-1}$, U ne contenant que les arbitraires de λ, μ, ..., λ_{a-i-2}, μ_{a-i-2}.

D'ailleurs, K_{q-1} ne contient que λ, μ, ..., λ_{q-i-3}, μ_{q-i-3}. Les conditions $q + m = 2a + 1$, $q \leqq m$ donnent $q \leqq a$, et, par suite,

$$q - i - 3 < a - i - 2.$$

Donc la réunion des deux termes ne saurait altérer le caractère du coefficient u.

Si $q + m = 2a$, le coefficient que l'on doit envisager est v_{b-i-2}, dont la forme est $\mu_{b-i-2} + H\lambda_{b-i-2} + V$, et V ne dépend que de λ, μ, ..., λ_{b-i-3}, μ_{b-i-3}. Les conditions $q + m = 2b$, $q \leqq m$, donnent

$$q \leqq b \quad \text{et} \quad q - i - 3 \leqq b - i - 3.$$

La conclusion est donc analogue.

Il reste encore à examiner le cas que je signalais à l'instant, $m = 2i + 1$. Ce cas se fait remarquer par cette particularité que le terme de rang $q = 1$, c'est-à-dire le premier terme des dernières lignes, est seul de son espèce. Dans ce terme, en effet, le symbole (S) a l'indice supérieur $(i + p + 1)$, tandis que le premier terme de la troisième ligne contient le symbole (S) avec l'indice supérieur $m + p - i - 1$, nombre qui se réduit ici à $(i + p)$.

Remarquons que les conditions $d_0 - d_1 > 2i$ et $d_0 - d_1 \leqq m$ donnent ici nécessairement $d_0 - d_1 = m = 2i + 1$. Il en résulte

$$d_i - d_{i+1} = 1.$$

En conséquence, le degré de β_{i+1}, lequel surpasse d'une unité celui de S_{i+1}, est précisément égal à celui de S_i. Il est donc bien vrai, comme on l'a supposé, que S_{i+1} ne comporte aucune indétermi-

nation; mais le fait cesse d'être exact pour β_{i+1}. Ce n'est donc plus au couple S_{i+2}, β_{i+2}, mais bien au couple S_{i+1}, β_{i+1} que doit commencer l'application de notre analyse, avec cette modification toutefois que le premier polynome λ n'existera pas et que le premier polynome μ sera du premier degré. Nous devons donc, pour ce cas, changer, dans la formule (34), i en $(i+1)$. Elle devient alors, si l'on fait $\lambda = 0$ et qu'on change en même temps p en $p+1$,

$$(34\ bis)\quad \begin{aligned}&(S'_{i+p+1})^{i-p} + H(S'_{i+p+1})^{i-p-1} + \ldots + H_{i-p-1}(S'_{i+p+1})\\ &+(-1)^{p+1}\mu(S_{i+p+1})^{i+p+1} + u_1(S_{i+p+1})^{i+p} + v_1(S_{i+p+1})^{i+p-1}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ u_k(S_{i+p+1})^{i+p-2k+2} + v_k(S_{i+p+1})^{i+p-2k+1}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+(-1)^{i+p+1}A(S_{i+p+1})^{i+p+1}\\ &+(-1)^{p+1}[K_1(S_{i+p+1})^{i+p} + K_2(S_{i+p+1})^{i+p-1} + \ldots\\ &\qquad + K_{i+p+1}(S_{i+p+1})] = 0.\end{aligned}$$

Les coefficients u, v ont ici les mêmes caractères que dans la formule (34), et quant aux coefficients K, on voit que K_{i+1} dépend de μ, K_{i+2} de μ, λ_1, μ_1, ... Nous appliquerons la formule (34 *bis*) à $p = i - 1$.

Les termes des dernières lignes trouvent chacun leur correspondant dans ceux des lignes précédentes. Le premier coefficient devient $(-1)^i[\mu + (-1)^i A]$. Les suivants deviennent $u_1 \pm K_1$, $v_1 \pm K_2$, ..., qui ont le même caractère que u_1, v_1, ..., les polynomes K_1, K_2, ..., K_i ne dépendent pas de μ, λ_1, μ_1, ... Pour examiner ce qui concerne les autres, il suffit de porter l'attention sur le dernier coefficient.

Dans ce cas $p = i - 1$, le dernier polynome K a l'indice $2i$. Il ne dépend donc que des polynomes μ, λ_1, μ_1, ..., λ_{i-2}, μ_{i-2}. Quant aux autres termes, le dernier a le coefficient v_i, dont la forme est $\mu_i + H\lambda_i + V$, et V ne dépend que de μ, λ_1, μ_1, ..., λ_{i-1}, μ_{i-1}. Le caractère du coefficient v_i ne sera pas altéré si l'on ajoute K_{2i}. Il en sera *a fortiori* de même à l'égard des coefficients précédents.

18. En résumé, nous avons tout d'abord, soit dans le cas où A n'existe pas, soit dans le cas où, A existant, m est au moins égal à $2i + 2$, à appliquer la formule (34) en y fusionnant les termes de la dernière ligne avec ceux des précédentes, et faisant $p = m - i - 2$.

Ceci nous donne

$$(35)\quad \begin{aligned}&(S'_{m-1})^1 + H(S'_{m-1})\\ &+ u'_0(S_{m-1})^{2m-2i-3} + v'_0(S_{m-1})^{2m-2i-4}\\ &+ u'_1(S_{m-1})^{2m-2i-5} + v'_1(S_{m-1})^{2m-2i-6}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ u'_k(S_{m-1})^{2m-2i-2k-3} + v'_k(S_{m-1})^{2m-2i-2k-4}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ u'_{m-i-2}(S_{m-1})^1 + v'_{m-i-2}(S_{m-1}) = 0.\end{aligned}$$

Les coefficients u', v' ont les mêmes caractères que ceux de même indice dans (34). J'ai étendu leur définition jusqu'à l'indice zéro. Effectivement, pour $m = 2i + 2$, les deux premiers coefficients sont modifiés, et pour $m = 2i + 3$ le second est modifié, non pas le premier. Quoi qu'il en soit, le caractère des coefficients u', v', que je rappelle, est le suivant. On a

$$\pm u'_k = \lambda_k + U_k,$$
$$\pm v'_k = \mu_k + H\lambda_k + V_k,$$

les deux polynomes U_k, V_k ne dépendant que de λ, μ, ..., λ_{k-1}, μ_{k-1}.

Il est alors manifeste que l'on peut toujours, et d'une seule manière, déterminer λ, μ, λ_1, μ_1, ..., λ_{m-i-2}, μ_{m-i-2} par les conditions

$$u'_0 = 0,\quad v'_0 = 1,\quad u'_1 = 0,\quad v'_1 = 0,$$
$$u'_2 = 0,\quad v'_2 = 0,\quad \ldots,\quad u'_{m-i-2} = 0,\quad v'_{m-i-2} = 0.$$

Il existe donc une suite S, β entièrement déterminée et unique, déduite des données S_0, S_1, β_0, β_1, pour laquelle on a

$$(S'_{m-1})^1 + H(S'_{m-1}) = 0;$$

c'est-à-dire, à cause de la signification des symboles,

$$(36)\qquad \beta_m + HS_m = 0.$$

En second lieu, dans le cas $m = 2i + 1$, la formule (34 *bis*), appliquée à $p = i - 1$, nous donne de même, après fusion des termes et remplacement de $2i$ par $(m - 1)$,

$$(35\ bis)\quad \begin{aligned}&(S'_{m-1})^1 + H(S'_{m-1}) + v''_0(S_{m-1})^{m-1}\\ &+ u''_1(S_{m-1})^{m-2} + v''_1(S_{m-1})^{m-3}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ u''_k(S_{m-1})^{m-2k} + v''_k(S_{m-1})^{m-2k-1}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ u''_{\underline{m-1}}(S_{m-1})^1 + v''_{\underline{m-1}}(S_{m-1}) = 0.\end{aligned}$$

Ici encore on a, pour u''_k et v''_k, la même forme que pour u_k et v_k. On pourra donc, et d'une seule manière, déterminer μ, λ_1, μ_1, ..., $\lambda_{\frac{m-1}{2}}$, $\mu_{\frac{m-1}{2}}$, par les conditions

$$v''_0 = 0, \quad u''_1 = 0, \quad v''_1 = 0, \quad \ldots, \quad u''_{\frac{m-1}{2}} = 0, \quad v''_{\frac{m-1}{2}} = 0.$$

La conclusion est donc la même que précédemment.

En troisième lieu, nous avons à envisager encore le cas singulier signalé plus haut (p. 343), celui où l'identité initiale se réduit à

$$\beta_1 + HS_1 + AS_0 = 0.$$

Si A n'existe pas, cette relation est de la forme (36). Si A existe, il conviendra de modifier β_1 conformément à l'équation (29 *bis*). On voit, en effet, qu'en prenant

$$\mathfrak{b}_1 = \beta_1 + AS_0,$$

la relation se réduit à $\mathfrak{b}_1 + HS_1 = 0$, rentrant encore dans la forme (36).

19. J'ai substitué, dans l'analyse qui précède, l'équation (30) à l'équation (27), en y ajoutant un terme complémentaire. En voici la raison.

Le problème dont la solution résulte de cette analyse doit être envisagé de la sorte :

Étant donnés S_0, S_1, β_0, β_1, *reconnaître qu'on en pourra toujours déduire une double suite qui s'arrêtera à un polynome* S *identiquement nul; trouver le rang de ce polynome.*

Or il est naturel de résoudre ce problème sans construire une double suite S, β, et c'est dans ces termes que la solution m'est nécessaire. Dans ces conditions, les polynomes représentés par les symboles $(S'_0)^k$ ne sont pas entièrement connus. Mais on peut les déterminer tous successivement par la répétition de l'opération B, faite sur S_1 ; et ils sont alors déterminés, sauf des multiples de S_0. Supposons donc cette opération faite d'une manière arbitraire, et désignons alors par S_1, S_1^1, S_1^2, ... les polynomes obtenus. L'équation (27) acquiert la forme

$$(37) \qquad S_1^m + HS_1^{m-1} + H_1 S_1^{m-2} + \ldots + H_{m-1} S_1 + AS_0 = 0.$$

Nous pourrons dans chaque cas reconnaître les conditions d'existence d'une telle identité. Mais, si la relation (37) nous traduit la relation (27), nous ne savons pas d'avance si inversement une relation quelconque de la forme (37) peut être réduite à la forme (27). Au contraire, nous sommes assuré qu'elle pourra toujours revêtir la forme (30). Nous voyons maintenant *à posteriori* que la forme (27) peut toujours être obtenue comme conséquence de (30), puisque celle-ci amène la relation $\beta_m + HS_m = 0$, et, par suite, $S_{m+1} = 0$. C'est d'ailleurs là un détail qui nous est indifférent.

C'est donc sur la relation (37) qu'il convient de raisonner. Les polynomes S_1, S_1^1, S_2^1, ... sont connus ou, du moins, peuvent être calculés directement. Leurs degrés sont d_1, $d_1 + 1$, $d_1 + 2$, ... Étant donnée une telle série de polynomes, quels qu'ils soient, on pourra toujours prolonger la série jusqu'à un rang m assez élevé pour qu'une relation telle que (37) trouve sa place. Ceci est bien évident; car, sans compter même le polynome A, on a, au premier membre de (37), des arbitraires au nombre de $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1$, tandis qu'on forme, par leur moyen, un polynome à deux variables, du degré $(d_1 + m)$. On voit donc que, pour m suffisamment grand, ce polynome sera tout à fait arbitraire, et pourra être rendu identiquement nul.

En conséquence, quelles que soient les données, il existera toujours des valeurs de m pour lesquelles aura lieu la relation (37). On pourra donc prolonger la suite de manière à amener la relation $\beta_m + HS_m = 0$, et S_m sera le dernier terme de cette suite.

On a vu précédemment que toute suite S, β peut être inversée. Cette dernière conséquence s'applique donc tout aussi bien à la suite prolongée dans le sens des indices négatifs. J'ai donc cette proposition :

De quatre polynomes S_0, S_1, β_0, β_1 *satisfaisant aux conditions du n° 1 (p. 318), on peut toujours déduire une double suite* S, β, *prolongée dans l'un et l'autre sens, et s'arrêtant de part et d'autre à des polynomes* S_m, $S_{-m'+1}$, *de telle sorte que* S_{m+1} *et* $S_{-m'}$ *soient identiquement nuls.*

Du polynome S_1 *déduisons, par la répétition de l'opération* B, *une suite de polynomes* S_1^1, S_1^2, ... *La condition nécessaire et suffi-*

sante pour que l'arrêt puisse avoir lieu à S_m *s'exprime par l'identité*

$$(38) \qquad S_1^m + HS_1^{m-1} + H_1 S_1^{m-2} + \ldots + H_{m-1} S_1 \equiv 0 \qquad (\text{div. } S_0),$$

où H, $H_1, \ldots, H_{m-1}$ *sont des polynomes entiers.*

Corrélativement, de S_0 *déduisons, par la répétition de l'opération* B, *des polynomes* $S_0^1, S_0^2, \ldots$. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'arrêt puisse avoir lieu à* $S_{-m'+1}$ *s'exprime par l'identité*

$$S_0^{m'} + KS_0^{m'-1} + K_1 S_0^{m'-2} + \ldots + K_{m'-1} S_0 \equiv 0 \qquad (\text{div. } S_1),$$

où K, $K_1, \ldots, K_{m'-1}$ *sont des polynomes entiers.*

20. Jusqu'à présent, il a été implicitement supposé que chaque double couple de polynomes consécutifs S_k, β_k, S_{k+1}, β_{k+1} se trouve toujours dans les conditions analogues à celles que l'on a admises au début pour S_0, β_0, S_1, β_1.

Je rappelle ces conditions : *les intersections des courbes* S_0 *et* S_1 *sont, les unes doubles, les autres simples*, sans autre complication pouvant provenir de la réunion de quelques-unes de ces intersections entre elles.

C'est sur cette hypothèse que nous avons fondé nos raisonnements. Il importe, à présent, de l'examiner.

Je dis que cette hypothèse est légitime dans les cas où, dès le début, les couples successifs S, β présentent l'indétermination dont il vient d'être question dans ces derniers numéros. Reprenons, en effet, les formules (29) et (29 *bis*). Nous voyons que, si le polynome S d'indice $(i+2)$ est susceptible d'une indétermination, on peut, après avoir choisi une détermination S_{i+2}, β_{i+2} du couple correspondant, en prendre une autre $\mathfrak{S}_{i+2}$, $\mathfrak{b}_{i+2}$, conformément aux formules

$$\mathfrak{S}_{i+2} = S_{i+2} + \lambda S_{i+1}, \qquad \mathfrak{b}_{i+2} = \beta_{i+2} - \lambda\beta_{i+1} + \mu S_{i+1}.$$

Cela étant, si l'on suppose que les courbes $\mathfrak{S}_{i+2} = 0$ et $\mathfrak{b}_{i+2} = 0$ aient des points d'intersection multiples, *quels que soient les polynomes arbitraires* λ, μ, il en résultera que la même chose a lieu nécessairement pour les deux courbes $S_{i+1} = 0$, $\beta_{i+1} = 0$. C'est ce qu'on voit en prenant infiniment grands les coefficients des polynomes λ, μ.

Si de même S_{i+1}, β_{i+1} présentent une indétermination analogue,

la réunion de quelques-uns des points communs aux courbes $S_{i+1}=0$, $\beta_{i+1}=0$ ne peut exister de quelque manière que soient choisies ces courbes, sans exister aussi pour $S_i=0$, $\beta_i=0$; et ainsi de suite.

Cette réunion n'a pas lieu, par hypothèse, pour les premiers couples S_0, β_0 et S_1, β_1. Donc, dans le cas supposé où l'indétermination commence au couple S_2, β_2, la réunion ne peut avoir lieu pour aucun rang, si, du moins, on laisse subsister partout l'indétermination.

Dans ces conditions, toute l'analyse de ce chapitre peut être appliquée. Les diverses propositions établies, dans lesquelles les intersections des courbes ne jouent plus aucun rôle, auront lieu, *quels que soient* les polynomes arbitraires λ, μ, λ_1, μ_1, ... Elles ont donc lieu encore quand on *choisit* ces polynomes, notamment quand on les choisit de manière à limiter la double suite S, β.

21. C'est en examinant les conséquences de l'identité

$$\beta_m + HS_m = 0,$$

par laquelle la suite des S s'arrête à S_m, que nous allons être ramenés aux courbes gauches, objet de ce mémoire.

Envisageons les deux derniers couples S_{m-1}, β_{m-1}, S_m, β_m. D'après la proposition du n° 2 (p. 321), on y retrouve les propriétés analogues à celles qu'on a admises pour les deux couples du début. Notamment, la relation analogue à (1) se trouve vérifiée dans les points de double intersection des courbes $S_{m-1}=0$ et $S_m=0$, savoir

$$\frac{\partial\beta_{m-1}}{\partial x}\frac{\partial S_m}{\partial y} - \frac{\partial\beta_{m-1}}{\partial y}\frac{\partial S_m}{\partial x} + \frac{\partial\beta_m}{\partial x}\frac{\partial S_{m-1}}{\partial y} - \frac{\partial\beta_m}{\partial y}\frac{\partial S_{m-1}}{\partial x} = 0.$$

Mais l'identité $\beta_m + HS_m = 0$ entraîne l'évanouissement du second déterminant en chacun des points considérés, qui sont des points de double intersection pour les deux courbes $S_{m-1}=0$, $S_m=0$. On a donc, en chacun de ses points, désignés au début de ce chapitre par la notation (h_{m-1}),

$$\frac{\partial\beta_{m-1}}{\partial x}\frac{\partial S_m}{\partial y} - \frac{\partial\beta_{m-1}}{\partial y}\frac{\partial S_m}{\partial x} = 0.$$

Cette relation peut avoir lieu de deux manières différentes : ou bien $\frac{\partial S_m}{\partial x}$ et $\frac{\partial S_m}{\partial y}$ sont nuls, et le point est *double* sur la courbe $S_m=0$;

ou bien le point est simple sur cette courbe, et la courbe $\beta_{m-1}=0$ y est tangente à la précédente. Or recourons à l'identité (16) (p. 327), qui sert à établir la correspondance entre les polynomes r, correspondance qui subsiste ici, comme je viens de le montrer au n° 20. Mettons dans l'identité (16), pour l'indice i, le nombre $(m-1)$. S'il arrivait que les trois courbes $S_m=0$, $S_{m-1}=0$, $\beta_{m-1}=0$ eussent un contact commun en un des points (h_{m-1}), on obtiendrait l'identité (16) en prenant un polynome r_{m-1} ne s'évanouissant pas en ce point particulier, et s'évanouissant seulement en les autres points (h_{m-1}). On pourrait donc adjoindre au groupe (r_{m-1}) un nouveau polynome, lequel aurait ses correspondants r_{m-2}, r_{m-3}, ..., r_0, venant, à leur tour, s'adjoindre aux groupes (r_{m-2}), (r_{m-3}), ..., (r_0). Cette conclusion est impossible. Donc :

L'identité $\beta_m+HS_m=0$ *entraîne cette conséquence, que les points de double intersection des courbes* S_{m-1} *et* S_m *sont des points doubles de la courbe* $S_m=0$.

Ceci étant, le polynome S_{m-1} s'évanouit en chacun de ces points doubles; le polynome β_{m-1} est d'un degré supérieur d'une unité à celui de S_{m-1} et s'évanouit en chacun des points communs aux courbes $S_m=0$, $S_{m-1}=0$. Ce sont là les conditions qui doivent être satisfaites par les éléments servant à représenter une courbe gauche. Donc :

Les équations $S_m=0$, $z=\dfrac{\beta_{m-1}}{S_{m-1}}$ *représentent une courbe gauche du degré* d_m.

La même propriété a lieu pour les polynomes qui limitent la suite S, β dans l'autre sens. On a, de la sorte, deux courbes gauches dont les éléments représentatifs sont liés par l'enchaînement de la double suite (S, β); et je rappellerai cette liaison en disant que ces deux courbes sont *adjointes* l'une à l'autre.

22. Il importe cependant à la rigueur de notre analyse de faire l'observation suivante. C'est seulement dans le cas supposé au n° 20 que cette conclusion est jusqu'à présent légitime; la supposition a consisté en ce que l'indétermination des couples S, β s'offre dès le début. Or cette indétermination s'offre, en effet, dès le début, sous la condition $d_1 \geqq d_0-2$, dans le sens des indices positifs; sous la condition $d_0 \geqq d_1-2$, dans l'autre sens. C'est ce qui résulte de l'expression

du degré de S_2, savoir $d_2 = 2d_1 - d_0 + 2$ (p. 324). L'une, au moins, de ces conditions est toujours satisfaite, et les conséquences précédentes s'appliquent toujours, au moins dans un sens. Pour qu'elles s'appliquent dans les deux sens, il faut et il suffit que d_1 et d_0 diffèrent de deux unités au plus. Dans les autres cas, et en supposant, pour fixer les idées, $d_1 < d_0$, nous ne sommes pas, jusqu'à présent, fondés à tirer les conclusions précédentes pour la double suite prolongée dans le sens positif. Ces conclusions n'ont lieu que sous deux hypothèses; les voici : 1° la double suite S, β peut être effectivement prolongée suivant les règles posées aux n°s 2 et 3; 2° la correspondance entre les polynomes r a lieu, pour tous les indices, conformément aux équations (15) et (16).

Mais, sous ces hypothèses bien précises, les conclusions ont lieu effectivement. Tout d'abord, dans le cas où s'applique l'analyse du n° 17, cas où la double suite présente, à partir d'un certain rang, une indétermination, on parvient à l'identité $\beta_m + HS_m = 0$. De cette identité, sous le bénéfice de la seconde hypothèse et par le raisonnement même qui vient d'être employé, on conclut comme tout à l'heure, au n° 21.

Dans le cas où la double suite s'arrête d'elle-même dans la période des degrés décroissants, l'analyse du n° 17 ne s'applique pas. Cet arrêt se présente parce qu'un polynome S_{m+1} est identiquement nul. Sous le bénéfice de la seconde hypothèse, nous pouvons considérer S_{m+1} comme appartenant au groupe (r_m); c'est la notion introduite précédemment (11, p. 332). Son correspondant général r_{m-1} a la forme $\beta_m + HS_m$, où H est un polynome arbitraire du premier degré. Puisque S_{m+1} est nul, il existera un polynome H donnant lieu à l'identité $\beta_m + HS_m = 0$. La conclusion se tirera ensuite comme au n° 21.

Dans les cas que j'aurai à considérer, les deux hypothèses sont légitimes, et c'est ce qu'on va voir immédiatement.

23. Soit une courbe gauche représentée par les équations $\varphi = 0$, $z = \frac{u_1}{u_0}$. Parmi l'infinité de couples (u_1, u_0) susceptibles de représenter la même courbe, j'en choisis un dans lequel u_0 ait *au moins* le degré $(d - 2)$, d étant le degré de φ. C'est ce qui peut toujours être fait, et d'une infinité de manières. Je prends maintenant les trois polynomes φ, u_0, u_1 pour S_0, S_1, β_1 dans cet ordre. Je complète

ensuite le premier couple par $\beta_0 = -KS_0$, où K est un polynome du premier degré arbitraire.

Ce double couple $S_0, \beta_0, S_1, \beta_1$ n'est pas absolument dans les conditions fixées au n° 1. La différence consiste en ce que les points de double intersection des courbes S_0, S_1, au lieu d'être des contacts, sont des points doubles de S_0. Par là, et à cause de $\beta_0 = -KS_0$ (analogue à $\beta_m + HS_m = 0$), la condition (1) est satisfaite dans chacun des points (h_0), qui sont les points doubles de S_0.

On peut poser les identités (2), (3), (4) exactement comme dans le cas général. Les circonstances particulières qui s'offrent consistent en ce que γ_1, s'évanouit aux points (h_0) et que l'on a $\pi_1 = K\beta_1$. Quoi qu'il en soit, S_2 et β_2 se déterminent comme dans le cas général, et le double couple $S_1 \beta_1$, $S_2 \beta_2$, qui n'offre plus aucune particularité, peut servir de point de départ à la double suite (S, β).

Or, d'après l'hypothèse, j'ai $d_1 \geqq d_0 - 2$. C'est donc ici le cas où, suivant le n° 22, la proposition du n° 21 s'applique.

Donc, en prenant pour le degré de u_0 un nombre au moins égal à $(d_0 - 2)$, nous déduisons des éléments φ, u_0, u_1 une double suite (S, β) satisfaisant à toutes les conditions requises.

Soient maintenant (u'_1, u'_0), (u''_1, u''_0), (u'''_1, u'''_0), ... divers couples équivalents au couple (u_1, u_0) pour la représentation de la même courbe, et de degré moindre que $(d_0 - 2)$. Nous pouvons prendre

$$u_1 = \omega' u'_1 + \omega'' u''_1 + \omega''' u'''_1 + \ldots,$$
$$u_0 = \omega' u'_0 + \omega'' u''_0 + \omega''' u'''_0 + \ldots,$$

où ω', ω'', ω''', ... seront des polynomes arbitraires ayant des degrés assez élevés pour donner à u_0 le degré $(d_0 - 2)$. Les deux hypothèses du n° 22 se trouvent légitimes quand on prend pour point de départ φ, u_0, u_1, comme je viens de le dire, et cela quels que soient les polynomes arbitraires ω', ω'', ω''', ... Ces hypothèses consistent en l'existence d'identités. Ces identités, ayant lieu quels que soient ω', ω'', ω''', ..., ont lieu nécessairement quand on prend pour point de départ φ, u'_0, u'_1, ou φ, u''_0, u'''_1, ...

Donc, dans le cas où l'on prend pour point de départ S_0, S_1, β_1 *les polynomes qui servent à représenter une courbe gauche sans point singulier* $S_0 = 0$, $z = \frac{\beta_1}{S_1}$, *la proposition du n° 21 s'applique toujours.*

En d'autres termes, *pour chaque représentation d'une courbe gauche sous la forme* $S_0 = 0$, $z = \frac{\beta_1}{S_1}$, *cette courbe a une adjointe* $S_m = 0$, $z = \frac{\beta_{m-1}}{S_{m-1}}$.

24. Cette liaison entre une courbe et son adjointe s'offre ici à un point de vue algébrique, comme résultant d'opérations compliquées; et cependant elle se rattache directement et d'une manière très simple à l'un des éléments géométriques les plus importants qui soient propres à caractériser les courbes.

En premier lieu, envisageons le cas tout spécial où la suite S s'arrête à S_1. Ce cas est caractérisé par l'identité $\beta_1 + HS_1 = 0$, dans laquelle H est un polynome du premier degré. La courbe gauche est alors dans le plan $z + H = 0$. Ainsi, la suite S s'arrêtant à S_1, la courbe est sur une surface du premier degré.

En second lieu, supposons la suite arrêtée à S_2. Ce cas est caractérisé par l'identité $\beta_2 + HS_2 = 0$. Si l'on se reporte au chapitre II, on reconnaît dans S_2 et β_2 les polynomes qui, dans ce chapitre II, avaient été désignés par a_{11} et a_{12}. Il a été prouvé en cet endroit que l'identité dont il s'agit exprime que la courbe est sur une surface du second degré. Ainsi, la suite S s'arrêtant à S_2, la courbe est sur une surface du second degré.

Ce sont là deux cas particuliers de cette proposition générale :

Quand la suite S, *déduite des éléments* S_0, S_1, β_1 *qui représentent une courbe gauche* $S_0 = 0$, $z = \frac{\beta_1}{S_1}$, *s'arrête à* S_m, *la courbe gauche est sur une surface du degré m.*

Pour démontrer cette proposition, recourons à la notion des polynomes équivalents et contigus, introduite au chapitre I (p. 291). Envisageons pour la courbe gauche un mode de représentation par deux polynomes quelconques $u_{(0)}$, $u_{(1)}$, formant un système équivalent à S_1, β_1, et prenons le *contigu* $u_{(2)}$. Ces propositions sont exprimées par les relations

$$\frac{\beta_1}{S_1} \equiv \frac{u_{(1)}}{u_{(0)}} \equiv \frac{u_{(2)}}{u_{(1)}} \qquad (\text{div. } S_0).$$

Je place entre parenthèses l'indice de ces polynomes u, pour éviter la confusion de cette suite $u_{(0)}$, $u_{(1)}$, $u_{(2)}$, ..., formée de polynomes

contigus avec la suite que l'on déduirait, par l'opération A, du polynome u_0. L'opération nouvelle C, qui conduit de $u_{(k)}$ à $u_{(k+1)}$, s'applique à tout polynome $u_{(k)}$ qui s'évanouit en tous les points (h_0^i). Le polynome $u_{(k)}$ appartient ainsi au groupe (r_0), et $u_{(k+1)}$ appartient à ce même groupe. De plus, $u_{(k+1)}$ a un degré supérieur d'une unité à celui de $u_{(k)}$. Cette opération C a donc une grande analogie avec l'opération B (8, p. 328), qui présente aussi ces deux caractères.

Je vais maintenant montrer comment se relient ces deux opérations B, C.

Cette dernière C est définie seulement pour le double couple initial S_0, β_0, S_1, β_1 relativement auquel a lieu l'identité $\beta_0 + KS_0 = 0$.

On pourrait sans inconvénient supposer $K = 0$, ce qui simplifierait un peu; mais on ne pourrait pas alors appliquer le raisonnement à la courbe adjointe. Aussi laissé-je K quelconque.

Les équations (15) et (16) transcrites en mettant

$$i = 0 \quad \text{et} \quad \beta_0 = -KS_0,$$

deviennent

$$r_0\beta_1 = r_1 S_0 + t_0 S_1,$$
$$-Kr_0 S_0 = r_{-1} S_1 - g_0 S_0.$$

La dernière nous donne

$$g_0 \equiv Kr_0 \quad (\text{div. } S_1).$$

Quant à la première, nous pouvons l'écrire

$$\frac{\beta_1}{S_1} \equiv \frac{t_0}{r_0} \quad (\text{div. } S_0).$$

Celle-ci montre que (t_0, r_0) est un système équivalent à (β_1, S_1) pour la représentation de la courbe gauche.

Au lieu de r_0, mettons $u_{(0)}$; alors t_0 sera $u_{(1)}$. D'autre part, en faisant l'opération B, nous avons par définition

$$u_{(0)}^1 = t_0 + g_0 \equiv u_{(1)} + Ku_{(0)} \quad (\text{div. } S_1).$$

Ainsi est trouvé le lien entre les deux opérations B et C. Sous forme d'égalité, j'écrirai

$$(39) \qquad u_{(0)}^1 = u_{(1)} + Ku_{(0)} + GS_1.$$

Le polynome G ne peut être précisé; il dépend de la manière dont on fait l'opération B, comme l'indique l'équivalence $g_0 \equiv Kr_0$. Il est

permis de prendre $G = 0$, ce qui d'ailleurs n'introduit aucune modification au résultat final.

Faisant une fois de plus l'opération B aux deux membres de (39), et observant que l'on a

$$(u_{(1)})^1 = (u^1)_{(1)},$$

j'obtiens

$$u_{(0)}^{(2)} = u_{(2)} + 2\,K\,u_{(1)} + K^2 u_0 + G\,S_1^{(1)} + G_1 S_1,$$

G_1 étant un polynome que, dans son degré, on peut prendre arbitrairement comme G, et supposer nul si l'on veut. Enfin, d'une manière générale,

$$\begin{aligned} u_0^{(m)} = u_{(m)} &+ m\,K\,u_{(m-1)} + \frac{m(m-1)}{2} K^2 u_{(m-2)} \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} K^3 u_{(m-3)} + \ldots + m\,K^{m-1} u_{(1)} + K^m u_0 \\ &+ G\,S_1^{(m-1)} + G_1 S_1^{(m-2)} + G_2 S_1^{(m-3)} + \ldots + G_{m-1} S_1. \end{aligned}$$

Prenons, en particulier, pour u_0, le polynome S_1 lui-même, et nous avons alors cette formule

$$\begin{aligned} (40) \qquad u_m + m\,K\,u_{(m-1)} + \frac{m(m-1)}{2} K^2 u_{(m-2)} + \ldots + K^m u_0 \\ = S_1^{(m)} - G\,S_1^{(m-1)} - G_1 S_1^{(m-2)} - \ldots - G_{m-1} S_1. \end{aligned}$$

En prenant successivement dans (40) $m = 0, 1, 2, \ldots$, nous voyons qu'un quelconque des deux systèmes de polynomes s'exprime linéairement par l'autre, en la forme

$$\begin{aligned} u_m &= S_1^{(m)} + P\,S_1^{(m-1)} + P_1 S_1^{(m-2)} + \ldots + P_{m-1} S_1, \\ S_1^{(m)} &= u_{(m)} + Q\,u_{(m-1)} + Q_1 u_{(m-2)} + \ldots + Q_{m-1} u_{(0)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, les deux formes d'identités ci-après

$$\begin{aligned} S_1^{(m)} + H\,S_1^{(m-1)} + H_1 S_1^{(m-2)} + \ldots + H_{m-1} S_1 &\equiv 0 \qquad (\text{div. } S_0), \\ u_{(m)} + J\,u_{(m-1)} + J_1 u_{(m-2)} + \ldots + J_{m-1} u_{(0)} &\equiv 0 \qquad (\text{div. } S_0) \end{aligned}$$

sont entièrement équivalentes. Or la première exprime (p. 350) que la suite S s'arrête à S_m; la seconde (p. 291) que la courbe est sur une surface du degré m. La proposition est donc prouvée, et l'on peut même dire que *les deux propriétés consistant l'une en ce que la suite* S *s'arrête à* S_m, *l'autre en ce que la courbe initiale soit située sur une surface du degré* m, *sont entièrement équivalentes.*

Arrêtons maintenant la suite à S_m, et considérons l'adjoint

$S_m = 0$, $z = \frac{\beta_{m-1}}{S_{m-1}}$. La suite S inversée s'arrête à S_0, et, comme la distance de S_m à S_0 ne diffère pas de la distance qui sépare S_0 et S_m, nous concluons ainsi :

L'adjointe $S_m = 0$, $z = \frac{\beta_{m-1}}{S_{m-1}}$ *est, elle aussi, située sur une surface du degré* m.

25. Considérons une courbe effectivement située sur une surface de degré m; et soient $S_0 = 0$, $z = \frac{\beta_1}{S_1}$ les équations de la courbe. Prenons la suite S qui s'arrête à S_m.

Désignons par U_m la surface du degré m, par la considération de laquelle la suite se trouve ainsi limitée, et envisageons toute autre surface V passant par la même courbe gauche. Si le degré de V égale ou surpasse m, on peut, au moyen de l'équation $U_m = 0$, rabaisser, dans l'équation de V, les exposants de z au-dessous de m. Par conséquent, on peut, dans tous les cas, prendre l'équation de V sous la forme

$$V_0 z^{m-1} + V_1 z^{m-2} + \ldots + V_{m-2} z + V_{m-1} = 0.$$

Suivant un résultat du numéro précédent, la propriété de la courbe consistant en ce qu'elle se trouve sur cette surface s'exprime par une identité telle que

$$(41)\qquad V_0(S'_0)^{(m-1)} + W_1(S'_0)^{(m-2)} + \ldots \\ + W_{m-2}(S'_0)^1 + W_{m-1}(S'_0) + V'_0(S_0) = 0$$

dans laquelle les W sont composés linéairement avec les V, et V'_0 est un nouveau polynome.

Opérons maintenant, comme nous l'avons déjà fait tant de fois, en égalant à zéro le correspondant r_{m-1} du premier membre de (41), et il viendra

$$(42)\qquad V'_0(S_{m-1})^{(m-1)} + W'_1(S_{m-1})^{(m-2)} + \ldots + W'_{m-2}(S_{m-1})^{(1)} \\ + W'_{m-1}(S_{m-1}) + (-1)^{m-1} V_0(S'_{m-1}) = 0.$$

Deux identités telles que (41) et (42) ont, de la sorte, chacune leur correspondante dans l'autre forme. Cette identité (42) exprime, à son tour, que la courbe adjointe $S_m = 0$, $z = \frac{\beta_{m-1}}{S_{m-1}}$ est située sur une surface dont l'équation a la forme

$$V'_0 z^{m-1} + V'_1 z^{m-2} + \ldots + V'_{m-2} z + V'_{m-1} = 0.$$

Désignons cette surface par V'. Cherchons la relation entre les degrés μ, μ' de deux surfaces correspondantes V, V'.

Le polynome V_0 a pour degré $\mu - m + 1$, et le polynome V'_0, $\mu' - m + 1$. D'autre part, $(S'_0)^{(m-1)}$ et (S_0) ont respectivement pour degrés les nombres $d_1 + m - 1$ et d_0. Donc, d'après (41),

$$\mu + d_1 = \mu' - m + 1 + d_0,$$

d'où je tire

$$\mu - \mu' = d_0 - d_1 - m + 1. \tag{43}$$

D'après (43), μ et μ' sont ensemble *minima*. Ainsi : *à chaque surface de degré minimum passant par une courbe correspond une surface de degré minimum passant par toute courbe adjointe.* La surface du degré m, qui établit la liaison entre la courbe et son adjointe, est naturellement exclue.

26. Un cas intéressant à noter est celui où la suite S se termine par une simple constante. L'adjointe cesse d'exister, mais les formules subsistent toujours, pourvu qu'on y fasse $d_m = 0$. La formule (43) donne, pour le minimum de μ, correspondant à $\mu' = 0$,

$$\mu = d_0 - d_1 - m + 1.$$

D'après l'expression de d_m (p. 324) et la condition $d_m = 0$, on voit que d doit être divisible par m, et justement égal à μm. Le nombre d_1 prend cette forme

$$d_1 = m\mu - \mu - m + 1 = (m - 1)(\mu - 1),$$

et nous pouvons ainsi résumer ces résultats :

Quand la suite des polynomes S se termine par une constante, la courbe initiale est l'intersection complète de deux surfaces.

En second lieu, ayant égard à la signification géométrique du nombre d_1, j'ajoute :

Une courbe de degré $m\mu$, pour laquelle les cordes issues d'un point arbitraire sont situées sur un cône de degré $(m-1)(\mu-1)$, est l'intersection complète de deux surfaces ayant m et μ pour degrés, sauf au cas où elle serait située sur une surface de degré moindre que le plus petit des nombres m, μ.

Cette proposition est, en quelque sorte, la réciproque de la proposition classique : *les cordes issues d'un point de l'espace et appartenant à la courbe intersection complète de deux surfaces, ayant m et μ pour degrés, sont situées sur un cône de degré* $(m-1)(\mu-1)$.

On voit de plus ici que *ce degré du cône est un minimum*. Car, si l'on pouvait prendre d_1 moindre que $(m-1)(\mu-1)$, la suite S s'arrêterait à un rang moindre que le plus petit des nombres m, μ, et la courbe serait sur une surface de degré moindre, ce qui est contre la supposition.

27. La formule (43) est susceptible d'une interprétation remarquable. J'en tire

$$m\mu - d_0 = m\mu' + (m-1)d_0 - md_1 - m(m-1).$$

Ce qui, d'après (11) (p. 324), peut être écrit

$$m\mu - d_0 = m\mu' - d_m.$$

Appelons C et C' la courbe et son adjointe, U et U' les surfaces du degré m sur lesquelles ces deux courbes sont respectivement situées, et V, V' deux surfaces correspondantes ayant les degrés μ, μ'. Les intersections de U, V et de U', V' sont respectivement complétées par deux courbes C_1, C'_1. La dernière relation exprime que C_1 et C'_1 sont d'un même degré.

D'après le mode de génération de la suite S, les points de simple intersection de deux courbes consécutives S_i, S_{i+1} sont toujours les mêmes (p. 319); ce sont ces points qui ont été désignés par (P) au n° 1. De là un moyen très simple de compter le nombre h' des points doubles apparents de la courbe adjointe. Ce nombre sera lié à celui des points doubles apparents h de la courbe proposée, par la relation

$$d_m d_{m-1} - 2h' = d_1 d_0 - 2h.$$

D'après l'équation (11) et en tenant compte de la relation (43), on pourra transformer la dernière égalité en celle-ci :

$$2(h' - h) = (m-1)[(m\mu - 2d_0)(\mu - 1) - (m\mu' - 2d_m)(\mu' - 1)],$$

de laquelle les quantités μ, μ' disparaissent si l'on fait les substitu-

tions. Or, d'après une formule bien connue, les deux nombres

$$\frac{(m-1)(\mu-1)(m\mu-2d_0)}{2}+h,$$

$$\frac{(m-1)(\mu'-1)(m\mu'-2d_m)}{2}+h'$$

sont précisément ceux des points doubles apparents des deux courbes C_1 et C'_1. J'ai donc, en résumé, ces résultats :

Deux courbes adjointes $S_0=0$, $z=\frac{\beta_1}{S_1}$ *et* $S_m=0$, $z=\frac{\beta_{m-1}}{S_{m-1}}$ *ont, sur les surfaces correspondantes du degré* m *qui les contiennent respectivement, des courbes complémentaires correspondantes, de telle sorte que deux complémentaires correspondantes ont un même degré et un même nombre de points doubles apparents.*

En prenant pour point de départ les polynomes qui représentent une courbe propre, sans point singulier, il peut se faire que l'on parvienne à une adjointe ayant des points singuliers ou qui soit une courbe impropre. Mais, dans tous les cas, la théorie actuelle fait voir que les éléments représentant cette adjointe jouissent toujours des propriétés générales appartenant aux doubles suites S, β. C'est ainsi qu'il faut entendre ce que j'ait dit au chapitre I (p. 301) : les courbes à points singuliers qui s'introduisent ici s'offrent d'elles-mêmes comme des cas particuliers de courbes sans points singuliers.

28. Dans une théorie aussi abstraite, il est indispensable d'effectuer les calculs sur des exemples. C'est ce que je vais faire en prenant un exemple d'une certaine généralité, et susceptible d'une foule d'applications particulières ([1]).

Pour point de départ, je prendrai une ligne composée de courbes planes, en nombre indéterminé k, et situées dans des plans différents. Ces courbes planes seront respectivement représentées par les équations

$$D_1=0,\quad D_2=0,\quad D_3=0,\quad \ldots,\quad D_k=0,$$
$$z=P_1,\quad z=P_2,\quad z=P_3,\quad \ldots,\quad z=P_k.$$

([1]) C'est ici la continuation du calcul fait dans l'appendice du chapitre II.

Les polynomes D ne contiennent que deux coordonnées x, y; P_1, P_2, ..., P_k sont des trinomes du premier degré en x, y.

Par θ_1, θ_2, ..., θ_k je désignerai des polynomes entiers arbitraires en x, y, qui pourront être réduits à de simples constantes; et, pour abréger l'écriture, je poserai

$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{D_1}, \qquad \rho_2 = \frac{\theta_2}{D_2}, \qquad \ldots, \qquad \rho_k = \frac{\theta_k}{D_k}.$$

Il est visible que chacune des courbes planes vérifie l'équation

$$z = \frac{\rho_1 P_1 + \rho_2 P_2 + \ldots + \rho_k P_k}{\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k};$$

de la sorte je peux prendre pour les polynomes qui servent de point de départ :

$$S_0 = D_1 D_2 \ldots D_k,$$
$$S_1 = S_0(\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k),$$
$$\beta_1 = S_0(\rho_1 P_1 + \rho_2 P_2 + \ldots + \rho_k P_k),$$

avec $\beta_0 = 0$. En employant un signe de sommation Σ pour abréger et indiquer ainsi qu'on devra prendre, pour en faire la somme, tous les termes analogues, je trouve aisément, d'après les formules (2), (3) et (4) (p. 319 et 320), les résultats suivants :

$$\gamma_1 = \quad S_0 \Sigma \rho_1 P_1^2,$$
$$S_2 = - S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 (P_1 - P_2)^2,$$
$$\beta_2 = - S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 (P_1 - P_2)^2 (P_1 + P_2),$$
$$\gamma_2 = - S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 (P_1 - P_2)^2 (P_1 + P_2)^2,$$
$$S_3 = - S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 \rho_3 (P_1 - P_2)^2 (P_2 - P_3)^2 (P_3 - P_1)^2,$$
$$\pi_2 = \quad S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 (P_1 - P_2)^2 P_1 P_2,$$
$$\beta_3 = - S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 \rho_3 (P_1 - P_2)^2 (P_2 - P_3)^2 (P_3 - P_1)^2 (P_1 + P_2 + P_3),$$
$$\gamma_3 = - S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 \rho_3 (P_1 - P_2)^2 (P_2 - P_3)^2 (P_3 - P_1)^2 (P_1 + P_2 + P_3)^2,$$
$$S_4 = \quad S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 (P_1 - P_2)^2 (P_1 - P_3)^2 (P_1 - P_4)^2 (P_2 - P_3)^2 (P_2 - P_4)^2 (P_3 - P_4)^2,$$
$$\pi_3 = \quad S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 \rho_3 (P_1 - P_2)^2 (P_2 - P_3)^2 (P_3 - P_1)^2 (P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_1),$$
....

La loi de ces termes successifs se manifeste rapidement. Le quotient $\frac{S_m}{S_0}$ a le signe $-$ ou le signe $+$ suivant que, divisé par 4, m donne pour reste 2, 3 ou 0, 1. Le type des termes qui le composent est le produit de $\rho_1 \rho_3 \ldots \rho_m$ par le produit du carré des différences de $P_1 \ldots P_m$.

Le quotient $\frac{\beta_m}{S_0}$ ne diffère de $\frac{\beta_m}{S_0}$ qu'en ce que le terme type contient, en outre, le facteur $(P_1 + P_2 + \ldots + P_m)$.

Le quotient $\frac{\gamma_m}{S_0}$ admet, en outre, dans son terme type, ce facteur $(P_1 + \ldots + P_m)$ au carré.

Les lois suivant lesquelles se forment les polynomes successifs r_i^j se trouvent facilement aussi.

En désignant par $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ des polynomes entiers, on pourra poser

$$r_0 = S_0(\rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 + \ldots + \rho_k Q_k) = S_0 \Sigma \rho_1 Q_1.$$

On en conclut aisément d'abord

$$r_1^0 = S_0 \Sigma \rho_1 P_1 Q_1, \qquad r_0^{(2)} = S_0 \Sigma \rho_1 P_1^2 Q_1, \qquad \ldots, \qquad r_0^{(m)} = S_0 \Sigma \rho_1 P_1^m Q_1,$$

puis

$$\begin{aligned} r_1 &= - S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 (P_1 - P_2)(Q_1 - Q_2), \\ t_1 &= - S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 (P_1 - P_2)(Q_1 - Q_2)(P_1 + P_2), \\ g_1 &= + S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 (P_1 - P_2)(Q_1 P_2 - Q_2 P_1). \end{aligned}$$

Pour écrire abréviativement les polynomes suivants, posons

$$[Q_1 P_2^a P_3^b \ldots P_i^m P_{i+1}^n] = \begin{vmatrix} Q_1 & Q_2 & \ldots & Q_{i+1} \\ P_1^a & P_2^a & \ldots & P_{i+1}^a \\ P_1^b & P_2^b & \ldots & P_{i+1}^b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_1^m & P_2^m & \ldots & P_{i+1}^m \\ P_1^n & P_2^n & \ldots & P_{i+1}^n \end{vmatrix},$$

et nous aurons

$$\begin{aligned} r_2 &= - S_0 \Sigma (P_1 - P_2)(P_1 - P_3)(P_2 - P_3)[Q_1 P_2^1 P_3^0] \rho_1 \rho_2 \rho_3, \\ t_2 &= - S_0 \Sigma (P_1 - P_2)(P_1 - P_3)(P_2 - P_3)[Q_1 P_2^1 P_3^0] \rho_1 \rho_2 \rho_3 (P_1 + P_2 + P_3), \\ g_2 &= + S_0 \Sigma (P_1 - P_2)(P_1 - P_3)(P_2 - P_3)[Q_1 P_2^2 P_3^0] \rho_1 \rho_2 \rho_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_i &= \varepsilon_i S_0 \Sigma (P_1 - P_2) \ldots (P_i - P_{i+1})[Q_1 P_2^{i-1} P_3^{i-2} \ldots P_i^1 P_{i+1}^0] \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{i+1}, \\ t_i &= \varepsilon_i S_0 \Sigma (P_1 - P_2) \ldots (P_i - P_{i+1}) \\ &\quad \times [Q_1 P_2^{i-1} P_3^{i-2} \ldots P_i^1 P_{i+1}^0] \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{i+1} (P_1 + P_2 + \ldots + P_{i+1}), \\ g_i &= - \varepsilon_i S_0 \Sigma (P_1 - P_2) \ldots (P_i - P_{i+1})[Q_1 P_2^i P_3^{i-2} \ldots P_i^1 P_{i+1}^0] \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{i+1}, \end{aligned}$$

où $\varepsilon_i = +1$ pour $i \equiv 0, 3 \pmod{4}$ et $\varepsilon_i = -1$ pour $i \equiv 1, 2 \pmod{4}$.

D'après l'expression de r_0^1, on doit obtenir $(t_i + g_i)$ en remplaçant, dans r_i, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{i+1}$ par $Q_1 P_1, Q_2 P_2, \ldots, Q_{i+1} P_{i+1}$. Ce résultat se vérifie aisément par les expressions précédentes.

Si l'on suppose $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_k = 1$, alors r_0 coïncide avec S_1, et par suite r_0^1, $r_0^{(2)}$, ... avec $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$, ... Par une vérification directe on peut reconnaître ainsi que la relation

$$S_1^{(m)} + H S_1^{(m-1)} + H_1 S_1^{(m-2)} + \ldots + H_{m-1} S_1 \equiv 0 \qquad (\text{div. } S_0)$$

exprime que la ligne initiale est sur une surface du degré m. Nous avons, en effet,

$$S_1^{(i)} = S_0 \Sigma \rho_1 P_1^i.$$

La dernière équivalence peut donc s'écrire ainsi

$$S_0 \Sigma \rho_1 (P_1^m + H P_1^{m-1} + \ldots + H_{m-2} P_1 + H_{m-1}) \equiv 0 \qquad (\text{div. } S_0).$$

Comme $S_0 = D_1 D_2 \ldots D_k$, et $\rho_1 = \frac{\theta_1}{D_1}$, où θ_1 est un polynome entier, on en déduit, pour tous les indices 1, 2, ..., k, l'équivalence

$$P_i^m + H P_i^{m-1} + \ldots + H_{m-2} P_i + H_{m-1} \equiv 0 \qquad (\text{div. } D_i),$$

qui exprime effectivement que la courbe plane $D_i = 0$, $z = P_i$ est située sur la surface

$$z^m + H z^{m-1} + \ldots + H_{m-2} z + H_{m-1} = 0.$$

29. Pour donner un exemple de la modification des polynomes (p. 346), je vais considérer le cas où la ligne gauche initiale est située sur une surface du troisième degré, et arrêter la suite S à S_3 convenablement modifié. Je présente le calcul sous forme synthétique, pour abréger.

Considérons les quantités dont les expressions sont ci-dessus, r_0, r_0^1, r_0^2, t_2, S_0, S_2, β_2, π_2. Elles donnent lieu à l'identité suivante, qui se vérifie aisément :

$$(\text{A}) \qquad t_2 S_0 + r_0 \pi_2 + r_0^1 \beta_2 - r_0^{(2)} S_2 = 0.$$

Pour $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ je prends maintenant les polynomes suivants :

$$(\text{B}) \qquad \begin{cases} Q_1 = P_1^3 + A P_1^2 + A' P_1 + A'', \\ Q_2 = P_2^3 + A P_2^2 + A' P_2 + A'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_k = P_k^3 + A P_k^2 + A' P_k + A'', \end{cases}$$

où A, A′, A″ sont des polynomes entiers. De la sorte, le déterminant

type qui figure dans t_2 prend la forme suivante :

$$[Q_1 P_2^1 P_3^0] = [P_1^3 P_2^1 P_3^0] + A[P_1^2 P_2^1 P_3^0]$$
$$= (P_1 - P_2)(P_1 - P_3)(P_2 - P_3)(P_1 + P_2 + P_3 + A),$$

et il reste

$$t_2 = \beta_3 + A S_3.$$

Si maintenant la ligne gauche initiale est située sur la surface du troisième degré

$$z^3 + A z^2 + A' z + A'' = 0,$$

alors $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ sont respectivement divisibles par $D_1, D_2, \ldots, D_k$; ainsi

$$Q_1 = c_1 D_1, \qquad Q_2 = c_2 D_2, \qquad \ldots, \qquad Q_k = c_k D_k,$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sont des polynomes entiers. Par conséquent, en posant

$$R_0 = \frac{r_0}{S_0} = \Sigma \rho_1 Q_1 = \Sigma \theta_1 c_1,$$
$$R_0^{(1)} = \frac{r_1^0}{S_0} = \Sigma \rho_1 Q_1 P_1 = \Sigma \theta_1 c_1 P_1,$$
$$R_0^{(2)} = \frac{r_0^{(2)}}{S_0} = \Sigma \rho_1 Q_1 P_1^2 = \Sigma \theta_1 c_1 P_1^2,$$

on a pour R_0, $R_0^{(1)}$ et $R_0^{(2)}$ trois polynomes entiers, et l'identité (A) se change en celle-ci :

(C) $$\beta_3 + A S_3 + R_0 \pi_2 + R_0^{(1)} \beta_2 - R_0^{(2)} S_2 = 0.$$

En vue de simplifier le calcul, je prendrai un cas particulier, et je supposerai $R_0 = 0$.

Si l'on fait alors

(D) $$\begin{cases} \mathfrak{S}_3 = S_3 - R_0^{(1)} S_2, \\ \mathfrak{b}_3 = \beta_3 + R_0^{(1)} \beta_2 + (A R_0^{(1)} - R_0^{(2)}) S_2, \end{cases}$$

l'identité (C) se réduit à

$$\mathfrak{b}_3 + A \mathfrak{S}_3 = 0.$$

Ainsi, *dans l'hypothèse où la ligne gauche envisagée est située sur la surface du troisième degré* $z^3 + A z^2 + A' z + A'' = 0$, *elle a pour adjointe la courbe définie par les équations*

$$S_3 - R_0^{(1)} S_2 = 0, \qquad z = \frac{\beta_2}{S_2},$$

$R_0^{(1)}$ *étant le polynome suivant :*

$$R_0^{(1)} = \sum \theta_1 P_1 \frac{P_1^3 + A P_1^2 + A' P_1 + A''}{D_1}.$$

Cette solution suppose, d'ailleurs, qu'on ait identiquement

$$R_0 = \sum \theta_1 \frac{P_1^3 + A P_1^2 + A' P_1 + A''}{D_1} = 0.$$

Cette courbe adjointe est, elle aussi, sur une surface du troisième degré, dont je vais calculer l'équation.

En premier lieu, pour former un système de polynomes contigus équivalents, relatifs à cette adjointe, j'envisage les deux équivalences (3) et (4) en y changeant les indices; je transcris ici ces équivalences ainsi modifiées

$$-\pi_2 \beta_2 \equiv \beta_1 S_3 \qquad (\text{div. } S_2),$$
$$(\pi_2 + \gamma_2)\beta_2 \equiv \beta_3 S_1 \qquad (\text{div. } S_2).$$

Les ajoutant j'obtiens, en écrivant le résultat sous forme d'égalité,

$$\text{(E)} \qquad \gamma_2 \beta_2 = \beta_3 S_1 + \beta_1 S_3 + \Omega S_2.$$

Dans le cas actuel, cette identité donne immédiatement l'èxpression de Ω, qui sera

$$\Omega = - S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 (P_1 - P_2)^2 (P_1 + P_2)^3.$$

Je prends aussi l'identité (2) en y changeant les indices, et je l'écris

$$\beta_2^2 = S_1 S_3 + \gamma_2 S_2.$$

Tenant compte de (D), je transforme cette dernière en

$$\text{(F)} \qquad \beta_2^2 = S_1 \mathfrak{S}_3 + (\gamma_2 + R_0^{(1)} S_1) S_2,$$

et aussi l'identité (E) en celle-ci :

$$\text{(G)} \quad (\gamma_2 + R_0^{(1)} S_1)\beta_2 = \mathfrak{b}_3 S_1 + \beta_1 \mathfrak{S}_3 + S_2 [\Omega + R_0^{(1)} \beta_1 + (R_0^{(2)} - A R_0^{(1)}) S_1].$$

Puisque $\mathfrak{b}_3 = - A \mathfrak{S}_3$, on a, d'après (F) et (G),

$$\frac{\beta_2}{S_2} \equiv \frac{\gamma_2 + R_0^{(1)} S_1}{\beta_2} \equiv \frac{\Omega + R_0^{(1)} \beta_1 + (R_0^{(2)} - A R_0^{(1)}) S_1}{\gamma_2 + R_0^{(1)} S_1} \qquad (\text{div. } \mathfrak{S}_3).$$

Voici donc un système de polynomes contigus équivalents :

$$u_0 = S_2, \qquad u_{(1)} = \beta_2, \qquad u_{(2)} = \gamma_2 + R_0^{(1)} S_1,$$
$$u_{(3)} = \Omega + R_0^{(1)} \beta_1 + (R_0^{(2)} - A R_0^{(1)}) S_1.$$

Nous devons chercher entre ces polynomes une identité ayant la forme

$$u_{(3)} + B u_{(2)} + B' u_{(1)} + B'' u_{(0)} = 0,$$

et existant sous la condition supposée $R_0 = 0$. A cet effet, je vais prouver l'existence d'une identité telle que

$$(H) \qquad u_{(3)} + B u_{(2)} + B' u_{(1)} + B'' u_0 + R_0 U = 0,$$

qui devra avoir lieu *littéralement*, et dans laquelle U sera un polynome convenablement choisi.

Rappelons les expressions des diverses quantités figurant ici :

$$R_0 = \Sigma \rho_1 Q_1, \qquad R_0^{(1)} = \Sigma \rho_1 P_1 Q_1, \qquad R_0^{(2)} = \Sigma \rho_1 P_1^2 Q_1,$$
$$S_1 = S_0 \Sigma \rho_1, \qquad \beta_1 = S_0 \Sigma \rho_1 P_1,$$
$$S_2 = - S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 (P_1 - P_2)^2, \qquad \beta_2 = - S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 (P_1 - P_2)^2 (P_1 + P_2),$$
$$\gamma_2 = - S_0 \Sigma \rho_1 \rho_2 (P_1 - P_2)^2 (P_1 + P_2)^2.$$

Je prendrai

$$U = S_0 \Sigma \rho_1 P_1 [(A - B) - 2 P_1] = (A - B) \beta_1 - 2 \gamma_1.$$

De cette manière, le premier membre de (H), qui est du second degré en $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$, manquera des termes en $\rho_1^2, \rho_2^2, \ldots, \rho_k^2$. Effectivement, formons le terme en ρ_1^2.

Le terme en ρ_1^2 a :

Dans $u_{(3)}$......	le coefficient	$S_0(P_1^3 Q_1 + P_1^2 Q_1 - A P_1 Q_1)$
Dans $B u_{(2)}$....	»	$S_0 B P_1 Q_1$
Dans $B' u_{(1)}$....	»	0
Dans $B'' u_{(0)}$....	»	0
Dans $\mathfrak{R}_0 U$.....	»	$S_0 P_1 Q_1 [(A - B) - 2 P_1]$
Dans (H)......	»	0

Déterminons maintenant B, B', B'' de telle sorte que les rectangles manquent aussi, et l'identité (H) aura lieu. Dans (H) prenons d'abord les termes suivants :

$$\Omega + B \gamma_2 + B' \beta_2 + B'' S_2.$$

Le terme en $\rho_1 \rho_2$, qui en provient, a pour coefficient

$$C = - S_0 (P_1 - P_2)^2 [(P_1 + P_2)^3 + B(P_1 + P_2)^2 + B'(P_1 + P_2) + B''].$$

Les autres termes de (H) sont

$$R_0^{(1)} [\beta_1 + (B - A) S_1] + R_0^{(2)} S_1 + R_0 [(A - B) \beta_1 - 2 \gamma_1],$$

dans lesquels le coefficient de $\rho_1 \rho_2$ est

$$C' - S_0(P_1 - P_2)[Q_1(P_1 + 2P_2 + B - A) - Q_2(P_2 + 2P_1 + B - A)].$$

Remplaçons ici Q_1 et Q_2 par leurs expressions (B); alors C' se transforme en

$$C' = S_0(P_1 - P_2)^2 \{ (P_1 + P_2)^3 + B(P_1^2 + P_1 P_2 + P_2^2) + 2A P_1 P_2 + [(B - A)A + A'](P_1 + P_2) + (B - A)A' - A'' \}.$$

Sous cette forme, il est visible que l'on aura $C + C' = 0$ si l'on prend

$$B = 2A, \qquad B' = A^2 + A', \qquad B'' = AA' - A''.$$

Ainsi *la courbe adjointe est située sur la surface du troisième degré*

$$z^3 + 2A z^2 + (A' + A^2) z + AA' - A'' = 0.$$

Le calcul des surfaces *correspondantes* pour les deux courbes adjointes s'effectue d'une manière analogue; pour abréger, j'en donne simplement le résultat.

Soit $\mathfrak{a} z^2 + \mathfrak{a}' z + \mathfrak{a}'' = 0$ l'équation d'une autre surface passant par la ligne initiale.

Posons

$$\mathfrak{R}_0 = \sum \theta_1 \frac{\mathfrak{a} P_1^2 + \mathfrak{a}' P_1 + \mathfrak{a}''}{D_1},$$

$$\mathfrak{R}_0^{(1)} = \sum \theta_1 P_1 \frac{\mathfrak{a} P_1^2 + \mathfrak{a}' P_1 + \mathfrak{a}''}{D_1},$$

$$\mathfrak{R}_0^{(2)} = \sum \theta_1 P_1^2 \frac{\mathfrak{a} P_1^2 + \mathfrak{a}' P_1 + \mathfrak{a}''}{D_1};$$

ces quantités sont des polynomes entiers, d'après l'hypothèse.

La courbe adjointe est située sur la surface correspondante

$$\mathfrak{R}_0 z^2 + (A\mathfrak{R}_0 - \mathfrak{R}_0^{(1)}) z - (\mathfrak{a} R_0^{(1)} - A'\mathfrak{R}_0 - \mathfrak{R}_0^{(2)}) = 0;$$

A, A', $R_0^{(1)}$ sont les mêmes polynomes que précédemment.

30. Voici un exemple d'une autre nature. Je prends pour point de départ

$$S_0 = 1, \qquad \beta_0 = 0, \qquad S_1 = a_1, \qquad \beta_1 = a_2,$$

désignant par a_1, a_2 des polynomes arbitraires de degré ν, $\nu + 1$. De même, par a_3, a_4, ... je désignerai des polynomes arbitraires de

degrés $\nu+2$, $\nu+3$, ... On trouve aisément

$$S_2 = a_2^2 - a_1 a_3, \qquad \beta_2 = a_2 a_3 - a_1 a_4,$$
$$\gamma_2 = a_3^2 - a_1 a_5,$$
$$\pi_2 = a_2 a_4 - a_3^2,$$
$$S_3 = a_3^3 - 2 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_4^2 + a_5 S_2, \qquad \beta_3 = a_3^2 a_4 - a_2 a_4^2 - a_5 \beta_2 + a_6 S_2,$$
$$\pi_3 = a_6(a_1 a_4 - a_2 a_3) - a_1 a_5^2 + a_3^2 a_5 + a_2 a_4 a_5 - a_3 a_4^2,$$
$$\gamma_3 = a_1 a_5^2 - 2 a_2 a_4 a_5 + a_4^2 a_3 - a_7 S_2,$$
$$S_4 = a_6^2(a_2^2 - a_1 a_3) + 2 a_6 [a_5(a_1 a_4 - a_2 a_3) + a_4(a_3^2 - a_2 a_4)]$$
$$- a_1 a_5^3 + (a_3^2 + 2 a_2 a_4) a_5^2 - 3 a_4^2 a_3 a_5 + a_4^4 + a_7 S_3,$$
$$\beta_4 = a_6^2(a_1 a_4 - a_2 a_3) + a_6(2 a_5 a_3^2 - a_1 a_5^2 - a_3 a_4^2)$$
$$+ a_5(a_3^2 a_2 - 2 a_3 a_4 a_5 + a_4^3) - a_7 \beta_3 + a_8 S_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

L'étude de la formation de ces polynomes se prêterait à bien des remarques curieuses dont je ne parlerai pas ici.

On peut arrêter cette suite au rang que l'on voudra.

Pour l'arrêter à S_2, il faudra faire $\beta_2 = b_1 S_2$; on aura alors

$$a_3 = b_1 a_2 + b_2 a_1,$$

b_1 et b_2 étant des polynomes arbitraires du premier et du second degré. On obtient ainsi

$$S_2 = a_2^2 - b_1 a_1 a_2 + b_2 a_1^2;$$

les équations $S_2 = 0$, $z = \frac{a_2}{a_1}$ représentent l'intersection complète de la surface $z = \frac{a_2}{a_1}$ avec une surface du second degré.

Pour arrêter la suite à S_3, on fera $\beta_3 = b_1 S_3$, ce qui donne les conditions suivantes :

$$a_4 = c_0 a_2^2 + c_3 a_1, \qquad a_5 = c_0 a_1 a_4 + c_3 a_2, \qquad b_1 = c_0 a_1;$$

la courbe $S_3 = 0$, $z = \frac{\beta_2}{S_2}$ est l'intersection complète d'une surface du troisième degré et d'une autre ayant pour degré le nombre $(\nu+2)$, et ainsi de suite.

En changeant le rang d'arrêt et le nombre ν, on obtiendra de la sorte toutes les courbes qui sont des intersections complètes. L'opération est donc, au fond, ici la même que celle d'éliminer une variable entre deux équations algébriques.

31. Ce dernier exemple doit éveiller l'attention sur un point important de cette théorie. On vient de voir que l'arrêt de la suite à S_3 peut être obtenu en laissant subsister dans la courbe adjointe des arbitraires, tandis que le procédé employé précédemment (nos 17, 18) n'en laisse subsister aucune. Sur ce point, deux observations trouvent ici leur place.

En premier lieu, si l'on se rapporte à l'identité (35) (p. 347), on remarquera qu'on peut réduire son premier membre aux deux premiers termes sans être obligé, pour ce but, de réduire séparément à zéro chacun des coefficients des autres termes. Il suffit de réduire à zéro la somme de tous ces termes, ce qui exige généralement un moindre nombre de conditions (voir n° 17, chap. I, p. 292). Le procédé que j'ai choisi présente seulement cet avantage de ne laisser planer aucun doute sur la possibilité effective de la réduction.

En second lieu, si la courbe initiale est située sur une surface du degré m, renfermant des arbitraires, l'équation (35) dépend aussi de ces arbitraires qui doivent, en conséquence, subsister dans les équations de la courbe adjointe.

Sur ce point spécial il convient de s'arrêter un instant. La courbe initiale étant, je suppose, située sur une infinité de surfaces du degré m, le premier membre de l'équation de la surface dépend linéairement de quelques constantes ω, ω', ω'', ... tout à fait arbitraires. Il est visible que, de même, le premier membre de (35) dépend linéairement de ces mêmes constantes. Suivons, pour effectuer la réduction, la méthode développée au n° 18 : on voit que le premier polynome inconnu λ dépend linéairement de ces constantes, que μ en dépend sous une forme quadratique. Et, généralement, on voit que les polynomes successifs S, β contiennent ω, ω', ω'', ..., de telle sorte que ces polynomes sont des fonctions entières et homogènes de ω, ω', ω'', ...

32. Soit une courbe gauche quelconque C de degré d, dont je considère une représentation $S_0 = 0$, $z = \frac{\beta_1}{S_1}$. Je continue à employer les notations précédentes, en sorte que d_0 n'est autre que d, et d_1 est le degré de S_1. Je suppose la courbe située sur une infinité de surfaces du degré m, et j'admets d'ailleurs qu'on ait

$$d_0 - d_1 < m, \tag{44}$$

condition à laquelle il est toujours possible de satisfaire par le choix de d_1.

En vertu de l'hypothèse, la suite des S ne peut s'arrêter dans la période des degrés décroissants, sans quoi la courbe ne serait située que sur une seule surface du degré m. J'arrête la suite à S_m. Le degré d_m est donné par la formule (11). Je pose

$$d_0 - d_1 = \delta,$$

et j'obtiens

$$d_m = d_0 + m(m - \delta - 1).$$

Ce degré d_m, d'après l'hypothèse (44), est au moins égal à d_0. La courbe adjointe Γ est sur une surface de degré m. D'après la proposition du n° 27, on voit immédiatement qu'elle est sur une infinité de surfaces du degré $(2m - \delta - 1)$.

La courbe C étant située sur une infinité de surfaces du degré m, et étant censée donnée, on voit que la courbe Γ contient des arbitraires, ainsi que je viens de l'expliquer. Est-il possible de profiter de ces arbitraires pour réduire Γ de telle sorte que, tout en étant de degré plus élevé, cette courbe puisse cependant servir utilement à définir C?

On ne le pourra pas, en général. Toute tentative, à cet égard, dont le but serait de fournir un moyen pour définir successivement toutes les courbes gauches les unes par les autres, est destinée d'avance à échouer. Chaque nouvel expédient qu'on imaginera pourra bien servir à définir quelques courbes nouvelles; il cessera d'être bientôt applicable quand on voudra poursuivre au delà des limites que le sujet même impose. C'est ainsi que, par quelques artifices, je donnerai plus loin la définition de toutes les courbes jusqu'au treizième degré inclusivement, sans recourir aux méthodes qui seraient vraiment propres pour ce sujet.

Quant à ces méthodes elles-mêmes, je n'en peux donner ici qu'un aperçu, car elles m'éloigneraient trop du but que je poursuis. Au chapitre V on verra que sur les surfaces d'un degré donné apparaissent comme *fondamentales* des courbes dont le genre est limité par le degré de la surface. Ces courbes étant connues, toutes les autres s'en déduisent. Mais on ne peut échapper à la nécessité de rechercher directement la définition de ces courbes fondamentales. Toutefois, et c'est là ce qu'il importe le plus de remarquer, la recherche de ces courbes sera facilitée par ce fait, qu'en disposant arbitrairement du

nombre d_1 on peut placer les courbes adjointes sur les surfaces spéciales du degré envisagé. C'est ainsi que, dans le chapitre IV, je ferai voir comment, pour les surfaces du troisième degré, la recherche est reportée sur la surface *gauche* de ce degré. En général, il sera toujours possible de définir les courbes sur les surfaces *unicursales*, et de passer ensuite, sans troubler la généralité, à des courbes tracées sur des surfaces quelconques ([1]).

33. Je place ici deux propositions très simples, qui me seront utiles au chapitre VI. Elles n'ont aucun rapport avec le sujet que je viens de traiter. Je crois superflu de donner la démonstration de la première, qui se déduit de principes très connus.

Soient trois courbes (a), (b), (c) ayant respectivement pour degrés a, b, c, et pour nombres de leurs points doubles apparents α, β, γ;

Se rencontrant ainsi : (a) et (b) en C points; (b) et (c) en A points; (c) et (a) en B points;

Et composant l'intersection complète de deux surfaces, de degré m et m'.

Si l'on pose

$$\frac{(m-1)(m'-1)}{2} = \mu,$$

on a les relations

$$\begin{aligned} C &= \alpha + \beta - \gamma + ab - (a + b - c)\mu, \\ A &= \beta + \gamma - \alpha + bc - (b + c - a)\mu, \\ B &= \gamma + \alpha - \beta + ca - (c + a - b)\mu. \end{aligned}$$

De là on tire ces conséquences

$$\begin{aligned} A &= -C + 2\beta + b(a + c - 2\mu), \\ \gamma &= \alpha + \beta - C + ab - (a + b - c)\mu, \end{aligned}$$

qui donnent A et γ quand on connaît α, β, C.

34. La seconde proposition sert à déterminer le nombre des arbitraires figurant dans la définition d'un très grand nombre de courbes; son application sera fréquente au dernier chapitre. La voici :

Soient deux courbes (a), (b) *ayant respectivement pour degrés* a *et* b, *et formant l'intersection complète de deux surfaces ayant pour degrés* m *et* m' $(m \leqq m')$.

([1]) Voir plus loin, chapitre V, n° 15.

Si les genres p et q de ces deux courbes sont respectivement inférieurs à $\frac{ma+1}{2}$ *et* $\frac{mb+1}{2}$, *et que la définition de la courbe* (a) *comporte* $4a$ *arbitraires, alors la définition de la courbe* (b) *comporte* $4b$ *arbitraires.*

De la formule qui lie les nombres de points doubles apparents des deux courbes, on déduit, entre leurs genres p, q, la relation

$$2(p-q) = (a-b)(m+m'-4).$$

J'écris, au lieu de cette dernière, celle-ci qui en diffère seulement dans la forme

$$(45)\quad 4a-(ma+1-p)-(m'a+1-p) \\ +(mb+1-q)+(m'b+1-q)=4b.$$

Suivant l'hypothèse, une surface de degré m menée par (b) contient encore (p. 299) des arbitraires au nombre

$$k = \psi(m) - mb - 2 + q;$$

et de même une surface de degré m', menée par (b), contient encore des arbitraires, au nombre

$$k' = \psi(m') - m'b - 2 + q.$$

Les propriétés supposées permettent de définir la courbe (b) de cette manière :

On prend la courbe (a), ce qui amène des arbitraires au nombre $4a$; on fait passer par cette courbe une surface du degré m, qu'on peut particulariser sans changer la courbe finale (b), en lui imposant de passer par k points à volonté. Cette surface a donc seulement $\psi(m)-1-k$ arbitraires, ou $(mb+1-q)$. La condition de passer par (a) équivaut d'ailleurs à $(ma+1-p)$ conditions. Le nombre des arbitraires qui restent est donc

$$(mb+1-q)-(ma+1-p).$$

On fait passer par (a) une surface du degré m', qui, par suite des mêmes raisons, amène des arbitraires au nombre

$$(m'b+1-q)-(m'a+1-p).$$

D'après la formule (45), on a, au total, des arbitraires dont le nombre est $4b$.

CHAPITRE IV.

Courbes tracées sur les surfaces du troisième degré. — Sur la surface gauche. — Surfaces passant par ces courbes. — Nombre de leurs arbitraires.

---

1. J'ai montré, au chapitre II, que toute courbe gauche, du degré d, pour laquelle le nombre n est moindre que $\frac{2}{3}(d-3)$, se trouve nécessairement sur une surface du second degré. L'analyse qui m'a conduit à ce résultat est un cas particulier de celle que j'ai développée au chapitre III. Revenons, un instant, sur ce cas particulier.

Prenant le minimum n pour le degré du dénominateur de z, je forme une suite S, dans laquelle les degrés successifs sont

$$d_0 = d, \quad d_1 = n, \quad d_2 = 2n - d + 2, \quad d_3 = 3n - 2d + 6,$$
$$d_4 = 4n - 3d + 12, \quad d_5 = 5n - 4d + 20, \quad \ldots.$$

On voit que d_3 n'est positif que sous la condition $n \geqq \frac{2}{3}(d-3)$. Si donc n est moindre que cette limite, la suite s'arrête à S_2, et la courbe est située sur une surface du second degré. C'est ce que nous apprend la proposition générale du chapitre III (p. 355); c'est aussi ce que j'ai établi à part, dans le chapitre II.

Faisons le même raisonnement sur d_4, et concluons ainsi :

Toute courbe, de degré d, non située sur une surface du second degré, et pour laquelle le nombre n est moindre que $\frac{3}{4}(d-4)$, est située sur une surface du troisième degré.

2. Examinons d'abord les courbes qu'il est possible d'obtenir avec les moindres valeurs de n, et, à cet effet, distinguons trois cas suivant les caractères de divisibilité de d par le nombre 3.

1° $d = 3d'$; $n = 2(d'-1)$. On a $d_3 = 0$, c'est ici un cas de la proposition du chapitre III, n° 26 (p. 359). *La courbe est l'inter-*

section complète d'une surface du troisième degré et d'une surface du degré d'. On a

$$h = 3d'(d' - 1).$$

2° $d = 3d' + 1$; $n = 2d' - 1$. Pour ce cas, $d_3 = 1$. L'adjointe est une ligne droite. Pour cette adjointe, le nombre des points doubles apparents est zéro. Il n'y a, par suite, qu'une valeur de h compatible avec les hypothèses. On retrouve aisément cette valeur de h, comme il suit. On a (p. 360)

$$d_0 d_1 - 2h = d_2 d_3 - 2h',$$

donc ici

$$2h = (3d' + 1)(2d' - 1) - (d' - 1) = 2d'(3d' - 1).$$

Le nombre h est donc $d'(3d' - 1)$. La ligne droite, qui est ici l'adjointe, se complète sur une surface du troisième degré par une conique. C'est donc aussi le cas pour la courbe initiale.

Donc *la courbe est l'intersection d'une surface du troisième degré et d'une surface de degré $(d' + 1)$ se coupant, en outre, suivant une conique.*

3° $d = 3d' - 1$; $n = 2d' - 2$; $d_3 = 2$. L'adjointe peut présenter deux cas : elle se compose d'une conique, c'est-à-dire que le nombre de ses points doubles apparents est zéro. On a alors

$$h = (3d' - 2)(d' - 1).$$

L'adjointe se complète par une ligne droite; il en est de même de la courbe proposée.

Dans le second cas, l'adjointe se compose de deux droites, h surpasse d'une unité le nombre précédent. L'adjointe se complète par une courbe du quatrième degré. Ainsi :

Deux courbes distinctes de degré $(3d' - 1)$ répondent au nombre $n = 2d' - 2$. La première, pour laquelle on a

$$h = (3d' - 2)(d' - 1),$$

est l'intersection d'une surface du troisième degré et d'une surface de degré d', complétée par une droite; la seconde, pour laquelle on a

$$h = (3d' - 2)(d' - 1) + 1,$$

est l'intersection d'une surface du troisième degré et d'une

surface de degré $(d'+1)$, *complétée par une courbe du quatrième degré unicursale.*

3. Pour être en mesure d'examiner les courbes qui répondent aux autres valeurs du nombre n, il nous faut trouver, d'une manière précise, le minimum de h qui correspond à n.

Au chapitre I (nº 14), nous avons déjà obtenu une limite de ce minimum, donnée par la formule (16); et, dans le chapitre II, nous avons reconnu (p. 314) que cette limite est *précise* dans le cas où la courbe est située sur une surface du second degré. Quand ce cas particulier n'a pas lieu, la formule en question n'est plus précise. C'est ce dont on va se rendre compte immédiatement.

Considérons, avec la suite S_0, S_1, S_2, S_3, une suite de polynomes *correspondants* r_0, r_1, r_2, suivant la définition du chapitre II (nº 6, p. 325). J'ai fait observer (p. 334) que les degrés de ces polynomes s'enchaînent ainsi : r_0 étant du degré $(d_1+\varepsilon)$, r_1 est du degré $(d_2+\varepsilon-1)$, r_2 du degré $(d_3+\varepsilon-2)$. Le polynome r_0 est un quelconque de ceux qui peuvent servir de dénominateur à z, puisque, par définition, c'est un quelconque des polynomes qui s'évanouissent en tous les points (h_0). Si donc d_1 est égal au minimum n, il est impossible que ε soit moindre que zéro. Il n'existe donc aucun polynome r_1 de degré moindre que (d_2-1). C'est justement en écrivant cette condition que nous avons trouvé l'inégalité du chapitre I. Mais, si maintenant la suite continue jusqu'à S_2, nous pouvons considérer r_2, et dire :

Si d_1 est égal au minimum n, il est impossible de mener par les points doubles de la projection de l'adjointe $S_3=0$ *une courbe de degré moindre que* (d_3-2).

Pour que cette condition soit remplie, il faut que le nombre h' des points doubles apparents de cette adjointe soit au moins

$$\frac{(d_3-1)(d_3-2)}{2}.$$

Donc :

Une courbe, tracée sur une surface du troisième degré, a pour adjointe de degré minimum une courbe unicursale, ou une courbe impropre ayant un nombre de points doubles apparents supérieur à celui qui appartient aux courbes unicursales.

D'après la relation entre h et h', savoir

$$d_0 d_1 - 2h = d_2 d_3 - 2h',$$

d'après les expressions de d_1, d_2, d_3, et la condition imposée à h', j'ai maintenant l'inégalité

$$(1) \qquad h \geqq \frac{n(n+1)}{2} + (d-n-2)^2,$$

qui donne pour chaque valeur de n une limite supérieure à celle qui était fournie par la formule du chapitre I. Il ne faut pas l'oublier, la formule (1) n'est valable que si la courbe *n'est pas* sur une surface du second degré. Elle n'exige pas d'ailleurs que la courbe soit sur une surface du troisième degré, comme le raisonnement employé le fait bien voir.

Je désignerai dans ce qui va suivre par $\sigma(n)$ la limite (1)

$$(2) \qquad \sigma(n) = \frac{n(n+1)}{2} + (d-n-2)^2.$$

Le minimum de $\sigma(n)$, pour des valeurs entières de n, a justement lieu quand n a les valeurs considérées au n° 2, au cas du moins où d n'est pas divisible par 3. Au cas où d est divisible par 3, $d = 3d'$, la formule (1) ne peut pas être appliquée pour $n = 2(d'-1)$. Le raisonnement ci-dessus est effectivement en défaut pour $d_3 = 0$. Prenons la valeur suivante de n ; c'est elle aussi qui donne le minimum de $\sigma(n)$. Ce minimum est

$$3d'(d'-1)+1,$$

supérieur d'une unité au nombre h trouvé au n° 2 pour le cas

$$n = 2d' - 1.$$

Il est donc établi que les valeurs de h, trouvées au n° 2, sont les plus petites possibles. Ces trois valeurs peuvent être comprises dans une seule formule arithmétique, en sorte que l'on a cette proposition :

Toute courbe gauche, de degré d, sans point singulier, dont le nombre des points doubles apparents est moindre que l'entier contenu dans $\frac{(d-2)(d-1)}{3}$, est située sur une surface du second degré.

4. La question la plus intéressante est celle-ci : *En rapprochant la dernière proposition des résultats du chapitre II* (n° 6, p. 315), *on a ce résultat : parmi les entiers compris entre* $\left[\left(\frac{d-1}{2}\right)^2\right]$ *et* $\left[\frac{(d-2)(d-1)}{3}\right]$, *quelques-uns seulement peuvent être égaux aux nombres des points doubles apparents de courbes du degré d. Des lacunes de même nature existent-elles encore après la limite* $\left[\frac{(d-2)(d-1)}{3}\right]$?

Cette question se résout par la négative. Je vais, en effet, montrer dans ce chapitre qu'*à tout nombre h compris entre*

$$\frac{(d-2)(d-1)}{3} \quad et \quad \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

correspond une famille de courbes sur les surfaces du troisième degré. Depuis la limite $\left[\frac{(d-2)(d-1)}{3}\right]$ jusqu'à une autre limite que l'on trouvera au chapitre suivant, ces familles constituent des types généraux. Au delà, elles peuvent ne plus être que des cas particuliers.

Remarquons d'abord les deux égalités suivantes :

$$\sigma(n+1)-\sigma(n)=3n-2d+6=d_3,$$
$$\frac{d_3(d_3-1)}{2}-\frac{(d_3-1)(d_3-2)}{2}=d_3-1,$$

et concluons que, si l'on veut assigner successivement à h les valeurs

$$\sigma(n),\quad \sigma(n)+1,\quad \sigma(n)+2,\quad \ldots,\quad \sigma(n+1)-1,$$

les valeurs correspondantes pour le nombre h' des points doubles de l'adjointe sont

$$\frac{(d_3-1)(d_3-2)}{2},\quad \frac{(d_3-1)(d_3-2)}{2}+1,$$
$$\frac{(d_3-1)(d_3-2)}{2}+2,\quad \ldots,\quad \frac{d_3(d_3-1)}{2}.$$

Le dernier de ces nombres correspond à une courbe dégénérée en des lignes droites. Aucun de ces nombres ne paraît *a priori* impossible. En ayant recours à la surface gauche du troisième degré, on reconnaît la possibilité d'obtenir sur cette surface au moins une partie des lignes composées, présentant ces nombres de points doubles

apparents. Je ne veux pas insister sur ce point, qui exigerait des détails dont nous allons nous passer; mais je ferai remarquer que les calculs effectués à la fin du chapitre III (n° 29) nous donnent explicitement les équations de la plupart des courbes tracées sur les surfaces du troisième degré, comme il suit :

1° En supposant que les lignes $D_i = 0$, $z = P_i$ (les notations sont ici celles de la page 361) soient des lignes droites ne se rencontrant pas, faisant varier le nombre k de ces droites, et aussi le degré des polynomes θ, on a, par le calcul du n° 29, les équations de toutes les courbes du degré d, tracées sur les surfaces du troisième degré, et ayant des points doubles apparents au nombre $h = \sigma(n+1) - 1$, le nombre n étant arbitrairement choisi entre $\frac{2}{3}(d-3)$ et $(d-2)$. On remarquera que la surface, sur laquelle sont placées les droites, est gauche, mais que la surface correspondante, sur laquelle est placée la courbe, ne l'est pas, comme on le verra aisément par la formule de la page 368, qui donne l'équation de cette surface.

2° Prenant encore pour les lignes $D_i = 0$, $z = P_i$ des lignes droites sur une surface gauche du troisième degré, je pourrai supposer que $(k - k')$ de ces droites partent de divers points de la directrice double, et que les k' autres $\left(k' \leqq \frac{1}{2}k\right)$ partent de k' points, pris parmi les précédents. En faisant varier k' dans les limites 0, $\frac{1}{2}k$, et opérant de même que je viens de l'expliquer à l'égard de k et du degré des θ, on aura d'autres séries de courbes, explicitement représentées.

3° Prenant pour les lignes $D_i = 0$, $z = P_i$ des coniques ne se rencontrant pas (et l'on peut en avoir un nombre quelconque sur une surface ordinaire du troisième degré), ou encore des coniques ne se rencontrant pas et quelques lignes droites, on obtiendra la représentation effective des courbes de degré d, ayant des points doubles apparents en nombre marqué par les formules suivantes :

$$h = \sigma(2n') \quad + 3n' - d + \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 4, \end{cases}$$

$$h = \sigma(2n'+1) + 3n' - d + \begin{cases} 4 \\ 5 \\ 6, \end{cases}$$

le nombre n, qui est $2n'$ ou $2n'+1$, pouvant être choisi arbitrairement dans les limites $\frac{2}{3}(d-3)$ et $(d-2)$.

La considération des lignes décomposées rend ainsi, *a priori*, très vraisemblable la proposition énoncée; mais une discussion approfondie serait nécessaire pour que l'on eût de cette manière une démonstration complète. Pour éviter cette discussion, je vais employer un autre moyen, en ayant recours, d'une manière spéciale, à la surface gauche du troisième degré.

5. Sur la surface gauche du troisième degré, considérons une courbe C du degré d, *sans point singulier*. Il va nous être facile de reconnaître que le nombre h des points doubles apparents de C n'est pas un entier quelconque compris entre les limites ci-dessus désignées.

Soit A la droite, directrice double de la surface; soit B la droite, directrice simple.

Je désigne par λ le nombre des points où C rencontre une génératrice rectiligne G quelconque; par a le nombre des points où C rencontre A; par b le nombre des points où C rencontre B. On a manifestement

$$d = \lambda + a = 2\lambda + b, \qquad a > b.$$

Toute corde issue d'un point de A est nécessairement sur la surface. La droite A, elle-même, rencontrant C en a points, compte pour une corde multiple. De là ce résultat :

$$h = \frac{a(a-1)}{2} + \lambda(\lambda-1),$$

ce que j'écris ainsi

$$h = \frac{(d-\lambda)(d-\lambda-1)}{2} + \lambda(\lambda-1). \tag{3}$$

Le nombre λ peut acquérir toutes les valeurs entières depuis 0 *jusqu'à $\frac{1}{2}d$.* La formule (3) donne ainsi pour h la suite discontinue

$$\frac{d(d-1)}{2}, \quad \frac{(d-1)(d-2)}{2}, \quad \frac{(d-2)(d-3)}{2}+2,$$
$$\frac{(d-3)(d-4)}{2}+6, \quad \ldots.$$

A chacune de ces valeurs de h répond effectivement une courbe.

Par analogie avec la méthode employée par M. Chasles pour définir les courbes tracées sur les hyperboloïdes, je vais donner ici l'équation générale des courbes actuelles sur la surface gauche du troisième degré. Je glisse d'ailleurs rapidement sur ce sujet, tout à fait élémentaire.

6. Soient

x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées homogènes dans l'espace;
$x_1 = x_2 = 0$ la droite double A;
$x_3 = x_4 = 0$ la droite simple B;
$t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 + t_4 x_4 = 0$ un plan t de comparaison, le plan de l'infini si l'on veut.

Par α, β je désigne les points de rencontre d'une génératrice G avec A et B respectivement;

Par α_t, β_t les rencontres respectives de A, B avec le plan t;

Par I, II, III, IV les sommets du tétraèdre de référence, respectivement opposés aux plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Je définis chaque génératrice G par les deux rapports anharmoniques

$$\xi = \frac{\alpha\mathrm{III}}{\alpha\mathrm{IV}} \, \frac{\alpha_t\mathrm{IV}}{\alpha_t\mathrm{III}},$$

$$\eta = \frac{\beta\mathrm{I}}{\beta\mathrm{II}} \, \frac{\beta_t\mathrm{II}}{\beta_t\mathrm{I}}.$$

La surface est définie par une relation entre ξ, η de cette forme :

$$\xi = \frac{M\eta^2 + M'\eta + M''}{N\eta^2 + N'\eta + N''} + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}},$$

où M, ..., N″ sont des constantes.

Je définis maintenant un point arbitraire g sur G, en considérant sur cette génératrice G les points α, β, et le point g_t où elle rencontre le plan t, et envisageant le rapport anharmonique

$$\zeta = \frac{g\alpha}{g\beta} \, \frac{g_t\beta}{g_t\alpha}.$$

De cette manière, η et ζ constituent des coordonnées sur la surface et correspondent *uniformément* aux points de cette surface. Toute courbe sur la surface sera bien définie par une relation entre η et ζ;

mais, si l'on prend cette relation sous une forme arbitraire, on définira généralement une courbe présentant des singularités sur les directrices. Le calcul suivant montre quelle est la forme qu'il faut adopter pour éviter cet écueil.

Envisageons un plan arbitraire s :

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + s_4 x_4 = 0.$$

En cherchant l'expression de ζ pour le point de rencontre de G avec ce plan, on trouve

$$\zeta = -\frac{t_1 t_2 (\eta - 1)}{t_3 t_4 (\mathfrak{M} - \mathfrak{N})} \frac{s_4 t_3 \mathfrak{M} - s_3 t_4 \mathfrak{N}}{s_2 t_1 \eta - s_1 t_2}.$$

Faisons, pour abréger,

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{N} = \mathfrak{P}.$$

Le facteur indépendant des arbitraires s, qui se trouve dans l'expression de ζ, nous révèle la forme qu'il faut choisir.

En désignant généralement par $\varphi_i(\eta)$ un polynome entier en η, du degré i, on représentera la courbe C par l'équation

$$\varphi_b(\eta)\left(\frac{\mathfrak{P}\zeta}{\eta - 1}\right)^{\lambda} + \varphi_{b+1}(\eta)\left(\frac{\mathfrak{P}\zeta}{\eta - 1}\right)^{\lambda-1} + \varphi_{b+2}(\eta)\left(\frac{\mathfrak{P}\zeta}{\eta - 1}\right)^{\lambda-2} + \ldots + \varphi_{b+\lambda}(\eta) = 0.$$

Ajoutons que, sur cette équation, il est facile de trouver le *genre* de la courbe plane engendrée par un point dont les coordonnées cartésiennes seraient η, ζ, courbe qui correspond *point par point* à la courbe gauche. On retrouverait ainsi la formule (3). Mais je ne veux pas insister davantage. Il me suffit d'avoir représenté effectivement toutes les courbes C, répondant à une quelconque des valeurs de λ.

7. Je n'aurai besoin de considérer qu'une partie seulement des courbes C, du degré d, celles pour lesquelles on a $\lambda < 1 + \frac{d}{4}$. J'envisage une telle courbe, ayant des point doubles apparents au nombre h, donné par la formule (3).

Posant $n = d - \lambda - 1$, je peux écrire la formule (3) ainsi, en la comparant à (2),

$$h = \frac{n(n+1)}{2} + (d - n - 1)(d - n - 2) = \sigma(n) + d - n - 2.$$

J'ai aussi, d'après l'hypothèse $\lambda < \frac{d}{4} + 1$,

$$\sigma(n+1) - h = 4n - 3d + 8 > 0.$$

Le nombre h est ainsi compris entre $\sigma(n)$ et $\sigma(n+1)$, sans atteindre ces deux limites. Il atteint seulement la limite inférieure dans le cas $\lambda = 1$, cas qui est celui d'une courbe unicursale. Il résulte alors de l'inégalité (1) que le nombre $n = d - \lambda - 1$ est effectivement le degré minimum des dénominateurs de z pour la représentation de la courbe C suivant les procédés généraux de ce mémoire.

L'adjointe, de degré minimum, de la courbe C est une ligne composée Γ, dont le degré est

$$d_3 = 3n - 2d + 6 = d - 3\lambda + 3,$$

et dont le nombre des points doubles apparents h' est

$$h' = \frac{(d_3 - 1)(d_3 - 2)}{2} + \lambda - 1.$$

J'ai donc, de la sorte, défini une série de lignes Γ, dont les éléments comprennent les deux entiers arbitraires d, λ, ce dernier astreint à la condition $\lambda < 1 + \frac{d}{4}$; je n'ai nul besoin d'approfondir la nature de ces lignes Γ, et je peux montrer qu'*elles sont capables de servir d'adjointes à l'universalité des courbes tracées sur les surfaces du troisième degré.*

8. Soit à définir une courbe $\mathfrak{C}$, tracée sur une surface du troisième degré non donnée, qu'on veuille que cette courbe soit du degré D, et qu'elle ait H points doubles apparents, ce nombre H étant d'ailleurs supérieur à la limite $\left[\frac{(D-2)(D-1)}{3}\right]$.

En considérant la suite continuellement croissante des nombres $\sigma(n)$, on trouvera que H est compris entre deux nombres $\sigma(N)$, $\sigma(N+1)$, de cette manière

$$\sigma(N) \leqq H < \sigma(N+1),$$

et l'on posera

$$(4) \qquad \begin{cases} H - \sigma(N) = \lambda - 1, \\ 3N - 2D + 6 = d - 3\lambda + 3. \end{cases}$$

Ces deux équations (4) déterminent deux nombres entiers d, λ, qui sont positifs, et satisfont, en outre, à la condition $\lambda < 1 + \frac{1}{4}d$; car cette condition, d'après (4), devient

$$4[H - \sigma(N)] < 3N - 2D + 6 + 3[H - \sigma(N)],$$
$$H - \sigma(N) < 3N - 2D + 6,$$

ce qui est précisément l'hypothèse $H < \sigma(N+1)$.

Considérons maintenant la courbe C du numéro précédent, définie par ces deux nombres d, λ, et son adjointe Γ. Le degré d_3 de cette adjointe est précisément le même que celui de l'adjointe de la courbe $\mathfrak{C}$, le nombre h' est aussi le même pour les deux adjointes.

Nous pouvons laisser de côté le cas où N serait égal à D — 2, cas qui correspond uniquement à une courbe unicursale. Pour tout autre cas, nous avons $N \leqq D - 3$, et de là résulte

$$2N - 2D + 2 \geqq (3N - 2D + 6) - 1.$$

Or, dans la suite des polynomes S_0, S_1, S_2, S_3, les nombres

$$2N - 2D + 3, \quad 3N - 2D + 6$$

sont justement les degrés de S_2 et S_3. Cette inégalité se traduit donc ainsi

$$d_2 \geqq d_3 - 1.$$

Or, au chapitre I (p. 304), on a vu que toute ligne composée est toujours susceptible d'une représentation dans laquelle z a un dénominateur de degré au plus égal au degré de cette ligne, diminué d'une unité. Donc la ligne Γ, adjointe de C, pourra toujours être représentée par $z = \frac{\beta_2}{S_2}$, avec un polynome S_2 du degré $(2N - 2D + 2)$. Dans ce mode de représentation, l'adjointe de Γ sera une courbe du degré D, située sur une surface du troisième degré, ayant H points doubles apparents. La courbe $\mathfrak{C}$ est donc ainsi définie, et son existence est prouvée.

9. On peut même faire disparaître l'intermédiaire de la courbe Γ et passer directement d'une courbe C à une courbe $\mathfrak{C}$, l'une étant l'adjointe de l'autre. Voici comment :

Représentons la courbe C, non plus par un monoïde de degré $(d-\lambda)$, mais par un monoïde de degré supérieur $(d-\lambda+\varepsilon)$, ε étant un nombre positif. Dans ce mode de représentation, prenons l'adjointe de C, et appelons $\mathfrak{C}$ cette adjointe. Le degré D de $\mathfrak{C}$ sera

$$D = d - 3\lambda + 3(\varepsilon + 1).$$

En calculant le nombre H des points doubles apparents de $\mathfrak{C}$, comme on l'a déjà fait maintes fois, on trouve

$$H = \frac{(d-3\lambda+2\varepsilon+1)(d-3\lambda+2\varepsilon+2)}{2} + \lambda - 1 + \varepsilon^2.$$

Si l'on pose

$$N = d - 3\lambda + 2\varepsilon + 1,$$

on a

$$D - N - 2 = \varepsilon$$

et, par suite,

$$H = \sigma(N) + \lambda - 1.$$

En vertu de l'hypothèse $\lambda < 1 + \frac{d}{4}$, on voit aisément que le nombre N est effectivement le minimum du degré des dénominateurs de z pour la représentation de la courbe $\mathfrak{C}$.

Dans le mode de représentation actuel, le polynome S_2 a pour degré $(d-2\lambda+2\varepsilon)$, ce qu'on peut encore exprimer par

$$N + (\lambda - 2\varepsilon - 1) + 2\varepsilon = N + \lambda - 1;$$

La courbe $\mathfrak{C}$ est ainsi représentée par un polynome S_2 de degré supérieur au minimum.

Réciproquement, on voit qu'en représentant une courbe $\mathfrak{C}$ par un monoïde de degré $N + H - \sigma(N) + 1$, représentation qui entraîne des arbitraires, on pourra profiter de ces arbitraires pour que l'adjointe soit une courbe C, située sur la surface gauche du troisième degré.

Ainsi se trouve mise hors de doute la proposition énoncée au n° 4.

10. Je veux maintenant examiner les questions qui concernent les surfaces menées par ces courbes.

La question est immédiatement résolue pour les courbes du

premier groupe, c'est-à-dire celles pour lesquelles on a

$$h \geqq \frac{(d-2)(d-3)}{2} + 1.$$

J'ai effectivement démontré (p. 275) que la condition de passer par une telle courbe équivaut toujours, pour une surface du degré m, à $(md + 1 - p)$ conditions.

Il s'agit ici de cas particuliers de ces courbes. Par la courbe passe *exceptionnellement* une surface du troisième degré A_3. Pour qu'une surface, passant par la courbe, ne dégénère pas en A_3, il faut qu'il lui reste au moins $\psi(m) - \psi(m-3) - 1$ arbitraires. Or on a

$$\psi(m) - \psi(m-3) - 1 = \frac{3m(m+1)}{2}.$$

Il existera donc des surfaces du degré m, si le nombre ω ci-après est positif :

$$\omega = \frac{3m(m+1)}{2} - md - 1 + p.$$

La ligne, complémentaire de la courbe sur la surface A_3, contient alors ω arbitraires. De là les résultats suivants, où par m je désigne le degré minimum des surfaces :

1° $d = 3d'$.

I.	$p = 0$,	$m = 2d'$,	$\omega = 3d' - 1$;
II.	$p \geqq 1$,	$m = 2d' - 1$,	$\omega = p - 1$.

2° $d = 3d' + 1$.

I.	$p < 2d'$,	$m = 2d'$,	$\omega = d' - 1 + p$;
II.	$p \geqq 2d'$,	$m = 2d' - 1$,	$\omega = p - 2d'$.

3° $d = 3d' - 1$.

I.	$p < d'$,	$m = 2d' - 1$,	$\omega = 2d' - 2 + p$;
II.	$p \geqq d'$,	$m = 2d' - 2$,	$\omega = p - d'$.

11. Les adjointes de degré mimimum des courbes précédentes reproduisent la totalité des adjointes de degré minimum de toutes les courbes tracées sur les surfaces du troisième degré. Mieux encore, si l'on se passe de l'intermédiaire de ces adjointes de degré minimum,

il est visible que toute courbe correspondant aux nombres d, n donne lieu à une adjointe appartenant au premier groupe, si l'on emploie, pour la représenter, un monoïde de degré $(n+1)$. Il est donc aisé de transformer les résultats que nous venons d'obtenir en résultats relatifs à toutes les courbes.

Ces résultats peuvent être formulés comme il suit :

1° $d = 3d'$.

La courbe dont le nombre des points doubles apparents est $h = \sigma(n) + \rho$, *au moins égal à* $\sigma(n)$, *inférieur à* $\sigma(n+1)$, *est complétée par une ligne dont le degré est* $3(n - 2d' + 2)$, *admettant des arbitraires au nombre* $\omega = 3n - 2d + 5 - \rho$.

De la sorte, à partir du minimum de h inclusivement, il y a :

$$1 \text{ valeur de } h,\quad h = 3d'(d'-1) \qquad \text{répondant à } n = 2(d'-1) \text{ et à } m = d',\qquad \omega = 0$$

$$3 \text{ valeurs de } h,\quad h = 3d'(d'-1) + \left\{\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}\right\} \text{ répondant à } n = 2d'-1 \text{ et à } m = d'+1,\quad \omega = \left\{\begin{array}{c}2\\1\\0\end{array}\right.$$

$$6 \text{ valeurs de } h,\quad h = 3d'(d'-1) + \left\{\begin{array}{c}4\\5\\6\\7\\8\\9\end{array}\right\} \text{ répondant à } n = 2d' \text{ et à } m = d'+2,\quad \omega = \left\{\begin{array}{c}5\\4\\3\\2\\1\\0\end{array}\right.$$

. . . .

$$-6d'+6 \text{ valeurs de } h,\quad h = \sigma(n) + \left\{\begin{array}{c}0\\1\\2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\3n-6d'+5\end{array}\right\} \text{ répondant à } n,\ m = n - d' + 2,\quad \omega = \left\{\begin{array}{c}3n-6d'+5\\3n-6d'+4\\3n-6d'+3\\\cdots\cdots\\\cdots\cdots\\1\\0\end{array}\right.$$

Le dernier de ces groupes correspond à $n = 3d' - 3$, et comprend $(3d' - 3)$ familles, dont la dernière est caractérisée par

$$h = \frac{(3d'-1)(3d'-2)}{2} - 1.$$

La courbe unicursale se trouve seule dans le groupe suivant, que complètent les courbes impropres.

2° $d = 3d' + 1$.

Les groupements suivant les valeurs de n et celles de m ne se correspondent pas comme dans le cas précédent.

La courbe dont le nombre des points doubles apparents est $h = \sigma(n) + \rho$, au moins égal à $\sigma(n)$, inférieur à $\sigma(n+1)$, est complétée ainsi :

Dans le cas où $\rho \leqq n - 2d'$; par une courbe de degré

$$3(n - 2d' + 1) - 1,$$

ayant $(n - 2d' - \rho)$ arbitraires;

Dans le cas où $\rho > n - 2d'$; par une courbe de degré

$$3(n - 2d' + 1) + 2,$$

ayant $4(n + 1 - 2d') + 1 - \rho$ arbitraires.

Il y a ainsi successivement :

$$1 \text{ valeur de } h,\quad h = d'(3d' - 1) \qquad \text{répondant à } n = 2d' - 1$$

$$4 \text{ valeurs de } h,\quad h = d'(3d' - 1) + \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right\} \text{répondant à } n = 2d'$$

$$7 \text{ valeurs de } h,\quad h = d'(3d' - 1) + \left\{\begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}\right\} \text{répondant à } n = 2d' + 1$$

. . . .

$$2 \text{ valeurs de } h,\quad h = d'(3d' - 1) + \left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\} \text{répondant à } m = d' + 1,\ \omega = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

$$5 \text{ valeurs de } h,\quad h = d'(3d' - 1) + \left\{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}\right\} \text{répondant à } m = d' + 2,\ \omega = \left\{\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

$$8 \text{ valeurs de } h,\quad h = d'(3d' - 1) + \left\{\begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}\right\} \text{répondant à } m = d' + 3,\ \omega = \left\{\begin{matrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right.$$

. . . .

et ainsi de suite.

3° $d = 3d' - 1$.

La courbe dont le nombre des points doubles apparents est $h = \sigma(n) + \rho$, au moins égal à $\sigma(n)$, inférieur à $\sigma(n+1)$, est complétée ainsi :

Dans le cas où $\rho \leqq 2(n - 2d' + 2)$; par une ligne de degré

$$3(n - 2d' + 2) + 1,$$

ayant $2(n - 2d' + 2) - \rho$ arbitraires;

Dans le cas où $\rho > 2(n - 2d' + 2)$; par une ligne de degré

$$3(n - 2d' + 2) + 4,$$

ayant $5(n - 2d' + 2) - 1 - \rho$ arbitraires.

Il y a ainsi successivement :

$$2 \text{ valeurs de } h,\quad h = (3d' - 2)(d' - 1) + \left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\} \text{ pour } n = 2d' - 2$$

$$5 \text{ valeurs de } h,\quad h = (3d' - 2)(d' - 1) + \left\{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}\right\} \text{ pour } n = 2d' - 1$$

$$8 \text{ valeurs de } h,\quad h = (3d' - 2)(d' - 1) + \left\{\begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}\right\} \text{ pour } n = 2d'$$

. . . .

$$1 \text{ valeur de } h,\quad h = (3d' - 2)(d' - 1) \qquad \text{ pour } m = d',\quad \omega = 0$$

$$4 \text{ valeurs de } h,\quad h = (3d' - 2)(d' - 1) + \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right\} \text{ pour } m = d' + 1,\quad \omega = \left\{\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

$$7 \text{ valeurs de } h,\quad h = (3d' - 2)(d' - 1) + \left\{\begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}\right\} \text{ pour } m = d' + 2,\quad \omega = \left\{\begin{matrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

. . . .

et ainsi de suite.

12. Il est extrêmement facile de faire le compte des arbitraires figurant dans la définition de toutes ces courbes. En premier lieu, d'après la définition de celles qui répondent aux moindres valeurs de h, on a ces résultats :

1° $d = 3d'$, $h = 3d'(d'-1)$........ Les arbitraires sont au nombre
$$\frac{3d'(d'+1)}{2}+19,$$
sauf au cas $d'=3$, où elles sont seulement au nombre 36, inférieur d'une unité à celui que donne cette formule.

2° $d = 3d'+1$, $h = d'(3d'-1)$........ Les arbitraires sont au nombre
$$\frac{(d'+1)(3d'+2)}{2}+18,$$
sauf au cas $d'=2$, où le nombre est inférieur de 2 unités, soit 28.

3° $d = 3d'-1$, $h = (3d'-2)(d'-1)$. Les arbitraires sont au nombre
$$\frac{(d'+1)(3d'-2)}{2}+19,$$
sauf au cas $d'=3$, où le nombre est seulement 32.

Sont exclus de ces résultats les cas où d' a des valeurs moindres. Les courbes sont alors sur des surfaces du second degré; il faut recourir aux résultats du chapitre II.

D'autre part, pour les courbes du *premier groupe*, celles dont le nombre des points doubles apparents est compris entre $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ et $\frac{(d-2)(d-3)}{2}+1$, le compte des arbitraires est immédiat. Les courbes générales de ce groupe admettent des arbitraires au nombre $4d$. La condition relative à une surface du troisième degré donnée équivaut à $(3d+1-p)$ conditions simples. La surface amène d'ailleurs 19 arbitraires. Le nombre total est donc $(d+p+18)$.

En employant, comme au numéro précédent, pour chacune des autres courbes, une adjointe appartenant au premier groupe, on étend facilement ce résultat à toutes les courbes. Ainsi :

Chacune de ces courbes admet, par sa définition, $d+p+18$ *arbitraires. On a d'ailleurs* $p=\frac{(d-1)(d-2)}{2}-h$.

Je ne suis entré dans aucun détail sur les courbes complémentaires. Ce sont, comme on le voit immédiatement, des lignes composées et dont, en beaucoup de cas, des parties sont multiples. L'étude en serait intéressante, mais elle sortirait du cadre que je me suis ici tracé. Ce n'est pas, en effet, la classification des courbes sur les surfaces, mais la classification générale des courbes qui fait l'objet de ce mémoire.

CHAPITRE V.

Courbes tracées sur les surfaces du quatrième degré. — Courbes tracées sur les surfaces du cinquième degré. — Principes généraux de la classification.

---

1. Les principes qui viennent d'être appliqués dans le chapitre IV peuvent être employés pour les courbes tracées sur les surfaces de tous les degrés. Avant de m'occuper de l'application générale, je vais encore examiner successivement, et sous une forme très abrégée, le cas des surfaces du quatrième et du cinquième degré.

Soit une courbe par laquelle ne passe aucune surface du second degré, ni du troisième degré. Soient S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 les polynomes qui dérivent de la représentation de cette courbe, et ayant les degrés

$$d_0 = d, \quad d_1 = n, \quad d_2 = 2n - d + 2, \quad d_3 = 3n - 2d + 6,$$
$$d_4 = 4n - 3d + 12, \quad d_5 = 5n - 4d + 20, \quad \ldots.$$

Si l'on a $n < \frac{4}{5}(d-5)$, *la courbe est située sur une surface du quatrième degré.* Effectivement la suite S s'arrête forcément à S_4 d'après les hypothèses.

2. Les moindres valeurs de n sont (p. 374) données par la condition $n \geq \frac{3}{4}(d-4)$. Elles conduisent aux conséquences suivantes :

					Surfaces.	Courbes complémentaires.
1°	$d = 4d'$,	$n = 3(d'-1)$, $d_4 = 0$.	$h = 6d'(d'-1)$ ……..		A_4, $A_{d'}$	*Intersection complète.*
2°	$d = 4d'+2$,	$n = 3d'-1$, $d_4 = 2$.	$h = 6d'^2 +$	0	A_4, $A_{d'+1}$	une conique.
				1	A_4, $A_{d'+2}$	du 6ᵉ degré, ayant 7 points doubles apparents.
3°	$d = 4d'+1$,	$n = 3d'-2$, $d_4 = 1$.	$h = 3d'(2d'-1)$		A_4, $A_{d'+1}$	une cubique plane.
4°	$d = 4d'+3$,	$n = 3d'$, $d_4 = 3$.	$h = 3d'(2d'+1) +$	0	A_4, $A_{d'+1}$	une droite.
				1, 2, 3	A_4, $A_{d'+2}$	du 5ᵉ degré.

Les quatre moindres valeurs de h, données ici, sont comprises dans la formule arithmétique $3\left[\frac{(d-2)^2}{8}\right]$.

3. En suivant le raisonnement du chapitre IV (n° 3, p. 376), on peut dire : Si la suite S ne s'arrête pas avant S_4, il faut, pour que n soit effectivement minimum, que les points (h_3), intersections doubles des courbes $S_3 = 0$ et $S_4 = 0$ ne soient pas situés sur une courbe de degré inférieur à $(d_4 - 3)$.

Si maintenant la suite S s'arrête effectivement à S_4, la courbe adjointe, représentée par $S_4 = 0$, $z = \frac{\beta_3}{S_3}$, doit être telle qu'on ne puisse mener par les points doubles de $S_4 = 0$ aucune courbe de degré inférieur à $(d_4 - 3)$. Or la condition pour qu'il en soit ainsi est (chap. I, p. 290)

$$h_3 \geqq \frac{(d_4 - 2)(d_4 - 3)}{2} + 1.$$

En conséquence, *toute courbe tracée sur une surface du quatrième degré a pour adjointe une courbe appartenant au premier groupe, ou une courbe impropre.*

Cette condition pour h_3 se transforme en une condition pour h, d'après la relation

$$d_0 d_1 - 2h = d_3 d_4 - 2h_3;$$

elle devient ainsi

$$(1) \qquad h \geqq \frac{n(n+1)}{2} + (d-n-2)^2 + \frac{(d-n-2)(d-n-5)}{2} + 1.$$

Il y a toutefois lieu de remarquer une exception au raisonnement suivant. Cette exception se produit dans le cas où S_3 est d'un degré moindre que $(d_4 - 3)$. Dans ce cas, en effet, la courbe adjointe se trouve représentée par un monoïde de degré moindre que $(d_4 - 2)$. Mais le polynome S_3 ne permet pas le raisonnement employé. Ce cas d'exception est distingué par la condition $d_3 \leqq d_4 - 4$, qui se change en $n \geqq d - 2$, et ne joue, en conséquence, aucun rôle : effectivement l'hypothèse $n = d - 2$ ne conduit pas à une suite S s'arrêtant forcément à S_4. Pour ce cas, il faudra prendre

$$h \geqq \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

En exceptant la valeur minima de n, pour laquelle l'examen des

divers cas vient d'être fait, nous voyons que, n décroissant depuis $(d-3)$ jusqu'au minimum, le second membre de (1) décroît toujours. Par conséquent :

Toute courbe gauche, du degré d, dont le nombre des points doubles apparents est moindre que $3\left[\frac{(d-2)^2}{8}\right]$, *est située sur une surface du troisième ou du second degré.*

4. Soit $\tau(n)$ le second membre de (1); cette fonction $\tau(n)$ a pour différence première

$$\tau(n+1)-\tau(n)=4n-3d+10=d_4-2.$$

On obtient donc pour h tous les nombres $\tau(n)$, $\tau(n)+1$, $\tau(n)+2$, ..., $\tau(n+1)-1$, en prenant successivement pour h_3 les nombres

$$\frac{(d_4-2)(d_4-3)}{2}+1, \quad \text{ou} \quad +2, \ +3, \ \ldots, \ +(d_4-2).$$

Le dernier de ces nombres est, comme on voit, $\frac{(d_4-2)(d_4-1)}{2}$.

Les autres valeurs de h que l'on obtiendra, avec la même valeur de n, et en donnant à h_3 les valeurs suivantes, pourront être obtenues aussi avec la valeur immédiatement supérieure prise pour le nombre n. La première manière doit évidemment être considérée comme un cas particulier de la seconde.

Nous rencontrons ainsi, pour la première fois, cette circonstance qui ne s'était pas encore offerte : une famille de courbes pour laquelle le nombre n est susceptible de deux valeurs.

Cette circonstance sera d'ailleurs considérée comme tout à fait secondaire, et nous n'aurons pas à nous en occuper. Prenant seulement le type le plus général de chaque famille, nous voyons qu'il nous suffira de donner à h_3 les valeurs ci-dessus, comprises entre les deux limites

$$\frac{(d_4-3)(d_4-2)}{2}+1 \quad \text{et} \quad \frac{(d_4-2)(d_4-1)}{2}$$

inclusivement. Ces valeurs de h_3 correspondent à des courbes connues, celles du premier groupe.

Nous sommes ainsi en mesure de définir et de représenter effectivement toutes les courbes existant sur les surfaces du quatrième

degré. Leur classification, suivant les principes employés au chapitre précédent, n'offre dès lors aucune difficulté. J'en présente ici les résultats.

Au point de vue des valeurs de n, nous avons d'abord la classification suivante :

1° $d = 4d'$.

1 valeur de h, $h = 6d'(d'-1)$,.......... répondant à $n = 3(d'-1)$.
Une lacune de 1 unité dans les valeurs de h.

2 valeurs de h, $h = 6d'(d'-1) + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\}$,... répondant à $n = 3d'-2$,

6 valeurs suivantes, $h = 6d'(d'-1) + 4 \ldots + 9$,. répondant à $n = 3d'-1$,

10 valeurs suivantes,.......................... répondant à $n = 3d'$,

....

2° $d = 4d'+2$.

1 valeur de h, $h = 6d'^2$,............... répondant à $n = 3d'-1$ (V. *Nota*).

4 valeurs de h, $h = 6d'^2 + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \right\}$,....... répondant à $n = 3d'$,

8 valeurs suivantes,.................... répondant à $n = 3d'+1$,

12 valeurs suivantes,.................... répondant à $n = 3d'+2$,

....

Nota. — La seconde valeur de h signalée au n° 2 appartient à un cas particulier, le cas général répondant à la valeur suivante de n. (Remarque de la page précédente.)

3° $d = 4d'+1$.

1 valeur de h, $h = 3d'(2d'-1)$,....... répondant à $n = 3d'-2$,

3 suivantes, $h = 3d'(2d'-1) + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right\}$, répondant à $n = 3d'-1$,

7 suivantes,.......................... répondant à $n = 3d'$,

11 suivantes,.......................... répondant à $n = 3d'+1$,

....

4° $d = 4d'+3$.

2 valeurs de h, $h = 3d'(2d'+1) + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\}$, répondant à $n = 3d'$,

5 valeurs de h suivantes,............... répondant à $n = 3d'+1$,

9 suivantes,.......................... répondant à $n = 3d'+2$,

13 suivantes,.......................... répondant à $n = 3d'+3$,

....

Au point de vue des valeurs de m, minimum du degré de la surface

passant par la courbe, la classification est plus simple. Elle n'exige la distinction que de deux cas :

1° $d = 2\delta$. *La courbe dont le nombre des points doubles apparents h est compris entre $\tau(n)$ et $\tau(n+1)$, cette dernière limite exclue, est sur une surface dont le degré est $m = 2n - 3\delta + 6$; la courbe complémentaire admet encore des arbitraires au nombre $\tau(n+1) - 1 - h$.*

2° $d = 2\delta + 1$. *La courbe dont le nombre des points doubles apparents h est compris entre*

$$\tau(n) - 2n + 3\delta - 2 \quad et \quad \tau(n+1) - 2(n+1) + 3\delta - 2,$$

cette dernière limite exclue, est sur une surface dont le degré m est $m = 2n - 3\delta + 4$; la courbe complémentaire admet des arbitraires au nombre $\tau(n+1) - 2(n+1) - 3\delta - 3 - h$.

Les courbes complémentaires appartiennent toutes au premier groupe.

Par là on démontre sans peine que *toutes ces courbes admettent, dans leur définition, des arbitraires au nombre $p + 33$*, sauf l'intersection complète, répondant à $d = 4d'$, $n = 3(d' - 1)$, qui contient une arbitraire de plus que n'indique cette formule, le cas $d' = 4$ excepté.

A l'égard des valeurs de m, les courbes précédentes peuvent offrir aussi des cas particuliers, dont je n'ai pas à tenir compte dans ma classification. Pour prendre un seul exemple, dans le cas $d = 4d' + 2$ la courbe $h = 6d'^2 + 1$ est généralement complétée par une courbe du sixième degré à 7 points doubles apparents. Cette dernière peut dégénérer en une courbe plane du quatrième degré et deux droites la rencontrant. La courbe proposée est alors complétée par deux lignes droites.

5. En poursuivant l'application des mêmes principes, nous trouvons que :

Une courbe du degré d qui n'est située ni sur une surface du second, ni du troisième, ni du quatrième degré, et pour laquelle n est inférieur à $\frac{5}{6}(d - 6)$, est située sur une surface du cinquième degré.

Les moindres valeurs de n conduisent aux résultats suivants :

					Degré de la 2ᵉ surface.	Courbe complémentaire.
1°	$d=5d'$,	$n=4(d'-1)$,	$h=10d'(d'-1)$,		$m=d'$	*Intersection complète.*
2°	$d=5d'+1$,	$n=4d'-3$,	$h=2d'(5d'-3)$,		$m=d'+1$	plane du 4ᵉ degré.
3°	$d=5d'+2$,	$n=4d'-2$,	$h=2d'(5d'-1)+$	0	$m=d'+1$	cubique plane.
				1	$m=d'+2$	du 8ᵉ degré ($h=13$).
4°	$d=5d'+3$,	$n=4d'-1$,	$h=2d'(5d'+1)+$	0	$m=d'+1$	une conique.
				1, 2, 3	$m=d'+2$	du 7ᵉ degré, $h=$ 9, 10, 11
5°	$d=5d'+4$,	$n=4d'$,	$h=2d'(5d'+3)+$	0	$m=d'+1$	une droite.
						Lacune.
				2, 3	$m=d'+2$	du 6ᵉ degré, $h=$ 6, 7
				4, 5, 6	$m=d'+3$	du 11ᵉ degré, $h=$ 32, 33, 34

Nous voyons ici apparaître nettement la nécessité qu'il y avait de dire quelques mots des courbes impropres, comme je l'ai fait à la fin du chapitre I. En considérant le dernier cas, celui qui se rapporte à $d=5d'+4$, nous avons pour adjointe une courbe du quatrième degré. Il y aura autant de valeurs pour h que l'on en pourra considérer pour le nombre analogue, relatif à cette adjointe. Or les courbes propres du quatrième degré n'ont que zéro, 2 ou 3 points doubles apparents. Les courbes impropres amènent aussi, comme on le sait, les nombres 4, 5, 6. Mais le nombre 1 ne peut en aucune façon être obtenu; c'est ce qui résulte de la proposition démontrée au chapitre I. Il ne peut l'être non plus au moyen de courbes à points singuliers. Effectivement, la courbe adjointe s'offre ici comme représentée par des polynomes possédant, dans tous les cas, les propriétés qui leur appartiennent pour les courbes sans point singulier. Cette adjointe, si elle a des points singuliers, doit donc être envisagée comme un cas particulier de courbe sans point singulier, comme je l'ai dit au chapitre I (p. 301). L'observation que je viens de faire ici trouvera son application à tous les autres exemples que je prendrai; il me sera inutile de la répéter.

6. Considérons les deux limites

$$h \geqq \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(d-n-1)(d-n-2)}{2}, \tag{2}$$

$$h \leqq \frac{n(n+1)}{2} + (d-n-2)^2 \tag{3}$$

trouvées, la première au chapitre I (p. 290), la seconde au chapitre IV (p. 377). La première, avons-nous dit, n'est rigoureuse que si la courbe est située sur une surface du second degré, en sorte que, dans le cas où la courbe n'est pas sur une telle surface, on doit préférer la seconde limite. Prenons ces deux limites pour $n = d - 4$; elles deviennent respectivement

$$(2\ bis) \qquad h \geqq \frac{(d-3)(d-4)}{2} + 3,$$

$$(3\ bis) \qquad h \geqq \frac{(d-3)(d-4)}{2} + 4.$$

Envisageons maintenant une courbe quelconque de degré d, située sur une surface du cinquième degré, et non sur une surface de degré moindre. Soit n le degré minimum du dénominateur de z, soit S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 la suite déduite de la représentation de la courbe. En employant le même raisonnement que plus haut (p. 377), nous avons pour condition de minimum celle-ci : *Les points doubles de la courbe* $S_5 = 0$ *ne doivent pas être situés sur une courbe de degré moindre que* $(d_5 - 4)$.

Sauf pour les moindres valeurs de n, déjà étudiées, d_5 est supérieur à 5, en sorte que la courbe $S_5 = 0$ ne peut être plane, étant située sur une surface du cinquième degré. La condition que je viens de trouver s'exprime donc par les inégalités (2 *bis*) ou (3 *bis*) entre d_5 et h_4.

La condition (2 *bis*) n'aura son application que si l'adjointe peut être effectivement sur une surface du second degré. Ceci exige qu'on ait $d_5 \leqq 9$, car le cas $d_5 = 10$ doit être écarté : l'adjointe étant une intersection complète sur la surface du cinquième degré, la courbe le serait aussi, et ce cas est déjà envisagé.

Comme on le voit, cette circonstance se présente pour la valeur de n immédiatement supérieure au minimum, et ne se présente plus pour aucune autre valeur. Ainsi, pour la première valeur de n après le minimum, nous devons adopter la limite (2 *bis*), en ayant soin de ne pas oublier la condition qu'elle entraîne pour l'adjointe, d'être située sur une surface du second degré. Pour les autres valeurs, il faut prendre la limite (3 *bis*). En vertu de la relation

$$d_0 d_1 - 2h = d_5 d_4 - 2h_4,$$

nous avons ainsi pour h ces deux limites :

$$(4)\quad h \geqq \frac{n(n+1)}{2} + 2(d-n-2)(d-n-4) + \begin{cases} 3 & \text{dans le premier cas,} \\ 4 & \text{dans tous les autres.} \end{cases}$$

Suivant une remarque analogue à celle que j'ai faite au n° 3 (p. 393), on ne doit pas pousser l'usage de cette limite (4) au delà de $n = d - 4$. Pour $n = d - 3$, il faut prendre la même limite que dans le cas des courbes tracées sur les surfaces du quatrième degré. Pour $n = d - 2$, on retrouve toujours le seul cas de la courbe unicursale.

A l'égard de la première des deux limites (4), il y a encore lieu, dans le cas particulier où d est divisible par 5, d'introduire une modification. Pour la valeur de n immédiatement supérieure au minimum, l'adjointe est du cinquième degré. Elle peut être une courbe impropre, dégénérée en une courbe plane du quatrième degré et une droite qui rencontre cette dernière, et avoir ainsi 3 points doubles apparents seulement, au lieu de 4. Or c'est avec ce dernier nombre 4, minimum du nombre des points doubles apparents d'une courbe propre du cinquième degré, qu'a été construite la formule. Donc, dans ce cas spécial, il faut ajouter le nombre 2, au lieu du nombre 3, dans le second membre de l'inégalité (4). On voit aisément que cette modification ne trouve pas sa place dans les autres cas.

7. D'après cette discussion, voici les valeurs de h qui répondent à la valeur de n immédiatement supérieure au minimum :

1° $d = 5d'$, $n = 4d' - 3$, $h = 10d'(d'-1) + 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Ces valeurs présentent une *lacune de deux unités* pour faire suite à la valeur de h trouvée précédemment.

2° $d = 5d' + 1$, $n = 4d' - 2$, $h = 2d'(5d' - 3) + 2, 3, \ldots, 11$; valeurs présentant une lacune de 1 unité avec celle ci-dessus.

3° $d = 5d' + 2$, $n = 4d' - 1$, $h = 2d'(5d' - 1) + 1, 2, \ldots, 13$; pas de lacune. Il est important de remarquer que les deux manières d'obtenir $h = 2d'(5d' - 1) + 1$ ne peuvent être confondues. Effectivement ici la courbe complémentaire est une cubique gauche, courbe plus simple que dans le cas précédent; mais le nombre n est plus élevé.

4° $d = 5d' + 3$, $n = 4d'$, $h = 2d'(5d' + 1) + 1, 2, \ldots, 16$; pas de lacune. Même remarque : le nombre $h = 2d'(5d' + 1) + 1$

s'obtient de deux manières différentes : 1° $n = 4d' - 1$, $m = d' + 2$; 2° $n = 4d'$, $m = d' + 1$. Dans ce dernier cas, la ligne complémentaire se compose de deux droites.

5° $d = 5d' + 4$, $n = 4d' + 1$, $h = 2d'(5d' + 3) + 3, 4, \ldots, 29$. Ici une autre remarque : la formule (4), avec le nombre complémentaire 3, donnerait $h = 2d'(5d' + 3) + 2$. Mais ce nombre est impossible : il correspond, en effet, à une adjointe du neuvième degré, située sur une surface du second degré et des surfaces du sixième, ce qui ne répond pas à la question.

8. Considérons maintenant les autres valeurs de n. En appelant $v(n)$ la fonction qui figure au second membre de (4), on a

$$v(n+1) - v(n) = 5n - 4d + 15 = d_5 - 5.$$

On obtient donc la série complète des valeurs de h en prenant pour l'adjointe, de degré d_5, les valeurs de h_4 depuis $\frac{(d_5-3)(d_5-4)}{2} + 4$ jusqu'à $\frac{(d_5-2)(d_5-3)}{2} + 1$, les deux limites comprises.

La fonction $v(n)$ est d'ailleurs croissante avec n, les valeurs ci-dessus de n étant exclues; donc :

Toute courbe du degré d qui n'est située sur aucune surface du second ou du troisième degré, et pour laquelle le nombre des points doubles apparents est inférieur à la limite $2\frac{d(d-5)}{5}$ au cas $d \equiv 0$ (mod. 5), *ou à la limite $2\left[\frac{(d-2)(d-3)}{5}\right]$ pour les autres cas, est située sur une surface du quatrième degré.*

Comme on le voit, on trouvera sur les surfaces du cinquième degré la série complète des valeurs de h, sauf les lacunes indiquées plus haut. Mais l'étude de ces courbes devient plus difficile. Ce ne sont plus les courbes du premier groupe qui servent à la définition de toutes les autres. Je ne veux pas entrer dans plus de détails sur ce sujet particulier, et j'arrive maintenant à la généralisation complète. Nous y sommes maintenant suffisamment préparés.

9. Je suppose une courbe représentée par $S_0 = 0$, $z = \frac{\beta_1}{S_1}$, le polynome S_1 ayant le degré minimum n. Je suppose, en outre, que la suite S ne s'arrête pas avant S_m. Ainsi tous les nombres $d_2, d_3, d_4, \ldots,$

d_{m-1}, d_m sont positifs, c'est-à-dire

$$in - (i-1)d + i(i-1) \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Nous avons, en premier lieu, à considérer le cas où le nombre d_{m+1} serait négatif, c'est-à-dire le cas où l'on a

$$n < \frac{m}{m+1}(d - m - 1).$$

S'il en est ainsi, la suite s'arrête forcément à S_m. L'adjointe pour la plus petite valeur de n, suivant les caractères de divisibilité de d par m, est de degré 0, 1, 2, ... ou $(m-1)$. Posons

$$d = m\left[\frac{d}{m}\right] + \rho = md' + \rho,$$

ρ étant ainsi le reste de la division de d par m. Le plus petit nombre n est $n = (m-1)(d'-1) + \rho$. La courbe adjointe est du degré ρ. La plus petite valeur de h, pour cette valeur de n, s'obtient en supposant $h_{m-1} = 0$, c'est-à-dire en supposant plane la courbe adjointe. Sur une surface de degré m, cette adjointe a pour complémentaire une courbe plane, de degré $(m - \rho)$; il en est de même de la courbe proposée. Ainsi *pour la valeur minima de n, on obtient le minimum de h, en considérant l'intersection d'une surface de degré m avec une surface de degré d', au cas où $\rho = 0$; avec une surface de degré $d' + 1$ dans les autres cas; la courbe complémentaire est alors plane et du degré $(m - \rho)$. La valeur correspondante de h est*

$$h = \frac{(d-\rho)(d-m+\rho)(m-1)}{2m} = \frac{d'(md'+2\rho-m)(m-1)}{2}.$$

Cette valeur de h est la seule qu'on trouve dans les cas $\rho = 0$, $\rho = 1$. Mais, pour $\rho = 2$, on a une autre valeur résultant de l'hypothèse que l'adjointe se compose de deux droites. Pour $\rho = 3$, on peut supposer que cette adjointe a 0, 1, 2, 3 points doubles apparents, ce qui donne 4 valeurs de h. Pour $\rho = 4$, on a de même la valeur ci-dessus de h, ou cette valeur augmentée de 0 | 2, 3, 4, 5, 6, avec une lacune.

Pour $\rho = 5$, on peut augmenter h de 0 | 3, 4, 5, ..., 10.

Pour chaque valeur de ρ, on peut augmenter h de tous les nombres qui peuvent être ceux des points doubles apparents d'une courbe

propre ou impropre du degré ρ. Nous n'avons pas étudié ces nombres, ce qui constitue un défaut de cette théorie, défaut d'ailleurs inévitable. Nous savons toutefois (p. 303) que les valeurs présentent au moins la lacune suivante : $0 | \rho - 2, \rho - 1, \ldots$.

10. Il faut maintenant généraliser le raisonnement employé au n° 6. A cet effet, laissant complètement de côté la question de la recherche des courbes tracées sur les surfaces du $m^{\text{ième}}$ degré, j'aborde une question qui semble bien différente, au premier abord ; mais, dans le fond, elle revient au même.

J'envisage l'ensemble des courbes gauches qui ont le degré d et le nombre caractéristique n, et je cherche quel est le minimum possible du nombre de leurs points doubles apparents h.

Déjà nous avons résolu des cas de ce problème, par les formules

$$(a)\quad h = \frac{(d-1)(d-2)}{2} \qquad \text{si} \quad n = d-2;$$

$$(b)\quad h \geqq \frac{(d-2)(d-3)}{2} + 1, \qquad \text{si} \quad n = d-3;$$

$$h = \frac{(d-3)(d-4)}{2} + 3, \qquad \text{si} \quad n = d-4 \left\{ \begin{array}{l} \text{et si la courbe est sur une} \\ \text{surface du } 2^{\text{e}} \text{ degré;} \end{array} \right.$$

$$(c)\quad h \geqq \frac{(d-3)(d-4)}{2} + 4, \qquad \text{si} \quad n = d-4 \left\{ \begin{array}{l} \text{et si la courbe n'est pas sur} \\ \text{une surface du } 2^{\text{e}} \text{ degré.} \end{array} \right.$$

Comme on le voit par ce dernier exemple, la limite cherchée dépend du degré minimum des surfaces qui passent par la courbe. Cette dépendance va devenir de plus en plus frappante quand nous allons poursuivre. J'admettrai comme évident le principe que *la limite inférieure de h ne peut décroître quand le degré minimum des surfaces augmente.*

Soit m un nombre au plus égal à $(d-n)$. Je suppose que la courbe envisagée soit située sur une surface du degré m, et ne soit située sur aucune surface de degré moindre. La suite S déduite des polynomes S_0, S_1, qui ont les degrés $d_0 = d$, $d_1 = n$, s'arrête au rang m. La condition que d_1 soit égal au minimum n exige que par les points (h_{m-1}) ne passe aucune courbe de degré inférieur à $d_m - (m-1)$. C'est cette condition dont nous allons tirer la solution du problème.

D'après l'hypothèse $m \leqq d - n$ et la relation

$$d_{m-1} - d_m = d - n - 2(m-1),$$

on conclut $d_m - (m-1) < d_{m-1}$. En conséquence, les courbes S_{m-1}, β_{m-1} et celles qu'on en déduit par l'opération B sont de degré supérieur au degré $d_m - (m-1)$ que l'on considère ici, et l'on n'a pas à en tenir compte.

Pour que les points (h_{m-1}) ne soient sur aucune courbe de degré inférieur à $d_m - (m-1)$, la condition

$$(5) \qquad h_{m-1} \geqq \frac{(d_m - m + 1)(d_m - m + 2)}{2}$$

est *nécessaire*. Elle se transforme aisément en une condition *nécessaire* pour h, d'après la relation $nd - 2h = d_{m-1}d_m - 2h_{m-1}$. Si l'on pose

$$(6) \qquad \varphi(q, m) = \frac{(m-1)q(q-m+3)}{2},$$

la condition (5) donne celle-ci

$$(7) \qquad h \geqq \frac{n(n+1)}{2} + \varphi(d-n-2, m).$$

Mais cette dernière relation (7) montre que la condition (5) n'est pas suffisante. Effectivement, pour la courbe adjointe, les nombres analogues à d, n sont d_m et $d_m - (m-1)$. Soit m_1 le degré minimum des surfaces passant par cette adjointe. D'après (7), la condition (5) devra être remplacée par cette autre

$$(5\ bis) \qquad h_{m-1} \geqq \frac{(d_m - m + 1)(d_m - m + 2)}{2} + \varphi(m-3, m_1).$$

Ce qui amènera, au lieu de (7), cette autre

$$(7\ bis) \qquad h \geqq \frac{n(n+1)}{2} + \varphi(d-n-2, m) + \varphi(m-3, m_1).$$

Le même raisonnement peut être poursuivi, et je le poursuivrai dans un instant en prenant successivement $n = d-5$, $d-6$, $d-7$, ... La loi cherchée apparaîtra très nettement de la sorte. Mais je dois faire observer que la généralité de cette loi doit nécessairement subir des interruptions à partir d'une certaine limite du nombre n, quand le nombre d est numériquement donné. Ce fait tient manifestement au nombre m_1 qui figure dans la formule (7 *bis*). On a déjà vu (p. 359) qu'à toute surface de degré m', passant par la courbe proposée, correspond une surface de degré $[m + m' - (d-n) - 1]$, passant par

l'adjointe. De la sorte, si m' est le degré minimum des surfaces, autres que la surface de degré m considérée d'abord, et qui passent par la courbe proposée, le nombre m_1 est égal au plus petit des deux nombres m ou $[m+m'-(d-n)-1]$. *Dans l'analyse qui va suivre, je supposerai m_1 supérieur à* $(m-3)$, et je réserverai les autres cas. Il est, dès à présent, facile de prévoir quels seront ces derniers cas. Effectivement, l'hypothèse que je viens d'énoncer cesse d'avoir lieu sous les conditions

$$m' \geqq m, \qquad m' \leqq d-n-2.$$

D'ailleurs le produit mm' est nécessairement supérieur à d, et, par suite, m' supérieur à $\sqrt{d}$. Ainsi les cas dont il s'agit ne pourront s'offrir que lorsqu'on aura

(8) $$d-n-2 > \sqrt{d}.$$

11. Donnons à $(d-n)$ les valeurs numériques successives $5, 6, 7, \ldots$; je suppose d assez grand pour que l'inégalité (8) n'ait pas lieu, et c'est dans cette hypothèse que je raisonne. Je prends pour point de départ les résultats rappelés au commencement du n° **10**, et je raisonne pour le cas $d-n=5$, comme je viens de l'indiquer.

Si la courbe est sur une surface du second degré, nous aurons

$$h = \frac{n(n+1)}{2} + \varphi(3, 2) = \frac{(d-4)(d-5)}{2} + 6.$$

Si la courbe est sur une surface du troisième degré, nous aurons

$$h \geqq \frac{n(n+1)}{2} + \varphi(3, 3) \geqq \frac{(d-4)(d-5)}{2} + 9.$$

Si la courbe est sur une surface du quatrième degré, nous devons appliquer à l'*adjointe*, non la condition (5), mais la condition analogue à (b), ce qui augmente la limite d'une unité, et donne

$$h \geqq \frac{n(n+1)}{2} + \varphi(3, 4) + 1 \geqq \frac{(d-4)(d-5)}{2} + 10.$$

Si la courbe est sur une surface du cinquième degré, nous devons appliquer à l'adjointe, non la condition (5), mais la condition analogue à (c), ce qui donne

(d) $$h \geqq \frac{n(n+1)}{2} + \varphi(3, 5) + 4 \geqq \frac{(d-4)(d-5)}{2} + 10.$$

Nous ne pouvons pousser le raisonnement au delà, puisqu'il faudrait alors se servir de résultats non établis encore, et c'est ici qu'intervient le principe énoncé au n° 10. D'après ce principe, la formule (d) a lieu pour les courbes situées sur des surfaces dont le degré minimum n'est pas moindre que 5.

Prenons maintenant $d - n = 6$, et nous aurons, si la courbe est sur une surface du second degré :

$$h = \frac{n(n+1)}{2} + \varphi(4, 2) = \frac{(d-5)(d-6)}{2} + 10;$$

si la courbe est sur une surface du troisième degré :

$$h \geqq \frac{n(n+1)}{2} + \varphi(4, 3) \geqq \frac{(d-5)(d-6)}{2} + 16;$$

si la courbe est sur une surface du quatrième degré [en appliquant à l'adjointe la relation (b)] :

$$h \geqq \frac{n(n+1)}{2} + \varphi(4, 4) + 1 \geqq \frac{(d-5)(d-6)}{2} + 19;$$

si la courbe est sur une surface du cinquième degré [en appliquant la relation (c)] :

$$h \geqq \frac{n(n+1)}{2} + \varphi(4, 5) + 4 \geqq \frac{(d-5)(d-6)}{2} + 20;$$

si la courbe est sur une surface du sixième degré [en appliquant la formule (d)] :

$$h \geqq \frac{n(n+1)}{2} + \varphi(4, 6) + 10 \geqq \frac{(d-5)(d-6)}{2} + 20.$$

Nous avons maintenant cette formule

$$(e) \qquad h \geqq \frac{(d-5)(d-6)}{2} + 20$$

pour le cas $n = d - 6$, et si la courbe n'est pas sur une surface de degré moindre que 5.

Le raisonnement se poursuit sans obstacle, et la loi se manifeste ainsi :

Soit $\psi(\mu) = \frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{6}$, *la formule générale est*

$$(9) \qquad h \geqq \frac{(d-2-\mu)(d-3-\mu)}{2} + \psi(\mu),$$

valable pour $n = d - 3 - \mu$, *sous la condition que la courbe ne soit située sur aucune surface dont le degré soit inférieur à* $(\mu+2)$.

Si la courbe est située sur une surface dont le degré m *soit inférieur à* $\mu + 2$, *la condition* (9) *est remplacée par celle-ci :*

$$(9 \textit{ bis}) \qquad h \geqq \frac{(d-2-\mu)(d-3-\mu)}{2} + \psi(\mu) - \psi(\mu - m + 1).$$

Je rappelle que la *formule* (9 *bis*) *est subordonnée à la condition* $\mu + 1 \leqq \sqrt{d}$. Quant à la formule (9), elle n'est pas subordonnée à cette condition.

Il n'y a aucune utilité à traiter dans leur généralité les cas réservés à la fin du n° 10; les applications suffiront à montrer ce qui convient à ces cas. Qu'il nous suffise d'observer que la formule (9) ne cesse pas d'être valable.

12. Il reste encore à étudier les circonstances relatives à un nombre n pour lequel cette analyse soit inapplicable. Elle est fondée sur la considération d'une suite de polynomes correspondants r_0, r_1, r_2, ..., r_{m-1}. Nous avons établi la condition de minimum du nombre n, en disant : un polynome r_0 de degré $(d_1 - 1)$ est impossible; donc aussi sont impossibles des polynomes r_1 de degré $(d_2 - 2)$, r_2 de degré $(d_3 - 3)$, ..., r_{m-1} de degré $(d_m - m)$.

Ce raisonnement tombe en défaut si les nombres $d_1 - 1$, $d_2 - 2$, ..., $d_m - m$ ne sont pas tous positifs.

Si une courbe du degré d correspond au nombre n, si elle est située sur une surface de degré minimum m, et que l'un des nombres $d_1 - 1$, $d_2 - 2$, ..., $d_m - m$ soit négatif, il est manifeste que n est effectivement minimum. Il n'y a donc aucune condition à fonder sur la propriété du minimum. La limite inférieure de h provient d'une autre source.

Les circonstances dont il s'agit peuvent s'offrir dans deux cas : 1° la suite S s'arrête d'elle-même, les degrés d_i devenant nuls ou négatifs; 2° la suite S ne s'arrête pas de cette manière.

Examinons d'abord ce deuxième cas. Soit m le premier des nombres 1, 2, ... pour lesquels $(d_m - m)$ soit négatif. Ainsi

$$d_{m-1} - (m-1) \geqq 0, \qquad d_m - m < 0.$$

D'après la formule générale

$$d_m = d + m^2 - (d - n + 1)m,$$

ces deux inégalités donnent

$$d - m + 2 - \frac{d}{m} > n \geqq d - m + 3 - \frac{d}{m-1}.$$

Soit donc m tel que cette double inégalité soit satisfaite. Posons, comme précédemment, $d = md' + \rho$, en désignant par ρ le reste de la division $\frac{d}{m}$. La plus grande valeur de n est

$$(10) \qquad n = d - m + 1 - d'.$$

Si nous prenons pour n la valeur immédiatement inférieure n'

$$n' = d - m - d',$$

nous aurons dans la suite S correspondante, $d_m = d - m(d' + 1)$, nombre essentiellement négatif. Donc la suite S, relative au nombre n', s'arrête avant S_m. Par hypothèse, d'ailleurs, la suite S, relative au nombre n, ne présente pas cette circonstance que les degrés d_i deviennent négatifs. Donc *le nombre n est supérieur d'une unité au plus grand des nombres n', relativement auxquels la suite des nombres d_i contient des nombres négatifs.*

Il n'y a donc, pour chaque degré d, qu'un seul nombre n donnant lieu au cas que nous examinons. Pour certains degrés d, il n'y a même aucun tel nombre n. C'est ce qui se produit quand dans la suite S, relative à un nombre n', un tel degré d_m devient nul, sans que le nombre d_{m+1} soit négatif. Cette circonstance, on le voit aisément et les applications vont le mettre en évidence, se présente quand le nombre d est un carré.

Ce nombre n étant supposé exister, examinons les courbes qu'il caractérise. La question ne se pose qu'à l'égard de celles qui ne sont situées sur aucune surface de degré inférieur à m. Soit donc $m' \geqq m$ le minimum du degré de la surface. Chacune des courbes se trouvera au moyen de son adjointe de rang m'. Cette adjointe devra être

choisie parmi celles qui ne sont situées sur aucune surface de degré inférieur à $2m' - (d - n) + 1$. On trouvera ainsi tous les cas possibles en prenant m' depuis m jusqu'à $(d - n + 1)$. La limite inférieure de h, trouvée avec la dernière valeur de m', sera appliquée ensuite aux valeurs supérieures de m'. C'est la conséquence du principe invoqué au n° 10. On verra par les applications que, dans le cas dont il s'agit, la suite S peut toujours être arrêtée à un rang tel que l'adjointe soit de degré inférieur à d.

13. Un mot maintenant sur le premier cas. Par hypothèse, la suite des degrés d_i devient nulle ou négative. Soit d_m le dernier de ces nombres, nul ou positif. On a déjà vu (9) comment se trouvent les valeurs de h pour le cas où la suite S ne s'arrête pas avant S_m. Il reste à examiner les courbes situées sur des surfaces dont le degré soit inférieur à m. Cet examen se fait par les mêmes procédés que dans les autres cas. On peut seulement observer que, pour chaque degré d, il n'existe jamais qu'une seule valeur de n, pour laquelle la suite d_i présente des nombres nuls ou négatifs, et pour laquelle en même temps l'un des nombres $d_i - i$, le dernier excepté, devienne négatif. C'est ce qu'on peut facilement démontrer et ce qu'on apercevra sur les exemples ci-après. Un tel nombre n n'existe pas toujours; mais, quand il existe, c'est nécessairement le plus grand de ceux pour lesquels les nombres d_i deviennent nuls ou négatifs. Dans un tel cas, et pour le nombre i donnant $d_i - i < 0$, la discussion et le résultat sont précisément les mêmes qu'au n° 9.

14. Il est malaisé de saisir bien exactement la portée de cette discussion autrement que sur les exemples. Aussi vais-je maintenant y procéder. Je présenterai dans le chapitre suivant la classification des courbes, de proche en proche, jusqu'au degré 20. Mais bien des circonstances de cette discussion ne se présentent que fort tard. Pour cette raison, je vais terminer ce chapitre par un premier aperçu concernant les courbes d'un degré très élevé. L'utilité des considérations précédentes sera mise ainsi en pleine lumière.

Je prends l'exemple $d = 120$. Le nombre n peut recevoir toutes les valeurs entières depuis le minimum $n = 59$ jusqu'au maximum $n = 118$.

Le nombre $n = 99$ est le plus grand de ceux pour lesquels la

suite d_i comprenne des nombres nuls ou négatifs. Pour chacun des nombres $n \leqq 99$, le degré de l'adjointe est moindre que celui de la proposée. Les courbes correspondantes peuvent donc être facilement obtenues, au moyen des courbes de degré inférieur; on peut les omettre dans un premier aperçu.

Pour les autres nombres $n \geqq 100$, je calculerai la dernière, la plus élevée des limites d'après les principes exposés précédemment.

Je forme d'abord le tableau des valeurs de la fonction qui figure au second membre de l'inégalité (9)

$$\Psi(n) = \frac{n(n+1)}{2} + \psi(d-n-3),$$

et j'y joins deux séries de nombres dont l'utilité va être visible.

n.	$d-n+1$.	$60n$.	$\frac{1}{2}n(n+1)$.	$\psi(d-n-3)$.	$\Psi(n)$.
118.........	3	7080	7021	0	7021
117.........	4	7020	6903	1	6904
116.........	5	6960	6786	4	6790
115.........	6	6900	6670	10	6680
114.........	7	6840	6555	20	6575
113.........	8	6780	6441	35	6476
112.........	9	6720	6328	56	6384
111.........	10	6660	6216	84	6300
110.........	11	6600	6105	120	6225
109.........	12	6540	5995	165	6160
108.........	13	6480	5886	220	6106
107.........	14	6420	5778	286	6064
106.........	15	6360	5671	364	6035
105.........	16	6300	5565	455	6020
104.........	17	6240	5460	560	6020
103.........	18	6180	5356	680	6036
102.........	19	6120	5253	816	6069
101.........	20	6060	5151	969	6120

Avant d'examiner les autres nombres n, nous pouvons observer que ce tableau donne des indications incomplètes pour $n \leqq 104$.

En premier lieu, pour $n = 101$, la limite $\Psi(n)$ est supérieure à $60n$. Or le polynome S_1, dénominateur de z, doit s'évanouir aux points doubles de la courbe $S_0 = 0$. Donc $60n$ est une limite *supérieure* de h. $\Psi(n)$ est une limite *inférieure*. Donc, pour $n = 101$, la suite S s'arrête forcément avant le rang qui donne la limite $\Psi(n)$,

c'est-à-dire avant le rang 18. Comme la formule (9 *bis*) n'est pas applicable ici à d'autres valeurs que $m=18$, une discussion ultérieure sera nécessaire pour examiner la limite de h. Mais, pour cette discussion sommaire, nous devons seulement retenir ce résultat :

Pour $n=101$, *les adjointes sont de degré moindre que* 120.

Pour $n=102$, 103, 104, c'est la proposition du chapitre I (p. 299) qui va nous donner des indications supplémentaires.

Formons le tableau suivant, que je commence seulement à $m=16$, d'après la condition nécessaire $\psi(m) \geqq \frac{md+3}{2}$:

m.	$\psi(m)$.	$120m+2$.	$\psi(m)-120m-2$.	$7021+\psi(m)$ $-120m-2$.
16...	969	1922	−953	6068
17...	1140	2042	−902	6119
18...	1330	2162	−832	6189
19...	1540	2282	−742	6279
20...	1771	2402	−631	6390
21...	2024	2522	−498	6523
22...	2300	2642	−342	6679
23...	2600	2762	−162	6859
24...	2925	2882	+ 43	»

D'après ce tableau, toute courbe du degré 120 qui a moins de 6120 points doubles apparents est située sur une surface dont le degré ne dépasse pas 17, et ainsi des autres indications du tableau.

Donc, pour $n=104$, nous concluons que, si $h \leqq 6068$, la courbe est située sur une surface de degré au plus 16. Si donc nous indiquons seulement le minimum de h relatif à des courbes dont l'adjointe n'est pas de degré moindre que 120, nous mettrons, pour $n=104$,

$$h \geqq 6069;$$

de même, pour $n=103$,

$$h \geqq 6120.$$

Pour $n=102$, il faudrait mettre $h \geqq 6190$; mais cette limite, étant supérieure à $60n$, est impossible.

Donc : *pour* $n=102$, *l'adjointe est de degré moindre que* 120.

Calculons maintenant la limite extrême qu'indique la théorie pour $n=100$ (nº 12, p. 408). On a ici : $d_0=120$, $n=100$, $d_{20}=100$. Nous aurons la limite cherchée en prenant pour h_{19} la moindre valeur possible pour une courbe de degré 100 située sur une surface de degré minimum 19.

Pour ce but, servons-nous encore de la proposition du chapitre I (p. 299). Nous avons

$$m = 18, \qquad d' = 100, \qquad \frac{(d'-1)(d'-2)}{2} = 4851,$$

$$\psi(18) - 18d' - 2 = 472, \qquad p' \leqq 471, \qquad h_{19} \geqq 4851 - 471 \geqq 4380.$$

Dans la suite S, on a ici

$$d_{19} = 82, \qquad d_{20} = 100.$$

Donc

$$100 \times 120 - 2h = 82 \times 100 - 2h_{19};$$

d'où résulte

$$h \geqq 6280.$$

Mais la limite $60n$ est inférieure à 6280. Donc la suite S ne peut aller aussi loin. Donc encore, *pour* $n = 100$, *l'adjointe est de degré moindre que* 100.

Quant aux autres valeurs de n, elles donnent lieu, comme on l'a observé plus haut, à des suites S s'arrêtant forcément, de telle sorte que l'adjointe soit de degré inférieur. Donc, en conclusion :

Toutes les courbes du degré 120 *qui ont moins de* 6020 *points doubles apparents se trouveront directement au moyen de leurs adjointes, qui sont de degré inférieur à* 120.

Les courbes qui ont de 6904 à 7021 points doubles apparents sont définies comme composant le premier groupe. Il restera donc à former les courbes pour lesquelles

$$6903 \geqq h \geqq 6020.$$

Ces courbes devront être définies par des moyens directs. La représentation effective de chacune d'elles constitue un problème inévitable, mais dont aussi la solution n'exige théoriquement l'emploi d'aucun principe nouveau.

15. La même circonstance se produit à tous les degrés; elle commence seulement au onzième degré. Elle n'arrêtera pas d'ailleurs la classification, comme on le verra.

Voici l'un des moyens théoriquement les plus simples pour parvenir, *dans tous les cas*, à concevoir la possibilité de représenter une quelconque des courbes qu'on rencontrera de la sorte.

Ayant reconnu que la courbe, de degré d, avec h points doubles

apparents, est située sur une surface de degré m, on supposera une représentation de cette courbe $z = \frac{\beta_1}{S_1}$ avec un dénominateur de degré d_1 supérieur au minimum n. On envisagera l'adjointe de rang m. Cette dernière sera située sur une surface du degré m. Cette seconde surface, sauf le seul cas $m = 2$ déjà complètement traité, varie avec le polynome S_1. En prenant d_1 assez grand, on pourra toujours réduire cette seconde surface à toute autre de son degré, ainsi que je l'ai déjà fait observer, et, par exemple, à m plans. L'adjointe sera ainsi une courbe impropre dont la construction pourra toujours être conçue. De cette adjointe on passera ensuite à la courbe demandée.

J'indiquerai un exemple pour le degré 11; mais je reconnais qu'un examen plus approfondi serait assurément nécessaire. Si je ne l'entreprends pas ici, c'est qu'on peut s'en passer pour la classification sommaire que j'ai en vue. On va le reconnaître dans le chapitre suivant, nous sommes en possession de moyens suffisants pour répartir en familles bien distinctes toutes les courbes de chaque degré successivement.

Quant à la méthode qui me paraît la mieux fondée pour définir les courbes, non plus de proche en proche suivant les degrés, mais directement, ce me paraît être celle qui découle directement de la considération des doubles suites S, β. Grâce à cette considération, en effet, on peut prendre pour point de départ, non pas seulement les polynomes qui représentent une courbe gauche, mais aussi tout couple de polynomes intermédiaires. De cette manière, le problème est toujours ramené à ce problème de géométrie plane : *Trouver deux courbes, de degrés donnés, se touchant en des points dont le nombre est donné.*

Ce dernier problème offre, on le sait, de grandes difficultés en général, et aussi un très grand intérêt. Dans beaucoup de cas cependant la solution en est immédiate, et peut servir sans embarras à la définition des courbes gauches. C'est ce que je ferai voir au chapitre suivant.

CHAPITRE VI.

Classification des courbes jusqu'au vingtième degré. — Lois générales. Courbes du degré 120.

---

1. Dans ce chapitre, j'effectue la classification des courbes jusqu'au degré 20. Pour chaque degré, la classification résulte de deux tableaux, dont l'un est simplement celui qui sert à appliquer la proposition du chapitre I (p. 299); l'autre indique, pour chaque nombre n et chaque degré minimum des surfaces passant par la courbe, la limite inférieure du nombre h. Un troisième tableau résume la classification.

Il est entendu que je mentionne seulement le type le plus général de chaque famille, laissant de côté les cas particuliers.

Par exemple :

$d = 6$, $h = 7$; le type général est l'intersection de surfaces du troisième degré formant un système linéaire à 3 arbitraires. Sur deux de ces surfaces, la courbe complémentaire est une cubique gauche.

Cette famille comprend comme cas particulier l'intersection d'une surface du second degré et d'une surface du quatrième degré, complétée par deux lignes droites.

Que la seconde courbe soit cas particulier de la première, cela est évident, cette famille appartenant au premier groupe.

Cette seconde courbe ne sera pas mentionnée dans la classification ci-après.

Dans le premier tableau, le nombre placé au-dessus de chaque colonne est le degré minimum des surfaces passant par la courbe.

Dans le second tableau, Δ désigne la différence

$$\Delta = \psi(m) - md - 2.$$

2. *Courbes du cinquième degré.*

n.	2.
3	6
2	4

m.	$\psi(m)$.	$5m+2$.	Δ.	$6+\Delta$.
1	4	7	-3	3
2	10	12	-2	4
3	20	17	$+3$	

Toutes les courbes sont du premier groupe. On peut cependant les définir aussi comme intersections de surfaces.

h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires de la courbe.
4	2	$A_2 A_3$	1 droite	20
5	2	$A_3 A_3$	1 quartique gauche ($d=4$, $h=3$)	20
6	3	$A_3 A_3$	2 coniques	20

3. *Courbes du sixième degré.*

n.	2.
4	10
3	7
2	6

m.	$\psi(m)$.	$6m+2$.	Δ.	$10+\Delta$.
2	10	14	-4	6
3	20	20	0	10
4	35	26	$+9$	

Nous avons ici le premier exemple de la suite S s'arrêtant à cause de $d_i=0$. C'est pour $n=2$ que ce fait arrive. Le nombre des arbitraires de la courbe est 24 d'après la proposition relative aux courbes du premier groupe, sauf pour $h=6$. Pour ce dernier, on a encore 24 d'après le résultat de la page 315 :

h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires de la courbe.
6	2	$A_2 A_3$	(*Intersection complète*) 0	24
7	3	$A_3 A_3$	cubique gauche $d=3$, $h=1$	24
8	3	$A_3 A_3$	1 droite, 1 conique $d=3$, $h=1$	24
9	3	$A_3 A_3$	3 droites $d=3$, $h=3$	24
10	4	$A_3 A_4$	$d=6$, $h=10$	24

4. *Courbes du septième degré.*

Nous avons ici un exemple du cas signalé au dernier chapitre (n° 12). Pour la valeur minima de n, $n = 3$, les degrés sont :

$$d_0 = 7, \qquad d_1 = 3, \qquad d_2 = 1, \qquad d_3 = 1, \qquad d_4 = 3.$$

Si la suite s'arrête à S_2 ou à S_3, le résultat est évident. Examinons si la suite, dans certains cas, se prolonge nécessairement au delà.

Pour qu'on fût obligé de la prolonger jusqu'à S_4, il faudrait, si elle pouvait être arrêtée à ce polynome, que l'adjointe ne fût pas sur une surface de degré moindre que 3. Or toute ligne du troisième degré est sur une surface du second degré. Cette circonstance est donc impossible. D'autre part, d'après le deuxième tableau, la courbe est située sur des surfaces dont le degré minimum ne peut dépasser 4. Donc l'arrêt a lieu nécessairement à S_2 ou à S_3.

n.	2.	3.
5	15	
4	11	
3	9	10

m.	$\psi(m)$.	$7m+2$.	Δ.	$15+\Delta$.
2	10	16	−6	9
3	20	23	−3	12
4	35	30	+5	

h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires de la courbe.	
9	3	$A_2 A_4$	1 droite		Le nombre des arbitraires est 28 d'après la page 315.
10	3	$A_3 A_3$	1 conique		Le nombre des arbitraires es d'après la page 389.
11	4	$A_3 A_3$	2 droites	28	1er groupe.
12	4	$A_3 A_4$	$d = 5$, $h = 6$	28	1er groupe.
13	4	$A_4 A_4$	$d = 9$ (1)	28	1er groupe.
14	4	$A_4 A_4$	$d = 9$ (1)	28	1er groupe.
15	5	$A_4 A_4$	$d = 9$ (1)	28	1er groupe.

5. *Courbe du huitième degré.*

Il y a une discussion à faire pour $n = 4$. Les degrés successifs sont :

$$d_0 = 8, \qquad d_1 = 4, \qquad d_2 = 2, \qquad d_3 = 2, \qquad d_4 = 4.$$

L'arrêt à S_3 donne un résultat étudié (p. 376). L'arrêt à S_4 exige

(1) Les courbes sont définies comme formant le premier groupe.

que l'adjointe, du quatrième degré, ne soit pas sur une surface de degré inférieur à 3. Donc $h_3 \geqq 4$, ce qui donne $h \geqq 16$. C'est d'ailleurs aussi la limite supérieure de h.

Ce cas $h = 16$ doit être supprimé, *comme cas particulier* de la courbe du premier groupe. L'arrêt ne peut être plus éloigné, le deuxième tableau montrant que le degré minimum des surfaces est au plus égal à 4. Donc l'arrêt a lieu à S_3.

n.	2.	3.
6	21	
5	16	
4	13	14
3	12	

m.	$\psi(m)$.	$8m+2$.	Δ.	$21+\Delta$.
2	10	18	-8	13
3	20	26	-6	15
4	35	34	$+1$	

Ici le premier exemple d'une famille de courbes de degré d, définie par plus de $4d$ arbitraires.

h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires de la courbe.	
12	3	A_2A_4	0	33	(p. 315).
13	4	A_2A_5	2 droites	32	(p. 315).
14	4	A_3A_3	1 droite		(p. 381).
15	4	A_3A_4	$d=4$, $h'=3$		(p. 390).
16	5	A_4A_4	$d=8$ courbes définies comme composant le 1[er] groupe.	32	1[er] groupe.
17	5				
18	5				
19	5				
20	5				
21	6				

On remarquera une application très nette de la proposition du chapitre I (p. 299), pour $d = 8$, $h = 12$, $m = 2$.

La formule $N_m = md + 1 - p$ donne $N_m = 8$; elle indiquerait un faisceau de surfaces du second degré passant par la courbe, ce qui est impossible. Mais il faut remarquer que la condition $p < \frac{md+1}{2}$ n'est pas satisfaite; car $p = 9$, $\frac{md+1}{2} = 8{,}5$. La formule n'est donc pas susceptible d'être appliquée. Le théorème précité nous donne $N \leqq \frac{md+2}{2}$ ou $N \leqq 9$. On voit qu'on a précisément $N = 9$.

Nous avons ici rencontré le premier exemple d'une courbe de degré d, définie par plus de $4d$ arbitraires. Nous allons maintenant trouver au neuvième degré le premier exemple de deux circonstances tout aussi intéressantes : d'abord l'existence de deux familles distinctes répondant au même nombre h, ensuite l'existence de lacunes dans les valeurs possibles pour le nombre h.

6. *Courbes du neuvième degré.*

La discussion relative à $n = 5$ se fait ainsi : les degrés sont :

$$d_0 = 9, \qquad d_1 = 5, \qquad d_2 = 3, \qquad d_3 = 3, \qquad d_4 = 5.$$

L'arrêt, supposé avoir lieu à S_4, exige la condition $h_3 \geqq 5$, qui donne $h \geqq 20$. On peut d'ailleurs avoir les nombres 20, 21, 22. Ce dernier donne un cas particulier de la dernière famille du premier groupe.

n.	2.	3.	4.
7	28		
6	22		
5	18	19	20
4	16	18	

m.	$\psi(m)$.	$9m+2$.	Δ.	$28+\Delta$.
3	20	29	-9	19
4	35	38	-3	25
5	56	47	$+9$	

	h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires de la courbe.	
	16	4	A_2A_5	1 droite	38	(p. 315).
	17	*n'existe pas.*				
	18	4	A_3A_3	0	} 36	
		5	A_2A_6	3 droites		(p. 315).
	19	5	A_3A_4	cubique gauche		(p. 390).
	20	5 }	} A_4A_4	courbes du 7e degré		(proposition des p. 372 et 373).
	21	5 }				
	22	}				
	23					
	24					
1er GROUPE.	25	6	A_4A_5	courbe du 11e degré		
	26	}	} A_5A_5	courbes du 16e degré		
	27					
	28	7 }				

7. *Courbes du dixième degré.*

Discussion relative à $n = 5$:

$$d_0 = 10, \qquad d_1 = 5, \qquad d_2 = 2, \qquad d_3 = 1, \qquad d_4 = 2, \qquad d_5 = 5.$$

Maximum de $h = 25$. Si l'arrêt a lieu à S_4, l'adjointe doit se composer de deux droites ; ce qui donne $h = 25$. L'arrêt ne peut avoir lieu plus loin ; il exigerait, en effet, une valeur supérieure de h, qui est impossible. Le cas où $h = 25$ doit être envisagé comme un cas particulier de la famille générale où $n = 6$.

n.	2.	3.	4.
8	36		
7	29		
6	24	25	
5	21	24	25
4	20		

m.	$\psi(m)$.	$10m+2$.	Δ.	$36+\Delta$.
3	20	32	-12	24
4	35	42	-7	29
5	56	52	$+4$	

	h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires de la courbe.
	20	4	A_2A_5	0	44
	21	5	A_2A_6	2 droites	43
	22	*n'existent pas.*			
	23				
	24	5	A_3A_4	1 conique	
		6	A_2A_7	4 droites	
	25	6			
	26	6	A_4A_4	6e degré	
	27	6			
	28	6			
1er GROUPE...	29	7	A_4A_5	10e degré	40
	30	7			
	31	7			
	32	7			
	33	7	A_5A_5	15e degré	
	34	7			
	35	7			
	36	8			

Jusqu'à présent, toutes les courbes ont été déduites directement, soit de leur propriété d'appartenir au premier groupe, soit de courbes complémentaires, soit de leurs adjointes, qui se sont trouvées de degré inférieur. Pour le onzième degré, nous allons voir maintenant apparaître la difficulté nouvelle, qui provient de courbes n'appartenant à aucun de ces cas. La difficulté serait résolue suivant la méthode expliquée au chapitre V (n° 15). Mais des artifices particuliers s'appliquent à ce cas.

8. *Courbes du onzième degré.*

La discussion relative à $n = 6$ offre un intérêt particulier :

$$d_0 = 11, \qquad d_1 = 6, \qquad d_2 = 3, \qquad d_3 = 2, \qquad d_4 = 3, \qquad d_5 = 6.$$

Maximum de $h = 33$.

L'arrêt ne peut être reculé à S_5 ; car il exigerait $h \geqq 35$.

L'arrêt, reculé à S_4, donne, pour l'adjointe, $h_3 \geqq 1$, et, pour la courbe, $h \geqq 31$.

L'arrêt à S_3 donne $h \geqq 30$, correspondant à $h_2 = 0$. Mais on peut avoir aussi $h_2 = 1$, $h = 31$. C'est ce qui donne lieu à une nouvelle courbe. Cette courbe n'est pas distincte de la première; elle admet seulement 43 arbitraires (p. 390). C'est un cas particulier de la précédente. La même circonstance se reproduira aux degrés suivants :

n.	2.	3.	4.
9	45		
8	37		
7	31	32	
6	27	30	31
5	25		

m.	$\psi(m)$.	$11m+2$.	Δ.	$45+\Delta$.
3	20	35	-15	30
4	35	46	-11	34
5	56	57	-1	44
6	84	68	$+16$	

	h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires.
	25	5	$A_2 A_6$	1 droite	50
	26	*n'existe pas.*			
	27	6	$A_2 A_7$	3 droites	48
	28, 29	*n'existent pas.*			
	30	6	$A_3 A_4$	1 droite	44 (pour h = 30 à 45)
	31	6	$A_4 A_4$	$d=5,\ h=4$	
	31	7	$A_2 A_8$	5 droites	
	32, 33	7	$A_4 A_4$	5ᵉ degré	
	34	7	$A_4 A_5$	9ᵉ degré	
	35	7	$A_5 A_5$ (pour h = 35 à 43)	14ᵉ degré	
	36	7			
1ᵉʳ GROUPE... (pour h = 37 à 45)	37	8			
	..	.			
	..	.			
	..	.			
	43	8			
	44	8	$A_5 A_6$	19ᵉ degré	
	45	9	$A_6 A_6$	25ᵉ degré	

Les deux familles $h = 35$ et 36 n'ont encore aucune définition. La courbe complémentaire est de degré plus élevé, 14; l'adjointe est du degré 11. Nous savons toutefois, par la proposition de MM. Nöther et Brill (note de la page 275), que ces courbes ont 44 arbitraires. Car c'est effectivement pour $h \geqq 35$ que s'applique cette proposition.

Ces courbes sont fondamentales sur les surfaces du cinquième degré.

On peut cependant les définir de diverses manières, sans recourir aux procédés généraux.

Première solution. — Fondée sur l'emploi des formules de la page 372 et s'appliquant aussi à $h = 37$.

Prenez une courbe (c) du dixième degré, ayant 25, 26 ou 27 points doubles apparents; 8 points arbitraires sur cette courbe, et faites passer par ces 8 points une *biquadratique* (b) $(d = 4,\ h = 2)$. Par les courbes (b) et (c), on peut mener une infinité de surfaces du cinquième degré. L'intersection de deux quelconques de ces surfaces est complétée par une courbe (a) du onzième degré, ayant des points

doubles apparents au nombre 35, 36 ou 37. C'est la plus générale des courbes du onzième degré, ayant ce nombre de points doubles apparents.

Deuxième solution. — La courbe complémentaire, du degré 14, admet des arbitraires dont on peut disposer de manière que cette courbe soit dans un cas particulier que l'on verra plus loin, *aux courbes de degré* 14. Ce cas particulier est caractérisé par le nombre $n = 9$. La courbe du quatorzième degré a alors pour adjointe une courbe du neuvième degré, qui sert à la définir. De là, on passe à la courbe du onzième degré.

Quant au procédé théorique indiqué page 411, il conduit ici à représenter la courbe au moyen d'un dénominateur du dixième degré. On a alors $d_5 = 26$. Il faut chercher cinq courbes, placées dans cinq plans, dont l'ensemble constitue une ligne du vingt-sixième degré, avec 209 ou 210 points doubles apparents. En outre, ayant $d_4 = 19$, on doit pouvoir représenter cette adjointe au moyen d'un dénominateur *propre* de degré 19. C'est à quoi l'on parvient ainsi :

Prenons arbitrairement 5 plans, dans 4 d'entre eux des courbes du cinquième degré, dans le cinquième une courbe du sixième degré, de telle sorte que les courbes du cinquième degré se coupent toutes deux à deux en 4 points, et que la courbe du sixième degré coupe en 4 points une ou deux des précédentes (suivant que h est 35 ou 36), en 5 points chacune des autres. L'ensemble de ces courbes donne bien une ligne du sixième degré ayant le nombre des points doubles apparents exigé. Mais maintenant les cordes de cette ligne, passant par un point arbitraire, doivent être sur un cône du dix-neuvième degré. Pour le cas $h = 35$, ces cordes sont au nombre 209 et sont toujours sur un tel cône. Le problème est dès lors résolu. Au contraire, pour le cas $h = 36$, leur nombre est 210, et les données doivent satisfaire à une condition.

Voici maintenant comment s'applique ici la méthode dont j'ai parlé page 412, en dernier lieu.

Les degrés successifs dans la suite S sont :

$$d_0 = 11, \qquad d_1 = 7, \qquad d_2 = 5, \qquad d_3 = 5, \qquad \ldots.$$

Prenons le cas $h = 35$. Les points de contact de S_2 et S_3 sont au

nombre $35 - \frac{1}{2}(7.11 - 5.5) = 9$. Il faut donc tout d'abord trouver deux courbes du cinquième degré se touchant en 9 points. Or ceci ne souffre aucune difficulté, attendu qu'une courbe du cinquième degré est déterminée par 20 points arbitraires. On peut donc se donner 9 points arbitraires avec 9 droites passant par ces points, et trouver des courbes du cinquième degré, touchant les 9 droites respectivement en les 9 points. S_2 et S_3 se trouvent ainsi déterminés. Les polynomes β_2, β_3 seront ensuite astreints à s'évanouir en les points communs à S_2 et S_3, au nombre 16, et, en outre, à satisfaire en chacun des points communs à S_2, S_3, où ces courbes ne se touchent pas, à la condition fondamentale $[\beta_2, S_3] + [\beta_3, S_2] = 0$. Ces conditions pourront être satisfaites, et l'on n'aura à résoudre que des *équations linéaires*.

Ceci fait, je dis qu'en prolongeant la suite S_2, S_3 dans un quelconque des deux sens, dans le sens rétrograde, par exemple, on pourra l'arrêter à S_0, de manière à obtenir la courbe demandée. Effectivement, l'analyse du n° 18 (chap. I) s'applique sans modification si l'on y remplace φ par S_3 et u_0, u_1, u_2, ... par S_2 et les polynomes $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, ... qu'on en déduit par l'opération B. En conséquence et d'après la proposition de la page 349, on peut calculer le rang minimum d'arrêt de la suite S, au moyen de la formule suivante, analogue à celle qui est employée pour calculer le degré minimum des surfaces passant par une courbe :

$$\psi(m) \leqq md + 2 - \frac{(d-1)(d-2)}{2} + h + F(d' + m).$$

Dans cette formule, d sera le degré d'un des polynomes S, ici S_3; d' le degré du polynome contigu, ici S_2; h le nombre des contacts, et m la distance du rang d'arrêt à l'origine. La formule (20) de la page 294, que j'emploie ici, contient un terme de plus; mais ce terme sera toujours nul, quand on supposera, comme je le fais maintenant, choisis pour les polynomes S ceux qui sont du moindre degré dans la suite que l'on considère.

Dans le cas actuel, les 16 points communs aux courbes S_2 et S_3 sont *indépendants* pour tous les degrés supérieurs à 5. Le terme $F(d' + m)$ est nul, et la formule est exactement la même que s'il s'agissait de la recherche du degré minimum d'une surface passant

par une courbe du cinquième degré à 9 points doubles apparents. Le minimum est $m=3$. Donc la suite peut être arrêtée à S_0. Donc *la courbe* $d=11$, $h=35$ *peut être construite par le moyen d'équations linéaires*. C'est le résultat que nous venons d'obtenir par la précédente méthode.

Il en est autrement pour le cas $h=36$. Le problème consiste à *trouver deux courbes du cinquième degré tangentes en* 10 *points*. Il y a des solutions spéciales, faciles à trouver, qui ne conviennent pas ici. Pour l'une, les 10 points sont sur une conique; mais alors le nombre $n=7$ ne serait pas minimum, et l'on n'aurait qu'un cas particulier. Pour l'autre, les 10 points sont les intersections de 5 lignes droites entre elles; mais alors la courbe serait sur une surface du troisième degré. Je laisse de côté la solution de ce problème.

9. *Courbes du douzième degré.*

Pour $n=7$, on a :

$$d_0=12, \qquad d_1=7, \qquad d_2=4, \qquad d_3=3, \qquad d_4=4, \qquad d_5=7.$$

La suite peut être arrêtée à S_3, ce qui donne les cas $h=37$, 38, 39.

La suite arrêtée à S_4 fournit les cas $h=38$, 39, 40, 41, 42. En l'arrêtant à S_5, on a $h=41$, 42. Il est aisé de voir qu'après rejet des cas particuliers il reste ici trois familles seulement.

n.	2.	3.	4.
10	55		
9	46		
8	39	40	
7	34	37	38
6	31	36	
5	30		

m.	$\psi(m)$.	$12m+2$.	Δ.	$55+\Delta$.
3	20	38	-18	37
4	35	50	-15	40
5	56	62	-6	49
6	84	74	$+10$	

	h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires.
	30	5	$A_2 A_6$	0	57
	31	6	2,7	2 droites	56
	*				
	34	7	2,8	4 droites	53
	*				
	36	6	3,4	0	49
	37	7	3,5	3e degré	
	38	7	4,4	4e degré	
	39	7	4,4	4e degré	
	39	8	2,9	6 droites	
	40	8	4,5	8e degré	
	41	8			
	42	8			
	43	8			
	44	8	5,5	13e degré	
	45	8			
1er GROUPE...	46	9			48
	47	9			
	48	9			
	49	9	5,6	18e degré	
	50	9			
	51	9			
	52	9	6,6	24e degré	
	53	9			
	54	9			
	55	10			

Nota. — Le signe * indique les lacunes dans la suite des nombres h.

Les familles $h = 41, 42, 43, 44, 45$ ne se trouvent pas définies. Les courbes complémentaires sont de degré supérieur, les adjointes du douzième degré. Il faut cependant remarquer que, pour $h = 41, 42$, on a des cas particuliers définis, comme il a été dit plus haut.

La construction de ces courbes peut se faire ainsi :

Prenez une courbe (c) du dixième degré, ayant 25, 26, 27, 28 ou 29 points doubles apparents. Prenez 6 points sur cette courbe, et dans un même plan. Par ces 6 points, menez une cubique plane (b).

Par les courbes (c) et (b) on peut mener une infinité de surfaces du cinquième degré. L'intersection de deux de ces surfaces est la courbe (a) du douzième degré, pour laquelle h a l'une des cinq

valeurs 41, 42, 43, 44, 45. C'est ce que l'on voit par les formules de la page 372. On démontre aisément que l'on obtient ainsi les types généraux des familles demandées.

Le nombre des arbitraires, 48, se trouve établi d'après le théorème de MM. Brill et Nöther pour $h \geq 43$. Par la construction précédente, on peut voir qu'il s'applique aussi pour $h = 41$, 42.

Les courbes $h = 41$, 42, 43 se trouvent facilement aussi, *et par des équations linéaires*, au moyen de la méthode dont j'ai donné un exemple p. 421 et 422. On n'a qu'à *déterminer deux courbes du sixième degré ayant entre elles* 11, 12 *ou* 13 *contacts*, ce que l'on pourra faire en se donnant arbitrairement les points et les tangentes. De même, on aura sans embarras les polynomes β. Quant au rang d'arrêt de la suite S, on voit, par le même moyen que précédemment, le résultat suivant : en laissant $S_2 S_3 \beta_2 \beta_3$ quelconques, satisfaisant d'ailleurs aux conditions exigées, le rang d'arrêt minimum est égal à 4, dans les deux sens de la suite. Arrêtons alors la suite, dans le sens positif, à ce rang 4. Nous aurons une courbe du dix-huitième degré avec 101, 102 ou 103 points doubles apparents. Or la formule de la page 299, la même, en somme, que celle qui est employée ici, fait voir que cette courbe du dix-huitième degré est sur une surface du sixième degré. Donc, *en modifiant* S_2 *et* β_2, on pourra arrêter la suite, dans le sens rétrograde, à S_0. Donc la courbe cherchée se trouve déterminée.

Quant aux cas $h = 44$, 45, ils conduisent au problème : *Trouver deux courbes du sixième degré ayant entre elles* 14 *ou* 15 *contacts*, dont je n'examinerai pas la solution directe.

10. *Courbes du treizième degré.*

La loi générale (p. 406) s'applique jusqu'à $n = 8$ inclusivement. Pour $n = 7$, la discussion est très simple. L'arrêt ne peut avoir lieu au delà de S_4, et les nombres h que l'on trouve pour les cas d'arrêt à S_2, S_3 ou S_4 ne sont pas des limites, mais des nombres précis. On a ici le premier exemple de deux familles, répondant au même nombre h, sans que, dans aucune des deux familles, les courbes soient sur des surfaces du second degré.

n.	2.	3.	4.
11	66		
10	56		
9	48	49	
8	42	45	46
7	38	44	45
6	36		

m.	$\psi(m)$.	$13m+2$.	Δ.	$66+\Delta$.
4	35	54	-19	47
5	56	67	-11	55
6	84	80	$+4$	

	h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires.
	36	6	2,7	1 droite	64
	*				
	38	7	2,8	3 droites	62
	*				
	42	8	2,9	5 droites	58
	*				
	44	7	3,5	1 conique	53
	45	7	4,4	cubique plane	
		8	3,5	2 droites	
	46	8	4,4	cubique gauche	
	47	8	4,5	7e degré	
	48	8	5,5	12e degré	
		9	2,10	7 droites	
	49	9			
	50	9			
	51	9	5,5	12e degré	52
	52	9			
	53	9			
	54	9			
	55	9	5,6	17e degré	
	56	9			
	..	.			
1er GROUPE...	..	.	6,6	23e degré	
	..	.			
	65	9			
	66	10			

La courbe générale $h=55$ seule ne se trouve pas définie : sa complémentaire est du dix-septième degré ; son adjointe est du treizième degré. Voici la manière la plus simple de la définir.

D'après le second tableau, sa courbe complémentaire admet encore, sur la surface du cinquième degré, 11 arbitraires. Les points doubles apparents de cette complémentaire sont au nombre de 95 ; on pourra disposer des arbitraires de telle sorte que cette courbe du dix-septième degré soit dans le cas particulier $n=12$ (voyez le tableau des courbes du dix-septième degré). Elle a alors une adjointe du douzième degré. La solution est donc celle-ci :

Prenez une courbe du douzième degré avec 47 points doubles apparents, puis son adjointe de degré 17. Par cette dernière passe une surface du cinquième degré et une infinité de surfaces du sixième degré. Le complément de l'intersection de ces surfaces est la courbe demandée.

Par le procédé direct, la détermination de cette courbe revient à la solution de ce problème : *Trouver deux courbes du septième degré qui se touchent en* 21 *points*. Ces points doivent d'ailleurs n'être pas situés sur une courbe de degré inférieur à 5, ni se confondre avec les intersections de 7 droites deux à deux.

D'après l'observation faite page 290, pour les courbes dont cette dernière est un cas, j'ai ce résultat curieux :

En général, le problème qui consiste à trouver une courbe du degré d ayant $\frac{(d-2)(d-3)}{2}$ *points doubles situés sur une même courbe de degré* $(d-4)$ *concorde avec le problème suivant : Trouver deux courbes de degré* $(d-6)$ *qui se touchent en* $\frac{(d-6)(d-7)}{2}$ *points*. Ces derniers points ne doivent pas d'ailleurs être situés sur une courbe de degré inférieur à $(d-8)$, ni se confondre avec les intersections de $(d-6)$ droites deux à deux.

11. *Courbes du quatorzième degré.*

La loi générale de la page 406 s'applique jusqu'à $n=9$ inclusivement. Pour $n=8$, l'arrêt à S_3 donne lieu aux cas $h=52$, 53 ; l'arrêt à S_4, aux cas $h=54$, 55, dont le dernier est un cas particulier. L'arrêt ne peut être reculé plus loin.

n.	2.	3.	4.
12	78		
11	67		
10	58	59	
9	51	54	55
8	46	52	54
7	43		
6	42		

m.	$\psi(m)$.	$14m+2$.	Δ.	$78+\Delta$.
4	35	58	—23	55
5	56	72	—16	62
6	84	86	— 2	76
7	120	100	+20	

	h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires.
	42	6	2,7	0	72
	43	7	2,8	2 droites	71
	*				
	46	8	2,9	4 droites	68
	*				
	51	9	2,10	6 droites	63
	52	8	3,5	1 droite	58
	53	8	3,6	4ᵉ degré	57
	54	8	4,4	1 conique	
		9	3,6	2 coniques	
	55	9	4,5	6ᵉ degré	
	56	9			
	57	9	5,5	11ᵉ degré	
	58	9			
		10	2,10	8 droites	
(1)	59	10			
(1)	60	10	5,5	11ᵉ degré	
	61	10			
	62	10	5,6	16ᵉ degré	
	63	10			56
	64	10			
	65	10			
	66	10			
1ᵉʳ GROUPE...	67	11	6,6	22ᵉ degré	
	..	..			
	..	..			
	..	..			
	75	11			
	76	11	6,7	28ᵉ degré	
	77	11	7,7	35ᵉ degré	
	78	12			

(1) Ce sont ces deux courbes qui servent à la seconde définition des courbes $h = 35$, 36 du onzième degré, par leurs cas particuliers, $n = 9$. Ces cas sont caractérisés, l'un par cinq, l'autre par six conditions.

Les familles $h = 62, 63, 64, 65, 66$ n'ont ici aucune définition. Pour $h = 62$, l'adjointe est du quatorzième degré; pour les autres valeurs de h, l'adjointe est du vingtième degré.

Pour la première $h = 62$, voici la définition la plus simple : prenez une courbe du onzième degré avec 38 points doubles apparents, représentez-la avec un dénominateur de degré 8, et prenez son adjointe S_5, qui est du seizième degré.

Par cette dernière passe une surface du cinquième degré et une infinité de surfaces du sixième degré. Le complément de l'intersection de la surface du cinquième degré et d'une surface du sixième est la courbe demandée.

Le même moyen donne encore des courbes du quatorzième degré ayant le nombre $h = 63, 64, \ldots$, mais ces courbes sont des cas particuliers.

Le théorème de MM. Brill et Nöther détermine le nombre des arbitraires, 56 pour $h \geqq 64$. Pour $h = 62, 63$, j'admets ici ce même nombre, mais sans démonstration. La preuve effective se trouvera, à la fin de ce chapitre, comme un cas d'un théorème général.

La même observation s'applique dans la suite; je ne la répéterai pas. Je me contenterai d'indiquer par une double étoile ** la valeur minima de h à laquelle s'applique la proposition rappelée.

Le problème de géométrie plane auquel on est ramené consiste à *trouver deux courbes du huitième degré qui se touchent en* 24, 25, 26, 27 *ou* 28 *points*.

12. *Courbes du quinzième degré.*

La discussion pour $n = 9$ est, de tout point, semblable aux précédentes.

n.	2.	3.	4.	5.
13	91			
12	79			
11	69	70		
10	61	64	65	
9	55	61	63	65
8	51	60		
7	49			

m.	$\psi(m)$.	$15m+2$.	Δ.	$91+\Delta$.
4	35	62	-27	64
5	56	77	-21	70
6	84	92	-8	83
7	120	107	$+13$	

	h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires.
	49	7	2,8	1 droite	80
	*				
	51	8	2,9	3 droites	78
	*				
	55	9	2,10	5 droites	74
	*				
	60	8	3,5	0	64
	61	9	3,6	cubique gauche	63
		10	2,11	7 droites	68
	62	9	3,6	1 droite, 1 conique	62
	63	9	3,6	3 droites	61
		9	4,4	1 droite	60
	64	9	4,5	5e degré	
		10	3,7	6e degré	
	65	10			
	66	10			
	67	10	5,5	10e degré	
	68	10			
	69	10			
		11	2,12	9 droites	
	70	11	5,6	15e degré	
	71	11			
	72	11			
	73	11			
	74	11			
	**75	11			60
	76	11	6,6	21e degré	
	77	11			
	78	11			
	79	12			
	80	12			
	81	12			
	82	12			
	83	12	6,7	27e degré	
1er GROUPE...	84	12			
	..	..			
	..	..	7,7	34e degré	
	..	..			
	90	12			
	91	13			

Familles non définies : $h = 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78$. Pour les trouver, il faut résoudre ce problème : *Trouver deux courbes du neuvième degré se touchant en* 28, 29, ... *ou* 36 *points*.

13. *Courbes du seizième degré.*

$n.$	2.	3.	4.	5.
14	105			
13	92			
12	81	82		
11	72	75	76	
10	65	71	74	75
9	60	70		
8	57			
7	56			

$m.$	$\psi(m)$	$16m+2.$	$\Delta.$	$105+\Delta.$
4	35	66	-31	74
5	56	82	-26	79
6	84	98	-14	91
7	120	114	$+6$	

	$h.$	$n.$	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires.
	56	7	2,8	o	80
	57 *	8	2,9	2 droites	88
	60 *	9	2,10	4 droites	85
	65 *	10	2,11	6 droites	80
	70	9	3,6	1 conique	69
	71	10	3,6	2 droites	68
	72	9	4,4	o	66
		10	3,7	5ᵉ degré	67
		11	2,12	8 droites	73
	73	10	3,7	5ᵉ degré	66
	74	10	3,7	5ᵉ degré	65
		10	4,5	biquadrat., $h=2$	64
	75	10	5,5	9ᵉ degré	64
		11	3,7	5ᵉ degré	64
	76	11	5,5		
	77	11	5,5	9ᵉ degré	
	78	11	5,5		
	79	11	5,6	14ᵉ degré	
	80	11	6,6	20ᵉ degré	
	81	12	2,13	10 droites	
		11	6,6		
	82	12	6,6		
	..	..	...		
	**88	..	...	20ᵉ degré	64
	..	..	...		
	90	12	6,6		
	91	12	6,7	26ᵉ degré	
1ᵉʳ GROUPE...	92	13			
	..	..			
	..	..	7,7	33ᵉ degré	
	..	..			
	104	13			
	105	14			

Familles non définies : $h = 80, 81, \ldots, 91$.

Pour $h = 80, 81$, *trouver deux courbes des degrés* 7 *et* 8 *qui se touchent en* 20 *ou* 21 *points.*

Pour $h = 82, \ldots, 91$, *trouver deux courbes du dixième degré qui se touchent en* $36, \ldots, 45$ *points.*

14. *Courbes du dix-septième degré.*

Les formules générales (p. 406) s'appliquent jusqu'à $n = 11$ inclusivement. La discussion pour $n = 10$ est très simple, et analogue aux précédentes.

n.	1.	2.	3.	4.
15	120			
14	106			
13	94	95		
12	84	87	88	
11	76	82	85	86
10	70	80	84	85
9	66			
8	64			

m.	$\psi(m)$.	$17m+2$.	Δ.	$120+\Delta$.
5	56	87	−31	89
6	84	104	−20	100
7	120	121	− 1	119
8	165	138	+27	

h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires.
64 *	8	2,9	1 droite	98
66 *	9	2,10	3 droites	96
70 *	10	2,11	5 droites	92
76 *	11	2,12	7 droites	86
80	10	3,6	1 droite	75
81	10	3,7	quartique	74
82	11	3,7	4ᵉ degré	73
83	11	3,7	4ᵉ degré	72
84	10	4,5	cubique plane	69
	11	3,7	4 droites	71
	12	2,13	9 droites	78
85	10	5,5	8ᵉ degré	68
	11	3,8	7ᵉ degré	70
	11	4,5	cubique gauche	68
86	11	3,8	7ᵉ degré	69
	11	5,5	8ᵉ degré	68
87	11	5,5	8ᵉ degré	68
	12	3,8	7ᵉ degré	68

h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires.
88	12	5,5	8e degré	
89	12	5,6	13e degré	
90	12			
91	12			
92	12	6,6	19e degré	
93	12			
94	12			
	13	2,14	11 droites	
95	13			
96	..			
97	..	6,6	19e degré	
98	..			
99	13			
100	13	6,7	25e degré	68
101	..			
** 102	..			
103	..			
104	..			
105	13	7,7	32e degré	
106	14			
...	..			
...	..			
1er GROUPE... ...	..			
118	14			
119	14	7,8	39e degré	
120	15	8,8	47e degré	

Courbes non définies : $h = 90, 91, \ldots, 105$.

15. *Courbes du dix-huitième degré.*

n.	2.	3.	4.	5.
16	136			
15	121			
14	108	109		
13	97	100	101	
12	88	94	97	98
11	81	91	96	97
10	76	90		
9	73			
8	72			

m.	$\psi(m)$.	$18m+2$.	Δ.	$136+\Delta$.
5	56	92	-36	100
6	84	110	-26	110
7	120	128	-8	128
8	165	146	$+19$	

h.		*n*.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires.
72		8	2,9	0	108
73 *		9	2,10	2 droites	107
76 *		10	2,11	4 droites	104
81 *		11	2,12	6 droites	99
88 *		12	2,13	8 droites	92
90		10	3,6	0	82
91		11	3,7	cubique gauche	81
92		11	3,7	1 droite, 1 conique	80
93		11	3,7	3 droites	79
94		12	3,8	6ᵉ degré	78
95		12	3,8	6ᵉ degré	77
96	{	12	3,8	6ᵉ degré	76
		11	4,5	1 conique	73
97	{	13	2,14	10 droites	83
		12	3,8	6ᵉ degré	75
		12	4,6	6ᵉ degré	72 (¹)
		11	5,5	7ᵉ degré	72
98	{	12	5,5	7ᵉ degré	72
		12	3,8	6ᵉ degré	74
99	{	12	5,5	7ᵉ degré	72
		12	3,8	6ᵉ degré	73
100	{	12	5,6	12ᵉ degré	72
		13	3,9	9ᵉ degré	72
101		13	}		}
102		13			
103		13			
104		13	6,6	18ᵉ degré	
105		13			
106		13			
107		13			
108	{	13			
		14	2,15	12 droites	
109		14	6,6	18ᵉ degré	
110		14	6,7	24ᵉ degré	
111		14	}		72
...		..			
** 116		..			
...		..			
120		14	7,7	31ᵉ degré	
1ᵉʳ GROUPE... { 121		15			
...		..			
127		15			
128		15	7,8	38ᵉ degré	
129		15	}		
...		..	8,8	46ᵉ degré	
135		15			
136		16			

Courbes non définies : $h = 101, 102, \ldots, 120$.

(¹) Cas particulier à remarquer : Surfaces 4,5. Courbe complémentaire, 2 droites.

16. *Courbes du dix-neuvième degré.*

n.	2.	3.	4.	5.	6.
17	153				
16	137				
15	123	124			
14	111	114	115		
13	101	107	110	111	
12	93	103	108	110	113
11	87	102			
10	83				
9	81				

m.	$\psi(m)$.	$19m+2$.	Δ.	$153+\Delta$.
5	56	97	-41	112
6	84	116	-32	121
7	120	135	-15	138
8	165	154	$+11$	

h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires.
81 *	9	2,10	1 droite	118
83 *	10	2,11	3 droites	116
87 *	11	2,12	5 droites	112
93 *	12	2,13	7 droites	106
101	13	2,14	9 droites	98
102	11	3,7	1 conique	88
103	12	3,7	2 droites	87
104	12	3,8	5e degré	86
105	12	3,8	5e degré	85
106	12	3,8	5e degré	84
107	13	3,8	5e degré	83
108	13	3,8	5e degré	82
	12	4,5	1 droite	78
109	13	3,9	8e degré	81
	12	4,6	5e degré	77
110	13	3,9	8e degré	80
	13	4,6	5e degré	76
	12	5,5	6e degré	76
111	14	2,15	11 droites	88
	13	3,9	8e degré	79
	13	5,5	6e degré	76
112	13	3,9	8e degré	78
	13	5,6	11e degré	76
113	13	3,9	8e degré	77
	13	6,6	17e degré	76
114	14	3,9	8e degré	76
	13	6,6	17e degré	76

	h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires.
	115	14			
	...	..			
	...	..	6,6	17ᵉ degré	76
	...	..			
	120	14			
	121	14	6,7	23ᵉ degré	
	122	14	7,7	30ᵉ degré	
	123	14	7,7	30ᵉ degré	
	123	15	2,16	13 droites	
	124	15			
	...	..			
	**132	..	7,7	30ᵉ degré	
	...	..			76
	136	15			
	137	16			
	138	16	7,8	37ᵉ degré	
	139	16			
1ᵉʳ GROUPE...	...	..			
	...	..	8,8	45ᵉ degré	
	...	..			
	152	16			
	153	17			

Courbes non définies : $h = 121, 122, \ldots, 136$.

Les courbes $h = 115, 116, \ldots, 120$ ne seront définies qu'après celles du degré 17 avec $h = 90, 91, \ldots, 95$.

17. *Courbes du vingtième degré.*

n.	2.	3.	4.	5.	6.
18	171				
17	154				
16	139	140			
15	126	129	130		
14	115	121	124	125	
13	106	116	122	123	126
12	99	114	120		
11	94				
10	91				
9	90				

m.	$\psi(m)$.	$20m+2$.	Δ.	$171+\Delta$.
5	56	102	-46	125
6	84	122	-38	133
7	120	142	-22	149
8	165	162	$+3$	

h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires.
90	9	2,10	0	129
91	10	2,11	2	128
*				
94	11	2,12	4	125
*				
99	12	2,13	6 droites	120
*				
106	13	2,14	8	113
*				
114	12	3,7	1 droite	95
115	14	2,15	10 droites	104
	12	3,8	4e degré	94
116	13	3,8	4e degré	93
117	13	3,8	4e degré	92
118	13	3,8	4e degré	91
119	13	3,9	7e degré	90
120	13	3,9	7e degré	89
	12	4,5	0	85
121	14	3,9	7e degré	88
122	14	3,9	7e degré	87
	13	4,6	biquadratique	82
123	14	3,9	7e degré	86
	13	4,6	quartique	81
	13	5,5	5e degré	80
124	14	3,9	7e degré	85
	14	4,6	2 coniques	80
	13	5,5	5e degré	80
125	14	3,9	7e degré	84
	14	5,6	10e degré	80
126	15	2,16	12 droites	93
	14	3,10	10e degré	83
	14	6,6	16e degré	80
127	14	3,10	10e degré	82
	14	6,6	16e degré	80
128	14	3,10	10e degré	81
	14	6,6	16e degré	80
129	15	3,10	10e degré	80
	14	6,6	16e degré	80

	h.	n.	Surfaces.	Courbe complémentaire.	Nombre des arbitraires.
	130	15	6,6	16e degré	
	131	15	6,6	16e degré	
	132	15	6,6	16e degré	
	133	15	6,7	22e degré	
	134	15			
	...	..	7,7	29e degré	
	138	15			
	139	15			
		16	2,17	14 droites	
	140	16			
	...	..	7,7	29e degré	80
	148	16			
	**149	16	7,8	36e degré	
	150	16			
	...	..			
	153	16			
1er GROUPE...	154	17	8,8	44e degré	
	...	..			
	170	17			
	171	18			

Courbes non définies : $h = 133, 134, \ldots, 153$.

Les courbes $h = 130$, 131, 132 ne seront définies qu'après les courbes du 16e degré ayant 80, 81, 82 points doubles apparents.

18. Déjà, dans les derniers tableaux que je viens de construire, les lois se manifestent avec une assez grande netteté. Mais on les verra plus clairement apparaître encore dans celui que je vais maintenant donner. Je vais construire le tableau des courbes du degré 120, au sujet desquelles un premier aperçu figure à la fin du chapitre précédent. De cet aperçu résultait cette conséquence. Toutes les courbes de degré 120, qui ont moins de 6020 points doubles apparents, se déduisent des courbes de degré moindre. La manière de les déduire ressortira de la construction même.

Quelques explications sur la construction du tableau.

La loi générale de la page 406 s'applique tant que l'inégalité (8) (p. 404) n'est pas satisfaite. L'inégalité opposée $n > d - 2 - \sqrt{d}$ donne ici $n \geqq 108$. Ainsi, jusqu'à $n = 108$ inclusivement, les nombres qu'il faut inscrire sont ceux que fournit la formule générale.

Pour chaque valeur de $n \leqq 107$, voyons jusqu'à quelle colonne nous devons prendre les nombres fournis encore par cette loi. Si m est le numéro de cette colonne, m' le degré moindre des surfaces, autres que celle du degré m, passant par la courbe, la loi se continue (p. 404) si l'on a

$$m + m' - (d - n) - 1 > m - 3 \qquad \text{ou} \qquad m' > d - n - 2.$$

Ayant d'ailleurs $m' > \frac{d}{m}$, je vois que la loi sera continuée tant que l'on aura

$$\frac{d}{m} \geqq d - n - 2 \qquad \text{ou} \qquad m \leqq \frac{d}{d - n - 2};$$

ce qui nous donne les résultats suivants :

Pour $n =$	107,	106,	105,	104,	103,	102,	101,	100,	99,	98,	97,	96,	95,	94,	93,	...,	88,	...
Limite de $m =$	10,	10,	9,	8,	8,	7,	7,	6,	6,	6,	5,	5,	5,	5,	4,	...,	4,	...

Pour chaque valeur de n, on prolonge ainsi le tableau suivant la même loi dans les colonnes portant des numéros qui ne dépassent pas la limite de n indiquée.

Il s'agit ensuite de trouver les nombres qu'il faut inscrire dans les autres colonnes. Chacun de ces nombres doit être une limite inférieure *précise;* le calcul même indiquera comment s'atteint cette limite.

Suivant les cas, le moyen le plus rapide est, ou bien de chercher la *modification* qu'il faut faire subir au nombre que fournirait la loi générale; ou bien de chercher le nombre directement. Je ne détaillerai pas ici tous les calculs, ce qui serait aussi inutile que fastidieux; je donnerai seulement quelques exemples des deux procédés. Il sera facile au lecteur de vérifier par les mêmes méthodes tous les nombres que j'ai calculés.

Exemples du premier procédé. — Calcul des nombres qui répondent aux colonnes 10, 11, 12, 13 dans la ligne $n = 105$. On a ici :

$$d_0 = 120, \qquad d_1 = 105, \qquad \ldots, \qquad d_9 = 57, \qquad d_{10} = 60,$$
$$d_{11} = 65, \qquad d_{12} = 72, \qquad d_{13} = 81.$$

Si l'arrêt a lieu à S_{10}, la condition de minimum exige que les points doubles (h_9) ne soient pas sur une courbe de degré moindre

que $d_{10} - 9$. Pour l'adjointe, on a ainsi :

$$d = 60, \qquad n = 51, \qquad d - n - 2 = 7 < \sqrt{d}.$$

On peut donc lui appliquer la loi générale. Mais cette adjointe est simplement astreinte à n'être pas située sur une surface de degré moindre que 7. La formule (9 *bis*) (p. 406) donne donc

$$h_9 \geqq \frac{51.52}{2} + \psi(6) - 1,$$

tandis que la loi générale est basée sur la supposition

$$h_3 \geqq \frac{51.52}{2} + \psi(6).$$

Donc il faut *diminuer d'une unité* le nombre que fournirait la loi générale. Ce nombre serait 6000; il faut mettre 5999. La courbe de degré 120 correspondante est alors intersection de deux surfaces des degrés 10 et 13; la courbe complémentaire, du dixième degré, doit avoir alors 59 points doubles apparents, ce qui ne se peut. Donc l'hypothèse que l'adjointe soit sur une surface du septième degré est impossible. Elle est donc, *au moins*, sur une surface du huitième degré. Donc *aucune modification ne doit être faite* au nombre que donne la loi générale.

Si l'arrêt a lieu à S_{11}, on a de même une modification de 4 unités au nombre de la loi générale. Ici la modification est possible, et l'on a une courbe de degré 120, intersection de deux surfaces des degrés 11 et 12, se coupant en outre suivant 12 droites qui ne se rencontrent pas. Le nombre h est égal à 6006.

Si l'arrêt a lieu à S_{12}, on a aussi une modification de 4 unités, répondant à une courbe située sur deux surfaces du douzième degré :

$$h = 6012.$$

Si l'arrêt a lieu à S_{13}, modification de 1 unité, répondant à une courbe située sur deux surfaces du treizième degré :

$$h = 6018.$$

Exemples du second procédé : $n = 101$; colonnes 16 et 17 :

$$d_0 = 120, \qquad d_1 = 101, \qquad \ldots, \qquad d_{16} = 56, \qquad d_{17} = 69.$$

Si l'arrêt est reculé jusqu'à S_{16}, l'adjointe de degré 56 ne peut pas

être sur une surface de degré moindre que 12. On peut calculer une limite inférieure de h_{15} par le théorème de la page 299 :

$$\psi(11) = 364, \qquad 56.11 + 2 = 618, \qquad \Delta = -254, \qquad \frac{55.54}{2} - 254 = 1231.$$

Donc $h_{15} \geqq 1232$. D'après la formule $d_0 d_1 - 2h = d_{15} d_{16} - 2h_{15}$, ceci donne $h \geqq 6032$. C'est le nombre cherché.

Un calcul tout pareil pour la supposition de l'arrêt reculé jusqu'à S_{17} donne pour h une limite supérieure à $\frac{1}{2} d_0 d_1$, ce qui ne se peut. Donc, pour $n = 101$, la courbe ne peut pas être sur une surface de degré minimum supérieur à 16.

De même, pour $n = 100$, le minimum du degré des surfaces ne dépasse pas 15 ; il n'y a qu'une famille dans ce cas :

$$h = 6000.$$

Ces explications suffisent, je pense, pour faire comprendre comment les nombres sont calculés ([1]).

19. Je ne procéderai pas à un dépouillement immédiat des résultats que fournit ce tableau, comme je l'ai fait pour les tableaux précédents. Je m'en servirai pour donner, d'une manière bien nette, les exemples numériques des lois générales qu'il est temps d'établir et dont l'application eût été trop incomplète si je m'étais borné à de petites valeurs de degré d.

Soit $H(m)$ le nombre inférieur, inscrit dans la colonne portant le n° m ; soit aussi $\mathfrak{H}(m)$ le nombre supérieur, inscrit dans la même colonne. Considérons, en premier lieu, tous les nombres m pour chacun desquels la fonction $H(m)$ a une valeur numérique inférieure au minimum de la fonction $\mathfrak{H}$; c'est-à-dire, dans l'exemple ci-contre, considérons pour m les valeurs 2, 3, ..., 15. Nous avons d'abord cette proposition : *Si h est inférieur à $H(m)$, la courbe est située sur une surface de degré moindre que m.*

Si h est égal à $H(m)$, il existe une famille de courbes pour lesquelles le degré minimum des surfaces passant par ces courbes est égal à m. Il en est de même à l'égard des valeurs de h supérieures à $H(m)$, le cas $m = 2$ étant réservé, et sauf aussi quelques lacunes dans les premières valeurs de h immédiatement supérieures à $H(m)$

([1]) [Le tableau ainsi construit se trouve à la page suivante.]

Premier tableau pour les courbes du degré 120.

n.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
118	7021															
117	6904															
116	789	6790														
115	676	679	6680													
114	565	571	574	6575												
113	456	466	472	475	6476											
112	349	364	374	380	383	6384										
111	244	265	280	290	296	299	6300									
110	141	169	190	205	215	221	224	6225								
109	040	076	104	125	140	150	156	159	6160							
108	5941	5986	022	050	071	086	096	102	105	6106						
107	844	899	5944	5980	008	029	044	054	060	063	6064					
106	749	815	870	915	5951	5979	000	015	025	030	033	6035				
105	656	734	800	855	900	936	5964	5985	000	006	012	018	6020			
104	565	656	734	800	855	900	936	963	5981	5990	5999	008	014	6020		
103	476	581	672	750	816	871	916	948	970	981	995	006	011	018	6036	
102	389	509	614	705	783	849	903	939	964	978	992	5999	000	012	033	6069
101	304	440	560	665	756	834	896	935	964	976	988	996	000	010	6032	
100	221	374	510	630	735	825	894	935	948	5950	5976	5979	5985	6000		
99	140	311	464	600	720	821	886	5928	5940							
98	061	251	422	575	711	818	5880									
97	4984	194	384	555	707	5814										
96	909	140	350	540	704											
95	836	089	320	530	5700											
94	765	041	294	524												
93	696	4996	272	523												
92	629	954	254	5520												
91	564	915	240													
90	501	879	230													
89	440	846	224													
88	381	816	222													
87	324	789	5220													
86	269	765														
85	216	744														
84	165	726														
83	116	711														
82	069	699														
81	024	690														
80	3981	684														
79	940	681														
78	901	4680														
77	864															
76	829															
75	796															
74	765															
73	736															
72	709															
71	684															
70	661															
69	640															
68	621															
67	604															
66	589															
65	576															
64	565															
63	556															
62	549															
61	544															
60	541															
59	3540															

Second tableau (déjà donné p. 410).

m.	$\psi(m)$.	$120m+2$.	Δ.	$7021+\Delta$.
16	969	1922	-953	6068
17	1140	2042	-902	6119
18	1330	2162	-832	6189
19	1540	2282	-742	6279
20	1771	2402	-631	6390
21	2024	2522	-498	6523
22	2300	2642	-342	6679
23	2600	2762	-162	6859
24	2925	2882	$+43$	

(p. 401). Désignons par C_m une quelconque de ces courbes, prise dans toute sa généralité. Il s'agit de reconnaître si effectivement C_m est le type d'une famille distincte ou si, au contraire, c'est un cas particulier d'une famille plus générale. S'il en est ainsi, C_m devra être cas particulier d'une famille $C_{m'}$, le nombre m' étant essentiellement supérieur à m.

Exceptons encore, pour un instant, le dernier, le plus grand des nombres envisagés en ce moment ; dans l'exemple actuel, le nombre 15. Je vais prouver : 1° que C_m est effectivement un type de famille distincte tant que h reste inférieur à $\mathfrak{H}(m+1)$, sans atteindre cette limite ; 2° que ce n'est plus qu'un cas particulier quand h atteint cette limite. Je vais même déterminer le nombre des arbitraires que renferme, dans sa définition, la famille C_m. La démonstration, pour être plus claire, sera d'abord présentée pour les nombres successifs $m = 3, 4, \ldots$.

20. Soit, en premier lieu, $m = 3$; et supposons, pour commencer, $h = \mathfrak{H}(4) - 1$; dans l'exemple ci-contre : $h = 6679$. La courbe C_3 est située sur une surface du troisième degré, et le nombre caractéristique n est égal à $d - 5$, ici 115. Pour toute autre courbe C_4, C_5, ..., ayant le même nombre h de points doubles apparents, le nombre n' sera nécessairement plus petit que n. Il est donc certain que C_3 n'est pas un cas particulier de C_4, C_5, ... Ainsi C_3 est bien une famille distincte. Nous connaissons le nombre de ses arbitraires. J'ai effectivement indiqué (p. 390) que, pour les courbes situées sur les surfaces du troisième degré, le nombre des arbitraires est $(d+p+18)$. Ce résultat est une conséquence facile de ce fait que l'on peut prendre pour adjointe une courbe du premier groupe. Pour l'appliquer, observons que, d'après les hypothèses, nous avons

$$h = \frac{(d-4)(d-5)}{2} + 9,$$

$$p = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{(d-4)(d-5)}{2} - 9 = 3d - 18,$$

d'où résulte

$$d + p + 18 = 4d.$$

Le nombre des arbitraires est donc $4d$.

21. Considérons encore, pour $m = 3$, une valeur de h supérieure à la limite $\mathfrak{H}(4) - 1$, et d'abord une valeur supérieure ou égale

à $\mathfrak{H}(3)$. Soit C'_3 une courbe correspondante. Je dis que c'est un cas particulier d'une famille plus générale. Considérons, en effet, une courbe, la plus générale possible, pour laquelle le nombre h ait la valeur supposée, et le nombre n soit au moins $(d-4)$. On voit aisément que, pour appliquer la formule (20) de la page 294, on devra égaler à zéro les deux termes complémentaires de cette formule aussitôt que m égalera ou surpassera le nombre 3. Par conséquent, la supposition que la courbe soit située sur une surface du troisième degré n'entraîne aucune condition particulière pour la conformation du groupe des points doubles apparents. Elle exige seulement entre les polynomes S_1 et β_1 des conditions traduites par des équations linéaires, dont la formule (20) nous donne le nombre. Ce nombre est ainsi $3d+1-p$, la surface du troisième degré étant supposée donnée. Si cette surface reste *ad libitum*, le nombre des conditions devient $(3d-18-p)$. En conséquence, la courbe C'_3 est un cas particulier d'une famille générale, dans la définition de laquelle figurent des arbitraires en nombre supérieur de $(3d-18-p)$ à celui des arbitraires qu'admet la définition de C'_3. Or C'_3 admet, dans sa définition, $(d+p+18)$ arbitraires. Donc : *la famille générale de courbes* $C^{(3)}$ *pour lesquelles on a* $h \geqq \mathfrak{H}(3)$ *est unique et renferme dans sa définition* $4d$ *arbitraires.*

Il ne faut pas perdre de vue que cette famille $C^{(3)}$ peut aussi être définie comme correspondant au nombre $n=d-4$. C'est un résultat qui va être utilisé dans un instant.

22. Pour les courbes tracées sur les surfaces du quatrième degré, j'ai indiqué aussi (p. 396) que le nombre de leurs arbitraires est, d'une manière générale, $p+33$. La démonstration peut se faire grâce à cette circonstance que les adjointes appartiennent encore au premier groupe. Considérons une courbe C'_4 avec la supposition $h \geqq \mathfrak{H}(4)$, $n=d-5$. En répétant exactement le même raisonnement que nous venons de faire au n° 21, nous établirons que C'_4 est un cas particulier d'une famille plus générale $C^{(4)}$, admettant des arbitraires dont le nombre surpasse de $(4d-p-33)$ celui des arbitraires qu'admet C'_4. Donc encore *la famille générale de courbes* $C^{(4)}$ *pour lesquelles on a* $h \geqq \mathfrak{H}(4)$, *et qui sont situées sur des surfaces dont le degré n'est pas moindre que* 4, *comporte dans sa définition* $4d$ *arbitraires.*

23. Revenons maintenant aux courbes tracées sur les surfaces du troisième degré, et correspondant à une valeur de h supérieure à $\mathfrak{H}(4)-1$, comme je l'ai dit au nº **21**; mais prenons maintenant celles pour lesquelles h est inférieur à $\mathfrak{H}(3)$: n est dès lors égal à $(d-5)$. En examinant encore les conditions sous lesquelles la formule (20) de la page 294 s'applique ici dans l'hypothèse $m=3$, nous reconnaîtrons que ces courbes sont des cas particuliers des familles $C^{(4)}$. Je n'insiste pas sur la démonstration qui va tout à l'heure être présentée sous une forme générale.

Il se trouve ainsi établi que les courbes situées sur les surfaces du troisième degré, et pour lesquelles h est supérieur à $\mathfrak{H}(4)-1$, sont des cas particuliers.

Quant aux courbes C_3, pour lesquelles h est inférieur à $\mathfrak{H}(4)-1$, il n'est pas encore prouvé qu'elles soient des types distincts. Ce fait n'est établi encore que pour $h=\mathfrak{H}(4)-1$. La suite du raisonnement va combler cette lacune.

24. Dans le chapitre V, je n'ai pas parlé du nombre des arbitraires que comportent, dans leur définition, les courbes tracées sur les surfaces du cinquième degré, ainsi que je l'avais fait pour les autres courbes tracées sur les surfaces du troisième et du quatrième degré. C'est qu'effectivement les adjointes des courbes C_5 sont des courbes appartenant au type général que j'ai désigné tout à l'heure par $C^{(3)}$. On ne connaissait pas alors le nombre des arbitraires que comporte la définition des courbes de cette espèce $C^{(3)}$. Ce nombre est maintenant connu, d'après le nº **21**; il est encore égal à $4d$. Au moyen de ce résultat, il sera aisé d'établir que (sauf quelques exceptions relatives aux valeurs minima de h, analogues à l'exception signalée page 396) les courbes C_5 admettent des arbitraires au nombre $(p-d+54)$. Par là, et en raisonnant comme au nº **21**, on démontrera que les courbes C'_5, répondant aux nombres $n=d-6$, $h\geqq\mathfrak{H}(5)$ sont des cas particuliers d'une famille plus générale $C^{(5)}$ admettant encore dans sa définition $4d$ arbitraires. Ainsi *il existe une famille générale de courbes* $C^{(5)}$, *qui ne sont situées sur aucune surface de degré moindre que* 5, *pour lesquelles on a* $h\geqq\mathfrak{H}(5)$, $n=d-6$, *et qui comportent* $4d$ *arbitraires.*

25. Les courbes C_3 correspondant aussi à $n=d-6$ sont, on le

voit maintenant, distinctes des courbes $C^{(5)}$. En effet, le nombre des arbitraires des courbes C_3 augmente avec le *genre* p, suivant la forme $(d+p+18)$. Or on a trouvé le nombre $4d$ pour celui des arbitraires de la famille C_3 qui correspond à $h=\mathfrak{H}(4)-1$. On a donc plus de $4d$ arbitraires pour les courbes C_3 dont il s'agit maintenant, et qui correspondent à $h<\mathfrak{H}(4)-1$.

Mais ce n'est pas encore tout ce qu'on doit conclure de la considération du nombre $n=d-6$. En raisonnant comme au n° 20, nous concluons aussi que les courbes C_4, pour lesquelles $h=\mathfrak{H}(5)-1$, forment une famille distincte, admettant $4d$ arbitraires.

On doit, dès à présent, comprendre comment ce raisonnement se continue et donne une succession ininterrompue de résultats relatifs à des familles C_4, C_5, C_6, ... et $C^{(5)}$, $C^{(6)}$, ... Je vais faire ce raisonnement dans sa généralité.

26. Considérons, pour n, la valeur $n=d-\mu-1$, et envisageons la courbe la plus générale, située sur une surface de degré au moins égal à $(\mu-1)$, pour laquelle enfin h soit au moins égal à $\mathfrak{H}(\mu)$. Cette courbe est définie par les éléments de sa représentation $\varphi=0$, $z=\frac{u_1}{u_0}$. Le groupe des points communs aux courbes $\varphi=0$, $u=0$ ne doit pas être supposé doué de propriétés autres que celles exigées par la définition même. Par conséquent, pour appliquer la formule (20) de la page 294, nous devons attribuer à la fonction F la valeur numérique qui résulte de ce fait : les courbes de moindre degré qui passent par ces points sont $u_0=0$, $u_1=0$. Parmi les points communs à ces deux courbes, il en est qui n'appartiennent pas au groupe considéré; le nombre de ces points est $n(n+1)-nd+h$. Si donc ce nombre est supérieur à la limite de $F(n+m)$, assignée page 294, les points du groupe devront être considérés comme *indépendants*, pour le degré $(n+m)$. Or la condition

$$n(n+1)-nd+h \geqq \frac{(n-m)(n-m-1)}{2}$$

que nous trouvons ainsi, si nous l'appliquons au cas actuel

$$n=d-\mu-1$$

et en supposant $m=\mu-1$, donne précisément pour limite inférieure

de h le nombre inscrit à la colonne 2 dans le tableau, pour la ligne qui correspond à la valeur de n envisagée.

Ainsi, en supposant $m = \mu - 1$, et *a fortiori* $m \geqq \mu$, nous aurons zéro pour le premier terme complémentaire $F(n+m)$ de la formule (20). Quant au second terme complémentaire, la condition pour qu'il soit nul est précisément $m \geqq \mu - 1$. En conséquence, la formule

$$N_m = md + 1 - p$$

s'applique à la courbe pour toute valeur de m égale ou supérieure à $(\mu - 1)$, et ne s'applique pas pour les valeurs moindres.

Prenons m égal à μ, et concluons que, pour la courbe $C^{(\mu)}$ dont il s'agit, la condition d'être située sur une surface de degré μ non donnée lui impose des conditions au nombre $[-p + \mu d + 2 - \psi(\mu)]$.

Supposons démontré précédemment que la courbe générale $C^{(\mu-2)}$, d'un degré quelconque d', admet dans sa définition $4d'$ arbitraires.

Les adjointes des courbes C_μ, situées sur des surfaces de degré μ, sont des courbes $C^{(\mu-2)}$ de degré d_μ, différent de d, comme on le voit en appliquant encore un raisonnement déjà employé plusieurs fois. Par l'intermédiaire de cette adjointe, dont on connaît le nombre des arbitraires, on pourra aisément trouver le nombre des arbitraires de toute courbe C_μ, située sur une surface du degré μ. Ce nombre n'est autre que

$$a = p - (\mu - 4)d + \psi(\mu) - 2,$$

dont les cas particuliers $\mu = 2, 3, 4$ ont déjà été employés. Par suite, la courbe C_μ, qu'on vient d'envisager, est un cas particulier d'une courbe $C^{(\mu)}$ qui admet des arbitraires dont le nombre se trouve en faisant la somme du nombre a et du nombre des conditions précitées. Cette somme est $4d$. La proposition est donc prouvée pour les courbes $C^{(\mu)}$ quand on la suppose exacte pour les courbes $C^{(\mu-2)}$. Elle est donc prouvée dans sa généralité :

La courbe générale $C^{(\mu)}$, *qui n'est située sur aucune surface de degré moindre que* μ, *comprend dans sa définition* $4d$ *arbitraires.*

Et, par les mêmes raisons que dans les cas particuliers précédemment envisagés :

Toute courbe C'_μ, *située sur une surface de degré* μ *et pour*

laquelle le nombre h est au moins égal à $\mathfrak{H}(\mu)$, *est un cas particulier de la courbe* $C^{(\mu)}$ ou de la courbe $C^{(\mu-1)}$, ou $C^{(\mu-2)}$, ...

Toute courbe C_μ *située sur une surface de degré* μ, *et pour laquelle le nombre h est moindre que* $\mathfrak{H}(\mu)$, *est le type d'une famille distincte, dans la définition de laquelle figurent des arbitraires au nombre*

$$A_\mu = p - (\mu - 4)d + \psi(\mu) - 2.$$

On remarquera que pour la *valeur maxima de h, savoir*

$$h = \mathfrak{H}(\mu) - 1,$$

le nombre A_μ *devient* $4d$. C'est ce qui résulte de la valeur de $\mathfrak{H}(\mu)$ donnée par la formule (9) de la page 406. (Le nombre μ de cette formule n'est pas le même qu'ici; il en diffère d'une unité.) *Pour les autres valeurs de h, le nombre* A_μ *est supérieur à* $4d$.

27. Ces propositions sont établies en supposant le nombre μ limité comme je l'ai dit au n° 19. Au delà de la limite assignée, les faits se compliquent comme le montre le tableau, mais les raisonnements employés ne cessent pas d'être exacts. Nous avons donc : 1° une série de courbes C_{15}, situées sur les surfaces du quinzième degré, et qui forment des familles distinctes tant que le nombre h ne dépasse pas $\mathfrak{H}(16) - 1 = 6035$; 2° une série de courbes C_{16} formant des familles distinctes pour $6033 \leqq h \leqq 6068$.

En même temps, nous avons les familles générales $C^{(12)}$, $C^{(13)}$, $C^{(14)}$, $C^{(15)}$, $C^{(16)}$, pour lesquelles les nombres h ont les limites inférieures respectives 6064, 6035, 6020, 6020, 6036, et qui doivent naturellement être confondues entre elles pour toute valeur commune de h.

28. Pour les nombres m auxquels ne correspond aucune colonne dans le tableau, ainsi que pour celui auquel correspond la dernière colonne, la limite inférieure est donnée par le second tableau. A cet effet, il faut prendre pour $H(m)$, ainsi que l'indique le théorème de la page 299, le nombre qui, dans le second tableau, correspond à $(m-1)$, et l'augmenter d'une unité. On ne manquera pas d'observer que, pour $m = 17$, cette même limite $H(17) = 6069$ est également donnée par le premier tableau. Cette coïncidence constitue une

vérification bien importante à cause de l'extrême différence entre les deux méthodes fournissant cette limite, l'une, celle de la page 402, fondée uniquement sur la considération de la courbe adjointe, l'autre résultant du théorème de M. Eduard Weyr, fondé sur des considérations directes (p. 299). Cette coïncidence se retrouvera dans tous les exemples que l'on voudra former, et il est bien aisé par les formules de s'en rendre compte.

Dans le second tableau, le nombre qui figure à la dernière colonne, pour la ligne m', est, par construction,

$$\rho = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + \psi(m') - m'd - 2.$$

Nous aurons la limite $H(m)$ en prenant le nombre $\rho+1$, pour

$$m' = m-1.$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} H(m) &= \frac{(d-1)(d-2)}{2} - (m-1)d - 1 + \psi(m-1) \\ &= \frac{(d-m)(d-m-1)}{2} + \psi(m-2). \end{aligned}$$

Cette formule, comme on voit, ne diffère pas de celle qui représente $\mathfrak{H}(m)$.

Ceci mène à une conséquence curieuse : si l'on prolonge le second tableau *en dessus*, en l'étendant aux valeurs de m, pour lesquelles le théorème de la page 299 cesse de s'appliquer, les nombres de ce tableau fournissent cependant des renseignements utiles. Chacun d'eux indique alors le maximum du nombre des points doubles apparents des courbes C_m, formant des familles distinctes, et situées sur des surfaces de degré m.

29. Résumant tous ces résultats, je les énonce dans la proposition que voici :

Soit m un nombre entier, égal ou inférieur au plus petit entier M *pour lequel est satisfaite la condition*

$$\frac{(M+1)(M+2)(M+3)}{3} \geqq Md + 3.$$

A ce nombre m correspond un autre nombre $H(m)$, fonction toujours croissante avec m (dont on verra plus loin la détermination), jouissant de la propriété suivante :

Toute courbe du degré d qui a moins de H(m) *points doubles apparents est située sur une surface de degré moindre que m.*

Pour tout nombre m_1, *supérieur à* M, *il existe pareillement une semblable fonction* $H_1(m_1)$, *donnant lieu à la même propriété; cette fonction a l'expression suivante :*

$$H_1(m_1) = \frac{(d-m_1)(d-m_1-1)}{2} + \frac{m_1(m_1^2-1)}{6}.$$

A tout nombre h égal ou supérieur à H(m) *correspond une famille de courbes du degré d, ayant h points doubles apparents, et situées sur des surfaces de degré minimum m* (sauf quelques lacunes dans les plus petites valeurs de h). *Tant que le nombre h reste inférieur à une autre limite* $\mathfrak{H}(m+1)$, SANS ATTEINDRE CETTE LIMITE, *les courbes dont il s'agit forment des familles distinctes. Chacune de ces familles comporte dans sa définition des arbitraires dont le nombre est* $4d$ *pour celle qui a le plus grand nombre possible de points doubles apparents* $\mathfrak{H}(m+1)-1$, *et, pour toute autre* $[4d+\mathfrak{H}(m+1)-1-h]$, *nombre supérieur à* $4d$ (sauf encore quelques exceptions dans les plus petites valeurs de h).

La limite $\mathfrak{H}(m+1)$ *est donnée par une formule semblable à celle qui donne* H_1, *savoir :*

$$\mathfrak{H}(m+1) = \frac{(d-m-1)(d-m-2)}{2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{6}.$$

Quand le nombre h atteint ou dépasse la limite $\mathfrak{H}(m+1)$, *chacune des courbes précédentes n'est plus qu'un cas particulier d'une famille plus générale, entièrement caractérisée par les nombres d, h, et dans la définition de laquelle figurent des arbitraires au nombre* $4d$.

Les courbes situées sur des surfaces du second degré offrent une exception : les nombres h qui s'y rapportent forment, à partir du minimum

$$H(2) = \left[\left(\frac{d-1}{2}\right)^2\right]$$

jusqu'au maximum

$$\mathfrak{H}(3)-1 = \frac{(d-3)(d-4)}{2} + 3,$$

une suite discontinue.

Pour les nombres m_1 il n'existe aucune limite analogue à $\mathfrak{H}$; ou, pour mieux dire, cette limite se confond avec $H_1(m_1+1)$. *Les courbes correspondantes forment des familles distinctes dans la définition de chacune desquelles figurent des arbitraires, au nombre* $4d$.

Voici maintenant, pour compléter cet énoncé, la détermination de la fonction $H(m)$. *La fonction* $H(m)$ *a les valeurs suivantes :*

$$H(2) = \left[\left(\frac{d-1}{2}\right)^2\right] \qquad \left[\text{entier contenu dans } \left(\frac{d-1}{2}\right)^2\right];$$

$$H(3) = \left[\frac{(d-1)(d-2)}{3}\right];$$

$$H(4) = 3\left[\frac{(d-2)^2}{8}\right];$$

$$H(5) = \begin{cases} 2\left[\dfrac{(d-2)(d-3)}{5}\right], \\ \text{ou} \\ 2\dfrac{d(d-5)}{5}, \qquad \textit{au cas où } d \textit{ est divisible par } 5; \end{cases}$$

et généralement, σ *étant le plus petit nombre non négatif qui rende* $(d+\sigma)$ *divisible par* m, *et* $(d+\sigma)$ *étant alors égal à* $m\mu$, *on aura*

$$H(m) = \frac{(d-\sigma)(m-1)(\mu-1)}{2},$$

sous la condition EXPRESSE $\mu \geqq m$, *et, par conséquent, tant que* (m^2-m) *sera inférieur à* d :

$$m^2 - m < d.$$

La courbe C_m *qui a* $H(m)$ *points doubles apparents est l'intersection de deux surfaces des degrés* m *et* μ; *cette intersection est complétée par une courbe* PLANE *de degré* σ. *Elle est une intersection complète au cas où* $\sigma = 0$.

Dans le cas $\sigma = 0$, *la première lacune des valeurs de* h *pour les courbes situées sur les surfaces du degré* m *est*

$$H(m) \quad * \quad H(m) + m - 2;$$

dans les autres cas, la première valeur possible pour h, *au-dessus de* $H(m)$, *est le plus petit des deux nombres*

$$H(m) + \sigma - 2, \qquad H(m) + m - \sigma - 2.$$

(Ce résultat, établi pour $m = 4$ et 5, est facile à prouver en suivant l'analyse employée pour ces cas particuliers, et considérant la valeur de n immédiatement supérieure au minimum.)

Pour tout autre nombre m', tel qu'on ait

$$m'^2 - m' \geqq d,$$

la fonction $H(m')$ *suit une autre loi qu'il n'est pas possible d'exprimer par une formule unique. Cette loi s'obtient, dans chaque cas, suivant les règles expliquées au chapitre V* (p. 407 et 408). *Mais il faut avoir soin d'observer qu'à l'égard des nombres m' pour lesquels* $H(m')$ *est supérieure au minimum de* $\mathfrak{H}$, *la fonction* $H(m')$ *perd une de ses propriétés. Elle cesse de marquer la limite inférieure des nombres h, au-dessous desquels les courbes sont situées sur des surfaces de degré moindre que m'.* C'est ce qui arrive pour $m' = 16$, dans le cas $d = 120$.

30. Pour l'exemple choisi $d = 120$, les valeurs numériques de $H(m')$ sont les suivantes :

$$H(12) = 5976, \quad H(13) = 5979, \quad H(14) = 5985,$$
$$H(15) = 6000, \quad H(16) = 6032.$$

On peut donner une définition de la limite $H(m')$ fondée sur les considérations suivantes, qui seraient insuffisantes *a priori*, mais suffisent quand on connaît l'existence de cette limite.

Soit une courbe C, située sur deux surfaces $A = 0$, $B = 0$, toutes deux de degré m'. Soit Γ la courbe qui complète l'intersection. Envisageons une surface $A' = 0$, différente de A et B et de toute surface de leur faisceau, et qui passe par Γ; soit Γ' la courbe qui complète l'intersection de A et de A'. Prenons enfin une autre surface, distincte du faisceau (A, A') et passant par Γ'. Soit $B' = 0$ cette surface. On aura immédiatement une identité de la forme suivante :

$$B'B = PA + QA',$$

dans laquelle $Q = 0$ représentera une surface passant par C. Soient α, β les degrés de A' et de B'. La surface Q sera du degré $(m' + \beta - \alpha)$. Si donc par la courbe C ne doit passer aucune surface de degré inférieur à m', on devra avoir $\beta \geqq \alpha$. Cette condition sera d'ailleurs suffi-

sante si l'on prend pour α et β toutes les valeurs possibles. De là cette définition de $H(m')$:

Que l'on prenne une courbe Γ, *de degré* $(m'^2 - d)$, *astreinte aux conditions suivantes :*

1° Γ *doit être sur une infinité de surfaces de degré* m';

2° *Aucune courbe* Γ', *complémentaire de* Γ *sur les surfaces de degré* m', *ne doit être située sur une surface de degré moindre que la surface sur laquelle* Γ' *et* Γ *composent une intersection complète;*

3° Γ *doit avoir le moindre nombre de points doubles apparents qu'il sera possible, eu égard à ces deux conditions. Soit alors* h *le nombre des points doubles apparents de* Γ; *on aura*

$$H(m') = h + \frac{1}{2}(2d - m'^2)(m' - 1)^2.$$

Comme on voit, cette définition pourra servir à trouver $H(m')$ dans beaucoup de cas, notamment ceux où m'^2 est inférieur à $2d$; car alors Γ est de degré moindre que d. Mais, en réalité, cette définition ne présente pas d'avantage sur celle qui résulte des méthodes exposées précédemment; elle est même d'un emploi moins facile. Appliquons les deux méthodes à la détermination de $H(12)$ dans l'exemple $d = 120$.

La courbe Γ est du vingt-quatrième degré; d'après la seconde condition, elle ne peut être sur une surface de degré moindre que 3. On aura le minimum de h en supposant Γ l'intersection complète de deux surfaces A_3, A_8. Les conditions requises seront satisfaites; car la courbe Γ', intersection de A_3 et de A_{12}, ne sera pas sur une surface de degré moindre que 4, A_3 étant exceptée. On a

$$h = 168, \qquad \text{d'où résulte} \qquad H(12) = 5976,$$

comme l'indique le tableau.

La méthode employée en formant le tableau procédait ainsi : on considère la suite S dont les premiers polynomes ont les degrés

$$d_0 = 120, \quad d_1 = 100, \qquad \text{d'où résulte} \qquad d_{11} = 10, \quad d_{12} = 12.$$

L'adjointe, de degré 12, est astreinte à n'être située sur aucune surface de degré inférieur à $2 \times 12 - (d_0 - d_1) - 1 = 3$, et à avoir le moindre nombre de points doubles apparents possible. On doit

donc prendre pour cette adjointe l'intersection de deux surfaces A_3, A_4; ce qui donne pour le nombre de ses points doubles apparents $h_{11} = 36$, et, par la formule

$$d_0 d_1 - 2h_0 = d_{m-1} d_m - 2h_{m-1},$$

$h_0 = 5976$. Cette adjointe remplace ici la courbe Γ'. Effectivement, cette adjointe a pour complémentaire de degré minimum, sur une surface du douzième degré, une courbe du degré 24, intersection de deux surfaces A_3, A_8. D'après le théorème de la page 361, il en va de même pour la courbe C elle-même. On retrouve ainsi la même courbe Γ que précédemment.

31. Il serait maintenant aussi long qu'inutile de faire l'énumération des diverses familles de courbes du degré 120. Je me contenterai de donner trois exemples qui mettent en évidence le mode d'application de la proposition générale dans les cas principaux.

I. — *Courbes du degré* 120, *avec* 6565 *points doubles apparents.*

	n.	Degré minimum des surfaces.	Nombre des arbitraires
1re famille..........	114	2	704
2e »	113	3	594
3e »	113	4	489
4e »	113	21	480

II. — *Courbes du degré* 120, *avec* 6000 *points doubles apparents.*

	n.	Degré minimum des surfaces.	Nombre des arbitraires
1re famille..........	108	3	1159
2e »	107	4	1054
3e »	107	5	955
4e »	106	6	863
5e »	106	7	779
6e »	106	8	704
7e »	105	9	639
8e »	105	10	585
9e »	104	11	543
10e »	104	12	514
11e »	102	13	499
12e »	102	14	499
13e »	100	15	515

III. — *Courbes du degré* 120, *avec* 5880 *points doubles apparents.*

	n.	Degré minimum des surfaces.	Nombre des arbitraires.
1re famille..........	106	3	1279
2e »	106	4	1174
3e »	105	5	3075
4e »	104	6	983
5e »	103	7	899
6e »	98	8	859

Ces exemples doivent suffire à faire voir que les propositions du n° 29 résolvent véritablement le problème général de la classification des courbes gauches d'un degré donné.



SUR QUELQUES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

DU QUATRIÈME ORDRE.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 97, 1883, p. 247.

Dans une note récente [1], M. Goursat a indiqué la possibilité de réduire au second ordre les équations linéaires du quatrième ordre, dont les intégrales sont liées par une relation quadratique. Je me propose de donner ici le moyen de reconnaître cette propriété sur l'équation et d'effectuer la réduction. Ce problème présente plusieurs cas, et j'ai donné la solution pour deux d'entre eux dans un mémoire couronné par l'Académie [2]. La distinction de ces cas semble plus nette si l'on emploie la notion de la *courbe attachée à l'équation*, introduite dans le mémoire que je viens de rappeler.

Considérant quatre intégrales comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace, et la variable indépendante comme un paramètre qui fait varier ce point, on a pour lieu de ce point une courbe : c'est celle dont je parle. Par le moyen de cette courbe, on reconnaît l'identité entre les invariants des équations linéaires du quatrième ordre et les invariants des courbes gauches. En particulier, le problème de reconnaître sur l'équation si une relation quadratique existe entre les intégrales est le même que ceux-ci :

I. *Trouver l'équation différentielle des courbes tracées sur les hyperboloïdes;*

II. *Trouver l'équation différentielle des courbes tracées sur les cônes du second degré;*

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCVII, 1883, p. 31.
(2) [*Œuvres d'Halphen*, t. III, p. 1].

III. *Trouver les équations différentielles des courbes biquadratiques;*

IV. *Trouver les équations différentielles des cubiques gauches.*

Introduisons, pour les équations du quatrième ordre, les invariants affectés de coefficients numériques choisis de telle sorte que l'on reproduise exactement ainsi les invariants déjà employés dans mon mémoire *Sur les invariants différentiels des courbes gauches* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLVII[e] cahier) (¹). Voici leurs expressions, en supposant, pour la simplicité, l'équation privée de son second terme :

$$y^{\text{IV}} + 6p_2y'' + 4p_3y' + p_4y = 0.$$

Le plus simple invariant est celui-ci :

$$v = \frac{1}{30}(3p'_2 - 2p_3).$$

Si l'on exprime les coefficients en fonction des intégrales, v contient, jusqu'au sixième ordre, les dérivées de ces intégrales. Pour les autres invariants, un indice rappelle l'ordre auquel ils contiennent ces dérivées. Le suivant est

$$s_7 = \frac{1}{42}\left(p_4 - 2p'_3 + \frac{6}{5}p''_2 - \frac{81}{25}p_2^2\right).$$

On en déduit une série d'autres, ainsi

$$s_8 = \frac{1}{8}\left(vs'_7 - \frac{4}{3}v's_7\right), \quad s_9 = \frac{1}{9}\left(vs'_8 - \frac{8}{3}v's_8)\right), \quad \dots\dots$$

Il y a, en outre, un autre invariant du septième ordre, distinct de s_7, qu'on obtient par l'intermédiaire d'un second invariant δ, du huitième ordre, ainsi

$$\delta = \frac{5}{6}vv'' - \frac{35}{36}v'^2 - 3p_2v^2,$$

$$t_7 = \frac{1}{35}\delta - \frac{4}{3}s_8 - \frac{7}{36}s_7^2.$$

On en déduit une seconde série d'invariants

$$t_8 = \frac{1}{8}\left(vt'_7 - \frac{8}{3}v't_7\right), \quad t_9 = \frac{1}{9}\left(vt'_8 - \frac{12}{3}v't_8\right), \quad \dots\dots$$

(¹) [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 353].

Dans le cas particulier où v est nul identiquement, ce système est en défaut; s_7 subsiste et remplace v; on lui adjoint cet autre

$$\tau = 6p_2 s_7^2 - \frac{4}{5} s_7 s_7'' + \frac{45}{32} s_7'^2,$$

et l'on forme une suite d'invariants dont le premier est

$$s_7 \tau' - \frac{5}{2} s_7' \tau.$$

Enfin, si v et s_7 sont nuls tous deux, il n'y a plus d'invariants.

Voici maintenant la solution des problèmes proposés. Composons les invariants suivants :

$$M = s_3 + 2t_7 + \frac{1}{6} s_7^2, \qquad \Phi = M^2 t_7 - MN s_7 + N^2,$$

$$N = t_8 + \frac{4}{3} s_7 t_7 - \frac{3}{2} v^4, \qquad \Psi = \Phi^2 + 4 M^3 N v^4.$$

I. Pour que la courbe attachée soit sur une surface du second degré, la condition s'exprime abréviativement ainsi :

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dx} \log \frac{\Psi}{v^{\frac{16}{3}} M^4} = \frac{2N}{vM} - \frac{7}{3} \frac{s_7}{v}.$$

Quand cette condition est satisfaite, on prend les deux équations du second ordre, comprises dans la formule ambiguë

$$z'' - \left(\frac{v'}{3v} - \frac{7}{3} \frac{s_7}{v} + 2 \frac{N}{vM} \right) z' = \frac{5\Phi \pm 3\sqrt{\Psi}}{2 v^2 M^2} z.$$

Soient α et β une solution de chacune d'elles; on aura, pour la proposée,

$$y = (vM)^{\frac{3}{2}} \Psi^{-\frac{3}{8}} \alpha\beta.$$

Pour type, on peut prendre

$$y^{\text{IV}} - 2gy'' - 3g'y' + (1 - g'')y = 0,$$

qui conduit à ces équations du second ordre,

$$z'' = \frac{g \pm 1}{2} z.$$

Si v est nul, la solution est différente. La condition consiste alors

en ce que $\tau^2 : s_7^5$ soit une constante. A chaque racine de l'équation bicarrée

$$\lambda^4 + \frac{\tau}{s_7^{\frac{2}{7}}\sqrt{42 s_7}}\lambda^2 + 1 + \frac{3}{1400}\frac{\tau^2}{s_7} = 0$$

correspond une intégrale $y = s_7^{-\frac{3}{8}} e^{\lambda \int s_7^{\frac{1}{4}} dx}$.

II. Pour que la courbe soit sur un cône du second degré, la condition est $\Psi = 0$. En ce cas, on envisage l'équation

$$z'' - \left(\frac{v'}{3v} - \frac{7}{3}\frac{s_7}{v} + 2\frac{N}{vM}\right)z' = \frac{5\Phi}{2v^2 M^2} z.$$

Soient z_1 et z_2 deux intégrales, on a la solution

$$y = v^{-\frac{1}{2}} e^{\int\left(\frac{7}{2}\frac{s_7}{v} - 3\frac{N}{vM}\right)dx}(c z_1^2 + c' z_1 z_2 + c'' z_2^2).$$

Pour type de ce cas, on peut prendre

$$y^{\text{IV}} - 2gy'' - 3g'y' - g''y = 0, \qquad z'' = \frac{1}{2} g z.$$

III. Pour que la courbe soit biquadratique, les conditions sont

$$M = N = 0.$$

En ce cas, les intégrales dèpendent algébriquement des coefficients, et l'on peut les représenter ainsi par les fonctions elliptiques.

Comme conséquence de $M = N = 0$, si l'on pose à la fois, en employant des combinaisons déjà utilisées ailleurs (¹),

$$-\frac{t_7^3}{v^8} = \frac{H^3(3u)\,H^5(u)}{H^8(2u)}, \qquad -1 + \frac{s_7 t_7}{v^4} = \frac{H(4u)\,H^4(u)}{H^5(2u)},$$

le module est une constante, et u une nouvelle variable. En fonction de cette variable, l'intégrale y s'exprime ainsi :

$$y = \left(\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{v \operatorname{sn}^3 u}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\operatorname{sn}^3 \frac{u}{2}}{\operatorname{cn}\frac{u}{2}\operatorname{dn}\frac{u}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \left[c + c' \operatorname{sn}\left(\frac{u}{2} + iK'\right) + c'' \operatorname{cn}\left(\frac{u}{2} + iK'\right) + c''' \operatorname{dn}\left(\frac{u}{2} + iK'\right)\right].$$

(¹) [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 441].

IV. Enfin les équations qui caractérisent la cubique gauche sont

$$v = s_7 = 0.$$

En ce cas, on prend l'équation

$$z'' + \frac{3}{5} p_2 z = 0,$$

et l'on a

$$y = c z_1^3 + c' z_1^2 z_2 + c'' z_1 z_2^2 + c''' z_2^3.$$



SUR LES INVARIANTS

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU QUATRIÈME ORDRE.

Acta mathematica, t. III, 1883-1884, p. 325.

Je me propose d'étudier ici la théorie détaillée des invariants pour les équations du quatrième ordre, et d'identifier cette théorie avec celle des invariants différentiels pour les courbes gauches. Une partie de cette étude se trouve déjà dans mon mémoire *Sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables* (¹); mais je ne renverrai pas le lecteur à ce mémoire, et l'on trouvera ici une exposition complète, suivie d'applications.

1. Soit une équation linéaire du quatrième ordre

$$(1)\qquad \frac{d^4 Y}{dX^4} + 4 P_1 \frac{d^3 Y}{dX^3} + 6 P_2 \frac{d^2 Y}{dX^2} + 4 P_3 \frac{dY}{dX} + P_4 Y = 0,$$

où les lettres P désignent des fonctions de X. En dénotant par u et μ deux fonctions de X, posant

$$(2)\qquad \frac{dx}{dX} = \mu, \qquad Y = uy,$$

et, prenant x, y pour nouvelles variables, on obtient une transformée

$$(3)\qquad \frac{d^4 y}{dx^4} + 4 p_1 \frac{d^3 y}{dx^3} + 6 p_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4 p_3 \frac{dy}{dx} + p_4 y = 0.$$

(¹) *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, t. XXVIII, n° 1; Paris, 1883. [*Œuvres d'Halphen*, t. III, p. 1.]

Les nouveaux coefficients p s'expriment au moyen des anciens coefficients P et de u, μ avec leurs dérivées u', u'', ..., μ', μ'', ... prises par rapport à X. Toute fonction de p, $\frac{dp}{dx}$, ... est donc exprimable par P, $\frac{dP}{dX}$, ..., u, u', ..., μ, μ', ... Si cette fonction f est telle que u, u', ..., μ, μ', ... disparaissent de son expression, on a alors

$$f\left(p, \frac{dp}{dx}, \cdots\right) = f\left(\mathrm{P}, \frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{X}}, \cdots\right),$$

et f est un *invariant absolu*. L'existence de telles fonctions sera bientôt prouvée. Nous la supposons d'abord.

2. Sans qu'il soit besoin de développer les relations entre les P et les p, observons seulement le caractère suivant :

En dénotant par λ_{m-1} une fonction linéaire des coefficients P, affectés d'indices non supérieurs à $(m-1)$, on a

$$p_m = \frac{1}{\mu^m}(\mathrm{P}_m + \lambda_{m-1}).$$

Généralisons cette remarque comme il suit. Attribuons à $\frac{d^n \mathrm{P}_m}{d\mathrm{X}^n}$ le *poids* $(m+n)$. Par la même lettre λ, affectée d'un indice, désignons une fonction linéaire des P et de leurs dérivées, où le poids de chaque terme ne dépasse pas l'indice de λ. De la précédente formule, nous déduirons celle-ci :

$$\frac{d^n p_m}{dx^n} = \frac{1}{\mu^{m+n}}\left(\frac{d^n \mathrm{P}_m}{d\mathrm{X}^n} + \lambda_{m+n-1}\right).$$

Étendons encore la convention en admettant pour λ une forme non linéaire. Soit A_n une fonction entière des P, $\frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{X}}$, ..., et dont tous les termes soient d'un même poids n. Soit a_n la même fonction formée avec p, $\frac{dp}{dx}$, ... Nous aurons

$$a_n = \frac{1}{\mu^n}(\mathrm{A}_n + \lambda_{n-1}). \tag{4}$$

On ne manquera pas d'observer que les restes λ sont nuls dans le cas particulier où u est l'unité, et μ une constante.

3. Considérons un invariant absolu, rationnel par rapport aux P

et leurs dérivées. Mettons les poids en évidence en réunissant, au numérateur ainsi qu'au dénominateur, les termes de poids commun; ordonnons par rapport aux poids, et dénotons ces poids par des indices. Soient ainsi

$$\frac{A_n + A_{n-1} + A_{n-2} + \ldots}{B_m + B_{m-1} + B_{m-2} + \ldots} = \frac{a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots}{b_m + b_{m-1} + b_{m-2} + \ldots}$$

les deux expressions de l'invariant, par les P, $\frac{dP}{dX}$, ... d'une part; par les p, $\frac{dp}{dx}$, ... d'autre part. Ces deux expressions doivent être identiques, en vertu des relations telles que (4) : c'est là ce que suppose l'invariance.

Prenons d'abord le cas simple où u est l'unité et μ une constante. Nous aurons identiquement

$$\frac{A_n + A_{n-1} + A_{n-2} + \ldots}{B_m + B_{m-1} + B_{m-2} + \ldots} = \mu^{m-n} \frac{A_n + \mu A_{n-1} + \mu^2 A_{n-2} + \ldots}{B_m + \mu B_{m-1} + \mu^2 B_{m-2} + \ldots}.$$

De là résulte $n = m$, $A_{n-1} = 0$, $B_{m-1} = 0$, ...; l'invariant se réduit au quotient de deux fonctions A_n, B_n, toutes deux homogènes quant au poids, et toutes deux d'un même poids n.

Prenons maintenant le cas général; nous aurons, suivant (4), et avec deux restes λ_{n-1}, λ'_{n-1}, une identité telle que

$$\frac{A_n + \lambda_{n-1}}{B_n + \lambda'_{n-1}} = \frac{A_n}{B_n}.$$

Or les deux restes étant de poids moindre que n, à tous leurs termes, et A_n, B_n pouvant être supposés sans facteur commun, le quotient $\lambda_{n-1} : \lambda'_{n-1}$ ne saurait être égal à $A_n : B_n$. Donc les deux restes sont nuls.

Donc le numérateur, ainsi que le dénominateur, d'un invariant absolu est un invariant *relatif*, ayant la propriété que caractérise la relation

$$\varphi\left(p, \frac{dp}{dx}, \ldots\right) = \frac{1}{\mu^n} \varphi\left(P, \frac{dP}{dX}, \ldots\right).$$

Le nombre n est le *poids* de l'invariant; il est entier et positif quand φ est, comme dans cette analyse, une fonction entière.

4. Si une relation algébrique entre P, $\frac{dP}{dX}$, ... est invariante pour

les substitutions (2), c'est-à-dire si cette relation

$$\psi\left(\mathrm{P}, \frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{X}}, \cdots\right) = 0$$

a pour transformée

$$\psi\left(p, \frac{dp}{dx}, \cdots\right) = 0,$$

alors ψ, supposée fonction entière, est un invariant. On le prouve en raisonnant comme tout à l'heure.

De telles relations invariantes peuvent être aisément conçues et fournissent la voie la plus naturelle pour obtenir les invariants. Pour ce but, on n'a qu'à choisir une équation exprimant, entre les intégrales, une relation invariable à la fois par les substitutions (2) et par le changement des intégrales entre elles.

Il existe, par exemple, une telle équation exprimant que les intégrales sont liées par une relation quadratique homogène à coefficients constants. Il n'y a aucun embarras théorique, mais seulement longueur de calcul, à former cette équation de la manière suivante : si y est une intégrale de l'équation proposée (3), y^2 satisfait à une équation différentielle linéaire du dixième ordre, dont on peut calculer les coefficients en fonction de $p, \frac{dp}{dx}, \cdots$. Dans cette équation, mise sous forme entière, le coefficient de la dérivée du dixième ordre fournit la fonction ψ dont il s'agit. Je reviendrai plus loin (n° 30) sur ce calcul. La fonction ψ sera d'ailleurs trouvée par une autre voie.

5. C'est la considération d'une autre transformée, celle-ci du sixième ordre, qui va nous fournir le plus simple des invariants. Prenons l'équation primitive privée de son second terme,

$$y^{\text{IV}} + 6p_2 y'' + 4p_3 p' + p_4 y = 0$$

et dénotons les dérivées par des accents.

Soient u, w deux intégrales, et posons

$$z = uw' - wu'.$$

L'inconnue z satisfait à une équation linéaire du sixième ordre, que nous allons former. Suivant une notation utilisée pour les déterminants, écrivons en différentiant successivement

$$\begin{aligned} z &= (uw'), \\ z' &= (uw''), \\ z'' &= (uw''') + (u'w''). \end{aligned}$$

A la dérivée suivante, nous éliminerons u^{IV} et w^{IV} au moyen de l'équation proposée ; en tenant compte des relations précédentes, nous aurons

$$z''' + 6p_2 z' + 4p_3 z = 2(u' w''').$$

En continuant, nous obtenons à la dérivation suivante

$$(z''' + 6p_2 z' + 4p_3 z)' - 2p_4 z = 2(u'' w''') - 12 p_2(u' w'').$$

Posant ensuite

$$Z = (z''' + 6p_2 z' + 4p_3 z)'' + 6p_2(z''' + 6p_2 z' + 4p_3 z) - 4p_4 z' - 2p'_4 z,$$

la cinquième différentiation nous donne

$$Z = 4(2p_3 - 3p'_2)(u' w'').$$

Voici enfin la transformée cherchée

$$(2p_3 - 3p'_2)Z' - (2p'_3 - 3p''_2)Z - 2(2p_3 - 3p'_2)^2(z''' + 6p_2 z' + 4p_3 z) = 0.$$

Cette transformée se réduit au cinquième ordre, et consiste en $Z = 0$, dans le cas particulier où l'on a identiquement

$$\varphi = 2p_3 - 3p'_2 = 0.$$

La relation $\varphi = 0$ exprime donc que les six fonctions (uw') sont liées linéairement. Une telle propriété est invariante pour les substitutions (2), et se conserve aussi quand on change les intégrales. Donc φ est un invariant.

Pour avoir les mêmes notations que dans ma théorie des courbes gauches [1], je prendrai comme invariant fondamental $-\frac{1}{30}\varphi$, que je désignerai par la lettre v. Voici donc le premier invariant à employer :

$$(5) \qquad v = \frac{1}{30}(3p'_2 - 2p_3).$$

6. Arrêtons-nous un instant pour faire une application en prenant, pour exemple, l'équation

$$(6) \qquad y^{\text{IV}} - 2n(n+1)\,\text{p}\,y'' - 2n(n+1)\,\text{p}'y' + \left[\frac{n(n+1)(n+3)(n-2)}{6}\,\text{p}'' + \alpha\right] y = 0.$$

---

[1] *Sur les invariants différentiels des courbes gauches* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLVIIe cahier; Paris, 1880). [*Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 353.]

Les lettres n et α désignent deux constantes. Quant à la lettre $\wp$, elle représente la fonction elliptique de M. Weierstrass; pour abréger l'écriture, j'omets, après cette lettre $\wp$, celle qui représente la variable indépendante. Je rappelle, d'après les notations usitées, les relations

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2,$$

$$\wp''' = 12\wp\wp'.$$

Dans cet exemple, l'invariant θ est nul; en faisant le calcul de Z, on trouve alors que le dernier terme manque. De la sorte, en prenant

$$\zeta = z' = uw'' - wu'',$$

on a une transformée du quatrième ordre :

$$(7)\qquad \zeta^{\text{IV}} - 4n(n+1)\wp\zeta'' - 6n(n+1)\wp'\zeta' + [\beta - 2n(n+1)\wp'']\zeta = 0,$$

dans laquelle la constante β est liée à α par la relation

$$\beta = \frac{n^2(n+1)^2}{3}g_2 - 4\alpha.$$

J'ai déjà, dans mon mémoire *Sur la réduction des équations linéaires* [1], signalé l'équation (6), au cas où n est un nombre entier, comme intégrable d'une manière analogue à l'équation de Lamé. On verra plus loin (n° 22) qu'elle se ramène à l'équation de Lamé elle-même.

7. J'ai pris, au n° 5, une équation privée de son second terme. Il est facile de revenir au cas général. On fait disparaître le second terme de l'équation (1) en prenant $y = \text{Y}\,e^{\int \text{P}_1\,d\text{X}}$. La transformée a les coefficients suivants :

$$(8)\left\{\begin{array}{l} p_1 = 0, \qquad p_2 = \text{P}_2 - \text{P}'_1 - \text{P}_1^2, \qquad p_3 = \text{P}_3 - 3\text{P}_1\text{P}_2 + 2\text{P}_1^3 - \text{P}''_1, \\ p_4 = \text{P}_4 - 4\text{P}_1\text{P}_3 + 6\text{P}_1^2\text{P}_2 - 3\text{P}_1^4 - 6\text{P}_2\text{P}'_1 + 6\text{P}_1^2\text{P}'_1 + 3\text{P}'^2_1 - \text{P}'''_1. \end{array}\right.$$

Dans un invariant où l'on a fait $p_1 = 0$, il suffit de remplacer p_2, p_3, p_4 par ces valeurs (8), pour obtenir la forme générale.

---

[1] [*Œuvres d'Halphen*, t. III, p. 239].

J'emploierai communément la même lettre, majuscule ou minuscule, pour un même invariant supposé se rapporter à l'équation (1) ou à l'équation (3). Ainsi, pour l'équation complète (1), l'invariant (5) sera désigné par V; il aura l'expression suivante, où les dérivées sont prises par rapport à X :

$$(9)\qquad 30\,V = -P_1'' + 3(P_2' - 2P_1P_1') - 2(P_3 - 3P_1P_2 + 2P_1^3).$$

Son poids est égal à 3. En conséquence, la même quantité v, exprimée par les coefficients de (3), et avec les dérivées prises par rapport à x, donne lieu à l'identité

$$V = \mu^3 v.$$

8. Envisageons quatre intégrales distinctes Y, comme les coordonnées homogènes d'un point Y de l'espace. Ce point varie avec X et a pour lieu une courbe *attachée* à l'équation. Changer les intégrales Y revient à transformer homographiquement la courbe; changer Y en uY ne change pas le point; changer la variable indépendante n'altère pas la courbe. On voit donc que la courbe attachée, définie par une quelconque de ses homographiques, est invariante pour les substitutions (2). Donc ses invariants sont aussi des invariants de l'équation différentielle.

Les coefficients de l'équation, exprimés par les intégrales, sont des fonctions des éléments infinitésimaux de la courbe en un même point. Donc les invariants de l'équation, composés algébriquement avec les coefficients et leurs dérivées, sont des *invariants différentiels* de la courbe attachée.

Les déterminants (uv'), considérés au n° 5, sont les coordonnées de la tangente à la courbe. Ainsi l'invariant v a la signification suivante : *l'équation* $v = 0$ *caractérise toute courbe dont les tangentes appartiennent à un même complexe linéaire.*

Dans ma théorie des courbes gauches, j'ai employé les coordonnées cartésiennes x, y, z, et pris les dérivées par rapport à x. J'ai fait usage, en outre, des notations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4.5\ldots n}\,\frac{y''z^{(n)} - z''y^{(n)}}{y''z''' - z''y'''} \\ b_n &= \frac{1}{3.4\ldots n}\,\frac{y^{(n)}z''' - y'''z^{(n)}}{y''z''' - z''y'''} \end{aligned}\right\}\quad (n \geqq 4).$$

Tout invariant différentiel entier, divisé par une puissance conve-

nable de $(y''z''' - z''y''')$, s'exprime en fonction entière des quantités a, b. Avec ces notations, j'ai trouvé, par la propriété géométrique précédente, l'invariant

$$v = a_6 - 2b_5 - 3a_4a_3 + 3a_4b_4 + 2a_4^3.$$

Les deux invariants, dénotés tous deux par v, ne peuvent différer que par un facteur numérique. Voici comment on peut faire facilement la comparaison.

Prenons une équation privée de ses deux derniers termes; elle admet alors les solutions 1, x. Si l'on appelle y, z deux autres solutions, on a, d'après les notations précédentes,

$$p_1 = -a_4, \qquad p_2 = -2b_4.$$

De là, en différentiant,

$$\begin{aligned} p_1^{(k)} &= -5.6\ldots(k+4)a_{k+4} + \ldots, \\ p_2^{(k)} &= -2.5.6\ldots(k+4)b_{k+4} + \ldots, \end{aligned}$$

formules où sont négligés des restes contenant des dérivées, toutes d'ordre inférieur à $(k+4)$.

On voit par là que, dans V, fourni par la relation (9), le terme de l'ordre le plus élevé provient de $-\frac{1}{30}P_4''$; et c'est précisément a_6.

Ainsi l'invariant v, adopté ici, coïncide exactement avec celui de ma théorie des courbes. La même précaution sera prise, dans la suite, pour les autres invariants. La vérification pourra être faite de la même manière; mais je me dispenserai de la reproduire.

9. La connaissance d'un seul invariant conduit à la formation immédiate de tous les autres, au moyen d'une forme réduite de l'équation différentielle.

A cet effet, employons l'invariant V. Dans la substitution (2) prenons μ de façon à réduire v à une constante numérique, soit $\frac{1}{30}$; et u de façon à priver la transformée du second terme. Ce choix est réalisé ainsi

$$\mu = (30V)^{\frac{1}{3}}, \qquad u = V^{-\frac{1}{2}} e^{-\int P_1 \, dX}.$$

En appelant ξ, η, au lieu de x, y, les variables nouvelles, nous avons

la forme réduite suivante :

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + 2H\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\left(\frac{dH}{d\xi} - 1\right)\frac{d\eta}{d\xi} + K\eta = 0.$$

Les lettres H, K désignent deux fonctions des P, $\frac{dP}{dX}$, ..., et ce sont manifestement des invariants absolus. Leurs numérateurs sont rationnels, leurs dénominateurs sont des puissances de V. Il en va de même de $\frac{dH}{d\xi}$; car on a

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{1}{(30V)^{\frac{1}{3}}}\frac{dH}{dX} = H_1.$$

De même encore les dérivées successives de H, K, prises par rapport à ξ, s'expriment par une double suite d'invariants absolus, à numérateurs rationnels, et à dénominateurs égaux à des puissances de V. Soient $H_1, H_2, \ldots$; $K_1, K_2, \ldots$ ces invariants absolus.

Tout invariant absolu peut être, sans altération, calculé sur l'équation réduite. Donc tout invariant absolu rationnel est exprimable rationnellement par $H, H_1, H_2, \ldots$; $K, K_1, K_2, \ldots$; et tout invariant relatif entier, divisé par une puissance de V, est exprimable en fonction entière des mêmes quantités.

10. Le calcul de K est immédiat ainsi : prenons l'équation privée du second terme, alors u se réduit à $V^{-\frac{1}{2}}$. Donc $K = 0$ exprime que l'équation admet la solution $V^{-\frac{1}{2}}$, et le numérateur de K est l'invariant suivant

$$\varphi = v^{\frac{9}{2}}\left[\left(v^{-\frac{1}{2}}\right)^{\text{IV}} + 6p_2\left(v^{-\frac{1}{2}}\right)'' + 4p_3\left(v^{-\frac{1}{2}}\right)' + p_4 v^{-\frac{1}{2}}\right],$$

où l'on n'a plus qu'à mettre V au lieu de v, et à substituer aux p les expressions (8), pour obtenir l'expression générale du numérateur Φ. On a d'ailleurs

$$K = \frac{\Phi}{V^4(30V)^{\frac{4}{3}}}.$$

Cette analyse, faite au moyen de l'invariant V, peut se faire de même au moyen de tout autre. Ainsi p_2, p_3, p_4 désignant encore les quantités (8), et ω un invariant quelconque du poids m, la combinaison

$$\left(\omega^{-\frac{3}{2m}}\right)^{\text{IV}} + 6p_2\left(\omega^{-\frac{3}{2m}}\right)'' + 4p_3\left(\omega^{-\frac{3}{2m}}\right)' + p_4\omega^{-\frac{3}{m}}$$

est un invariant.

11. Pour avoir l'expression de H, employons les formules générales de transformation, mais en nous bornant à une formule unique qui nous suffira.

Soit une équation privée du second terme

$$\frac{d^4 Y}{dX^4} + 6 P_2 \frac{d^2 Y}{dX^2} + 4 P_3 \frac{dY}{dX} + P_4 Y = 0.$$

Changeons la variable indépendante d'une manière arbitraire, en posant, comme précédemment,

$$\frac{dx}{dX} = \mu.$$

En même temps, changeons l'inconnue de manière que la transformée manque aussi du second terme. Pour ce but, il faut prendre

$$Y = y \mu^{-\frac{3}{2}}.$$

Posons alors

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dX} = \lambda.$$

La transformée étant

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 6 p_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4 p_3 \frac{dy}{dx} + p_4 y = 0,$$

son coefficient p_2 est donné par la formule

$$(10) \qquad 6 p_2 = \frac{1}{\mu^2}\left(6 P_2 - 5\lambda' + \frac{5}{2}\lambda^2\right).$$

Dans cette formule (10), facile à vérifier, la dérivée λ' est prise par rapport à X.

En y mettant $(30\,V)^{\frac{1}{3}}$ pour μ, et, par conséquent, $\frac{1}{3}\frac{V'}{V}$ pour λ, nous trouvons, pour le numérateur de H,

$$\Delta = \frac{5}{6} V V'' - \frac{35}{36} V'^2 - 3 P_2 V^2.$$

En revenant, par les formules (8), au cas d'une équation complète, nous avons l'invariant

$$(11) \qquad \Delta = \frac{5}{6} V V'' - \frac{35}{36} V'^2 - 3(P_2 - P_1^2 - P_1') V^2.$$

De là résulte, pour H, l'expression

$$H = -\frac{\Delta}{V^2(30V)^{\frac{2}{3}}}.$$

Voici, à propos de Δ, une observation qui sera utile plus loin. En retenant seulement les premiers termes de V, donné par (9), nous pouvons écrire

$$\Delta = \frac{5}{6}V\left(\frac{-P_1^{\text{IV}} + 3P_2'''}{30}\right) - \frac{35}{36}\left(\frac{P_1}{30}\right)^2 + AP_1''' + B,$$

A et B ne contenant pas de dérivée au delà du second ordre.

12. D'après le n° 9, les trois invariants V, Δ, Φ peuvent servir à la formation d'une double suite indéfinie d'invariants, par le moyen desquels tout invariant s'exprime rationnellement. Mais Δ et Φ ne sont pas les plus simples qu'on puisse choisir ; il en existe deux autres qui ne contiennent pas de dérivée au delà du troisième ordre. C'est ce que je vais faire voir.

La voie qui va être suivie pour obtenir le premier de ces invariants donne aussi l'invariant V ; elle s'applique aux équations de tous les ordres.

Soit l'équation

$$(12) \qquad z'' = gz.$$

En faisant $y = z^3$, on en déduit, pour y, l'équation suivante :

$$(13) \qquad y^{\text{IV}} - 10gy'' - 10g'y' + 3(3g^2 - g'')y = 0.$$

Si z_1 et z_2 sont deux intégrales de (12), distinctes entre elles, on a, pour (13), les quatre intégrales

$$z_1^3, \quad z_1^2 z_2, \quad z_1 z_2^2, \quad z_2^3.$$

Ainsi l'équation (13) est le type de l'équation du quatrième ordre ayant quatre intégrales satisfaisant aux relations

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4}.$$

En d'autres termes, à l'équation (13) est attachée la *cubique gauche*. Comparée à l'équation générale, privée du second terme, la forme (13)

donne lieu aux relations

$$3p_2 = -5g, \qquad 2p_3 = -5g', \qquad p_4 = 3(3g^2 - g'');$$

d'où, par élimination de g,

$$(14) \qquad 3p'_2 - 2p_3 = 0, \qquad p_4 - \frac{6}{5}p'_3 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 p_2^2 = 0.$$

Ces deux relations (14) peuvent être considérées comme les équations différentielles des cubiques gauches.

13. Voici, en manière de digression, un exemple de l'équation (13). Prenons

$$g = n(n+1)\wp,$$

les notations étant les mêmes qu'au n° 6. Nous avons ainsi l'équation

$$y^{\text{IV}} - 10n(n+1)\wp y'' - 10n(n+1)\wp' y' + \frac{3}{2}n(n+1)\left[n(n+1)\frac{g_2}{2} + (n+2)(n-1)\wp''\right]y = 0.$$

Cette dernière est, d'après notre analyse, une transformée de l'équation de Lamé dans un cas particulier

$$z'' = n(n+1)\wp z.$$

Elle est donc intégrable quand n est un nombre entier. Mais l'équation en z est aussi intégrable pour $n = \frac{1}{2}$ (voyez plus loin, n° 47). Ce cas donne le résultat suivant :

L'équation

$$y^{\text{IV}} - \frac{15}{2}\wp(u)y'' - \frac{15}{2}\wp'(u)y' + \frac{9}{32}\left[\frac{3}{2}g_2 - 5\wp''(u)\right]y = 0$$

a pour intégrale générale

$$y = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \mathfrak{F}\left[\wp\left(\frac{u}{2}\right)\right],$$

$\mathfrak{F}$ étant un polynome du troisième degré à coefficients arbitraires.

14. Revenons aux équations (14), dont la première est $v = 0$. La seconde, tout en n'ayant pas un invariant pour premier membre, va servir à en former un. Soit ω ce premier membre, et soit Ω la même

quantité formée avec les lettres P, en supposant qu'on envisage la même substitution qu'au n° 11. Je vais chercher la liaison entre ω et Ω.

De la formule (10), ainsi que de la relation $v = \frac{1}{\mu^3}V$, je déduis les suivantes :

$$\frac{dp_2}{dx} = \frac{1}{\mu^3}\left(\frac{dP_2}{dX} - 2\lambda P_2 + \ldots\right),$$

$$p_3 = \frac{1}{\mu^3}\quad(P_3 - 3\lambda P_2 + \ldots),$$

$$\frac{dp_3}{dx} = \frac{1}{\mu^4}\left(\frac{dP_3}{dX} - 3\lambda P_3 - 3\lambda\frac{dP_2}{dX} + \ldots\right),$$

$$\omega = \frac{1}{\mu^4}\left(\Omega + \frac{18}{5}\lambda\frac{dP_2}{dX} + \ldots\right).$$

Dans ces formules, on a négligé des restes : dans la dernière, le reste ne contient manifestement aucune dérivée des quantités P. Il en sera tout autant du reste R, que l'on obtiendra en écrivant la dernière égalité sous cette autre forme

$$\omega = \frac{1}{\mu^4}(\Omega + 36\lambda V + R).$$

Or la propriété exprimée par les relations (14) est invariante. Donc le système des équations $\omega = 0$, $v = 0$ doit se changer en $\Omega = 0$, $V = 0$. Donc $R = 0$ doit se réduire à une combinaison de ces dernières. Mais, ne contenant aucune dérivée, R est, par suite, identiquement nul. La liaison cherchée est donc

$$\omega = \frac{1}{\mu^4}(\Omega + 36\lambda V).$$

En dérivant les deux membres de $v = \frac{1}{\mu^3}V$, on obtient

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\mu^4}\left(\frac{dV}{dX} - 3\lambda V\right).$$

En conséquence,

$$\omega + 12\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\mu^4}\left(\Omega + 12\frac{dV}{dX}\right).$$

J'ai donc ainsi trouvé un invariant nouveau. Pour mettre les notations d'accord avec celles de la théorie des courbes gauches, je le désignerai par $42 s_7$; l'indice 7 rappelle qu'il est du septième ordre

par rapport aux intégrales. Voici son expression pour l'équation sans second terme :

$$(15)\qquad 42 s_7 = p_4 - 2p'_3 + \frac{6}{5}p''_2 - \frac{81}{25}p_2^2.$$

On aura l'expression générale par l'emploi des formules (8). Il est inutile de la transcrire; on remarquera seulement que le terme de l'ordre le plus élevé est $-\frac{1}{5.6.7}P'''_1$.

Avec s_7 et v on peut former une suite indéfinie d'invariants, analogue à la suite H, H_1, H_2, ... Les ordres, marqués par les indices, croissent constamment d'une unité, les poids de quatre unités :

$$s_8 = \frac{1}{8}\left(vs'_7 - \frac{4}{3}v's_7\right),\quad s_9 = \frac{1}{9}\left(vs'_8 - \frac{8}{3}v's_8\right),\quad s_{10} = \frac{1}{10}\left(vs'_9 - \frac{12}{3}v's_9\right),\quad \ldots.$$

Dans l'invariant S_n, le terme de l'ordre le plus élevé est

$$-\frac{1}{5.6\ldots n}V^{n-7}P_1^{(n-4)}.$$

15. Les invariants Δ et S_n sont tous deux du poids 8. En les combinant linéairement, nous formerons celui-ci : $\frac{1}{35}\Delta - \frac{4}{3}S_8$, qui, d'après le n° 11, ne contient plus P_1^{IV}. On y trouve un terme du second degré en P'''_1, qu'on peut faire disparaître en retranchant $\frac{7}{36}S_7^2$. Nous obtenons de la sorte l'invariant

$$(16)\qquad T_7 = \frac{1}{35}\Delta - \frac{4}{3}S_8 - \frac{7}{36}S_7^2;$$

il ne contient pas de dérivée au-dessus du troisième ordre. Les dérivées P'''_2 et P'''_1, seules dérivées du troisième ordre qui y figurent, y entrent linéairement. Enfin le terme en P'''_2 a pour coefficient

$$-\frac{1}{2.5.6.7}V.$$

Avec t_7 et v on forme, de même qu'avec s_7 et v, une suite indéfinie d'autres invariants

$$t_8 = \frac{1}{8}\left(vt'_7 - \frac{8}{3}v't_7\right),\quad t_9 = \frac{1}{9}\left(vt'_8 - \frac{12}{3}v't_8\right),\quad t_{10} = \frac{1}{10}\left(vt'_9 - \frac{16}{3}v't_9\right),\quad \ldots.$$

L'invariant T_n est linéaire par rapport à $P_2^{(n-4)}$ et $P_1^{(n-4)}$, seules déri-

vées d'ordre $(n-4)$ qui y figurent. Le coefficient de $P_2^{(n-4)}$ est égal à

$$-\frac{1}{2.5.6\ldots n}V^{n-6}.$$

16. Soit un invariant exprimé par s_7, t_7, s_8, t_8, ... Sa dérivée, prise par rapport à la variable ξ (n° 9), s'exprime facilement de la même manière. Par exemple, l'équation (16) donne l'expression de δ. On en déduit

$$8t_8 = \frac{1}{35}\left(v\delta' - \frac{8}{3}v'\delta\right) - 12s_9 - \frac{28}{9}s_7s_8,$$

relation qui fournit le numérateur $\left(v\delta' - \frac{8}{3}v'\delta\right)$ de $\frac{d\Delta}{d\xi}$. En conséquence, les numérateurs des invariants H, H_1, ... sont exprimables en fonction entière de v, s_7, s_8, ..., t_7, t_8, ...

En calculant l'invariant absolu $v^{-\frac{3}{4}}s_7$ sur l'équation réduite, nous obtenons

$$\frac{42s_7}{(30v)^{\frac{4}{3}}} = K - \frac{3}{5}\frac{d^2H}{d\xi^2} - \frac{9}{25}H^2.$$

Nous avons donc aussi le moyen d'exprimer le numérateur de K par les mêmes invariants, et, par suite, les numérateurs de K_1, K_2, ...

Donc tout invariant relatif, multiplié par une puissance convenable de v, est exprimable en fonction entière des invariants *fondamentaux* v, s_7, t_7, s_8, t_8, ...

17. La construction des invariants fondamentaux tombe en défaut si v est identiquement nul. Dans ce cas particulier, il est tout naturel de procéder absolument de même qu'au n° 6, mais en prenant s_7, au lieu de v, pour base de la construction. Si s_7 et v sont nuls tous deux, c'est alors le cas où l'équation peut être réduite à la forme (13), et il n'existe plus aucun invariant.

Arrêtons-nous sur le cas où v est identiquement nul, mais non s_7. On peut, au lieu de s_7, prendre la combinaison

$$W = \frac{1}{6}\left(\frac{dV}{dX} - 7S_7\right),$$

qui ne contient plus de dérivée du troisième ordre, et reproduit

$-\frac{7}{6}S_7$ dès que V est identiquement nul. Cette combinaison W est alors un invariant dans ce cas particulier. Pour l'équation privée du second terme, on a

$$-36w = p_4 - \frac{6}{5}p'_3 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 p_2^2.$$

En prenant pour point de départ une équation complète, où V est nul, et posant

$$\frac{d\xi}{dX} = (-36W)^{\frac{1}{4}}, \qquad Y = \eta W^{-\frac{3}{8}} e^{-\int P_1 dX},$$

on obtiendra la transformée réduite

$$(17) \qquad \frac{d^4\eta}{d\xi^4} + 2J\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\frac{dJ}{d\xi}\frac{d\eta}{d\xi} + \left(1 + \frac{3}{5}\frac{d^2J}{d\xi^2} + \frac{9}{25}J^2\right)\eta = 0.$$

Le numérateur de J est

$$\Theta = \frac{5}{4}WW'' - \frac{45}{42}W'^2 - 6(P_2 - P_1^2 - P'_1)W^2,$$

et l'on a

$$J = -\frac{\Theta}{12(-W)^{\frac{5}{2}}}.$$

La quantité Θ n'est invariante que si V est nul; mais il existe un invariant du cas général qui se réduit à Θ si V devient nul. On l'obtient en changeant de variable de manière à rendre s_7 constant. Son expression par les invariants fondamentaux est la suivante :

$$\Theta = \frac{1}{v^2}\left[2\delta\left(\frac{7}{6}s_7\right)^2 + \frac{5.7^2}{2}s_9 s_7 - \frac{5.7^2}{2}s_8^2\right],$$

d'où l'on peut chasser δ par l'emploi de la formule (16).

18. Les deux premiers invariants absolus qu'on puisse former, dans le cas général, sont $\frac{s_7^3}{v^4}$ et $\frac{t_7^3}{v^8}$. Dans le cas où v est nul, on a pour premier invariant absolu $\frac{\theta^2}{w^5}$.

Quand ces invariants absolus sont des constantes, l'équation réduite est à coefficients constants; la courbe attachée est ce que j'appelle une courbe *anharmonique*.

Quand, v étant nul, le premier invariant absolu est constant, l'équa-

tion réduite manque du premier et du troisième terme. L'équation caractéristique est donc bicarrée : soient $\pm\alpha$, $\pm\beta$ ses racines. Les intégrales sont $e^{\pm\alpha\xi}$, $e^{\pm\beta\xi}$. Donc quatre intégrales satisfont à la condition $\eta_1\eta_4 = \eta_2\eta_3$. De là une proposition de géométrie : *toute courbe anharmonique, dont les tangentes appartiennent à un même complexe linéaire, est située sur une surface du second degré.* On verra plus loin (n° 26) une réciproque de cette proposition.

19. La dualité géométrique s'introduit par la considération de l'équation *adjointe*, due à Lagrange.

Soit l'équation

$$y^{\text{IV}} + 6p_2 y'' + 4p_3 y' + p_4 y = 0;$$

son adjointe est

$$z^{\text{IV}} + 6(p_2 z)'' - 4(p_3 z)' + p_4 z = 0,$$

ou bien, développée,

$$z^{\text{IV}} + 6p_2 z'' - 4(p_3 - 3p_2')z' + (p_4 - 4p_3' + 6p_2'')z = 0.$$

En désignant par c_1, c_2, c_3, c_4 des constantes arbitraires, on a, pour z, l'expression suivante par les intégrales y :

$$z = (c_1 y_2 y_3' y_4'').$$

Ainsi les courbes attachées aux deux équations adjointes se correspondent dans la dualité géométrique.

En rangeant dans une même classe toutes les équations susceptibles d'être ramenées à une même forme réduite, ou, ce qui revient au même, à qui est attachée une seule et même courbe, on voit que les adjointes des équations d'une seule classe forment elles-mêmes une seule classe. Ces deux classes sont *adjointes* l'une à l'autre.

Les invariants d'une équation sont également invariants pour l'adjointe.

En faisant le calcul de l'adjointe pour l'équation (17), on retrouve cette équation elle-même. Ainsi, *chaque classe, dont l'invariant v est nul, est à elle-même sa propre adjointe.* Sous forme géométrique, voici la même proposition : *les lignes droites qui, faisant partie d'un complexe linéaire, enveloppent une courbe, constituent une figure corrélative à elle-même.*

D'après la proposition du n° 18, *toute courbe anharmonique*

dont les tangentes appartiennent à un même complexe linéaire, est arête de rebroussement d'une développable circonscrite à une surface du second degré [1].

20. Faisons maintenant le calcul de l'adjointe pour l'équation générale, mais réduite :

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + 2\mathrm{H}\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\xi} - 1\right)\frac{d\eta}{d\xi} + \mathrm{K}\eta = 0.$$

Nous obtenons

$$\frac{d^4\zeta}{d\xi^4} + 2\mathrm{H}\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} + 2\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\xi} + 1\right)\frac{d\zeta}{d\xi} + \mathrm{K}\zeta = 0.$$

Pour réduire cette dernière, il suffit de changer la variable indépendante en prenant $\xi_1 = -\xi$, pour cette variable. Donc, dans le passage d'une équation à son adjointe, les invariants H et K se conservent, tandis que V se reproduit, sauf le signe. Ce dernier fait se vérifie aisément par l'expression de V ; on reconnaîtra de même que S_7 se reproduit sans altération. Conséquemment, S_n se reproduit au facteur $(-1)^{n-1}$ près.

Le dénominateur de H étant la puissance $\frac{8}{3}$ de V, et H se reproduisant, il en résulte que le numérateur de H se reproduit sans altération. C'est l'invariant Δ. A cause de la formule (16), on conclut que T_7 se modifie et se change en $T_7 + \frac{8}{3}S_8$. Par suite, T_n se change en $(-1)^{n-1}\left(T_n + \frac{8}{3}S_{n+1}\right)$.

Grâce à ces observations, il sera facile de trouver, pour tout invariant, l'expression de son adjoint. Il suffit, à cet effet, de l'exprimer par les invariants fondamentaux, et d'y faire les changements dont je viens de parler.

21. J'ai terminé ici la théorie générale que j'avais en vue de traiter, et j'aborde les applications. Pour commencer ces applications,

---

(1) Les deux surfaces du second degré, sur l'une desquelles est l'arête de rebroussement, tandis que la développable est circonscrite à l'autre, ont en commun un quadrilatère gauche. Les tangentes communes aux deux surfaces se partagent en deux congruences distinctes. Ce cas remarquable de décomposition a été trouvé par M. Archer Hirst, qui me l'a communiqué verbalement, il y a quelques années.

je reprends l'analyse traitée dans le n° 5 et suivie d'un exemple dans le n° 6. J'ai considéré, en cet endroit, une équation dont l'invariant v est nul, et j'ai construit une transformée qui est généralement du cinquième ordre. Dans l'exemple adopté, cette transformée manquait du dernier terme et s'abaissait ainsi au quatrième ordre. Je vais chercher le type général des équations qui donnent lieu à cette circonstance.

La transformée a pour premier membre

$$Z = (z''' + 6p_2 z' + 4p_3 z)'' + 6p_2(z''' + 6p_2 z' + 4p_3 z) - 4p_4 z' - 2p'_4 z.$$

Elle manque du dernier terme sous la condition

$$4p''_3 + 24p_2 p_3 - 2p'_4 = 0.$$

On a d'ailleurs, par hypothèse,

$$2p_3 - 3p'_2 = 0.$$

Désignant par g une fonction arbitraire, je satisfais à la dernière relation si je prends

$$p_2 = -\frac{1}{3}g, \qquad p_3 = -\frac{1}{2}g'.$$

La première relation donne alors

$$p'_4 = -g''' + 2gg'.$$

En intégrant, et désignant la constante d'intégration par $-\frac{1}{4}c^2$, j'ai donc

$$p_4 = g^2 - g'' - \frac{1}{4}c^2.$$

Ainsi le type général des équations dont il s'agit est le suivant :

$$(18) \qquad y^{\text{IV}} - 2gy'' - 2g'y' + \left(g^2 - g'' - \frac{1}{4}c^2\right)y = 0.$$

Calculant Z et faisant $z' = \zeta$, j'ai la transformée

$$(19) \qquad \zeta^{\text{IV}} - 4g\zeta'' - 6g'\zeta' + (c^2 - 2g'')\zeta = 0.$$

Cette équation (19) ne contenant, dans ses coefficients, qu'une seule fonction g, n'est pas susceptible d'être transformée, par les substitutions (2), en une équation quelconque. La classe, dont elle est un type, possède, en effet, une propriété invariante, provenant de ce fait

que les coordonnées de la droite dans l'espace sont liées par une relation quadratique. Pour parler le langage de l'algèbre, disons que les six déterminants $\zeta = (y_i y_j'')$, formés avec quatre intégrales de (18), sont liés par une relation quadratique. D'après l'identité $v = 0$, ils sont liés aussi par une relation linéaire, et se réduisent ainsi à *cinq*, distincts entre eux. Mais, l'équation transformée s'étant abaissée au quatrième ordre, un de ces déterminants ζ est nul. Donc, la relation quadratique existe entre les quatre autres. Donc, *les intégrales de l'équation* (19) *sont liées par une relation quadratique à coefficients constants.*

Pour préciser cette relation, posons

$$\zeta_{ij} = y_i y_j'' - y_j y_i'' \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Nous avons

$$\zeta_{12}\zeta_{34} - \zeta_{13}\zeta_{24} + \zeta_{14}\zeta_{23} = 0.$$

Supposons les y choisis de telle sorte que ζ_{12} soit nul. Il reste

$$\zeta_{13}\zeta_{24} = \zeta_{14}\zeta_{23}.$$

L'équation (18) peut s'écrire ainsi

$$\left[y'' - \left(g - \frac{1}{2}c\right)y\right]'' - \left(g + \frac{1}{2}c\right)\left[y'' - \left(g - \frac{1}{2}c\right)\right] = 0.$$

Elle admet donc les intégrales φ_1, φ_2 de l'équation du second ordre

$$(20) \qquad \varphi'' = \left(g - \frac{1}{2}c\right)\varphi.$$

Comme on ne change pas (18) par le changement de c en $-c$, elle admet aussi les intégrales ψ_1, ψ_2 de cette autre

$$(21) \qquad \psi'' = \left(g + \frac{1}{2}c\right)\psi.$$

Si nous prenons

$$y_1 = \varphi_1, \qquad y_2 = \varphi_2, \qquad y_3 = \psi_1, \qquad y_4 = \psi_2,$$

nous aurons

$$\zeta_{12} = 0, \quad \zeta_{34} = 0, \quad \zeta_{13} = c\varphi_1\psi_1, \quad \zeta_{14} = c\varphi_1\psi_2, \quad \zeta_{23} = c\varphi_2\psi_1, \quad \zeta_{24} = c\varphi_2\psi_2.$$

Ainsi *l'équation* (19) *a pour intégrales les produits de celles des équations* (20) *et* (21), *et l'équation* (18) *a, pour intégrales, celles mêmes des équations* (20) *et* (21).

Il n'est pas sans intérêt de remarquer la conséquence suivante :

$$\varphi\psi'' - \psi\varphi'' = c\varphi\psi;$$

$$(22) \qquad c\int \varphi\psi\, dx = \varphi\psi' - \psi\varphi'.$$

22. Pour l'exemple choisi au nº 6, les équations (20) et (21) sont comprises dans la forme ambiguë

$$\varphi'' = \left[n(n+1)\,p(u) \pm \frac{1}{2}c\right]\varphi,$$

où, suivant l'usage, je désigne par u la variable indépendante. La constante α, de l'équation (6), s'exprime ainsi :

$$\alpha = \frac{n^2(n+1)^2}{12}g_2 - \frac{1}{4}c^2.$$

Prenons, en particulier, ce cas :

$$n = \frac{3}{2}, \qquad c = \sqrt{3g_2}.$$

Nous avons pour φ les intégrales suivantes (nº 47) :

$$\varphi_1 = p'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[p\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}\right],$$

$$\varphi_2 = p'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[p^3\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{\sqrt{3g_2}}{2}p^2\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{1}{3}g_3\right].$$

En changeant le signe de $\sqrt{3g_2}$, on a ψ_1 et ψ_2. Il en résulte pour y la forme

$$y = p'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\mathcal{F}\left[p\left(\frac{u}{2}\right)\right],$$

où $\mathcal{F}$ est un polynome arbitraire du troisième degré. Nous avons déjà trouvé cette intégrale au nº 13 pour une équation formée par un autre moyen. En effectuant le calcul, on retrouve bien ici cette même équation.

23. Les propriétés de l'équation (19) ont été établies d'une manière indirecte. Il convient d'établir directement que cette équation est le type de toute équation du quatrième ordre entre les intégrales de laquelle existe une relation quadratique.

Soit une telle équation, et supposons la relation quadratique réductible à la forme

$$Y_1 Y_4 = Y_2 Y_3.$$

Prenant pour nouvelle variable x et pour nouvelle inconnue y,

$$x = \frac{Y_3}{Y_4}, \qquad y = \frac{Y}{Y_4},$$

j'ai une transformée admettant les solutions 1, x, $\frac{Y_1}{Y_4}$, $\frac{Y_2}{Y_4}$. En désignant $\frac{Y_2}{Y_4}$ par α, j'ai, pour $\frac{Y_1}{Y_4}$, l'expression αx. Ainsi la transformée admet les solutions 1, x, α, αx. Considérons les deux équations

$$y'' = 0, \qquad y'' = \frac{\alpha''}{\alpha'} y'.$$

La première admet les solutions 1, x; la seconde 1, α. Les quatre produits des intégrales de la première par les intégrales de la seconde sont 1, x, α, αx, c'est-à-dire les intégrales de la transformée. Revenant à la proposée et transformant en même temps, d'une manière convenable, les deux équations du second ordre, je peux conclure ainsi : *toute équation du quatrième ordre dont les intégrales sont liées par une relation quadratique, à discriminant différent de zéro, a pour intégrales les produits des intégrales de deux équations du second ordre* [1].

24. Soient deux équations du second ordre, avec la même variable indépendante

$$\frac{d^2 A}{dX^2} + 2 P_1 \frac{dA}{dX} + P_2 A = 0, \qquad \frac{d^2 B}{dX^2} + 2 Q_1 \frac{dB}{dX} + Q_2 B = 0.$$

Si l'on y change les deux inconnues A, B de manière à faire disparaître le second terme dans chacune, les seconds coefficients deviennent respectivement $P_2 - P_1^2 - P_1'$ et $Q_2 - Q_1^2 - Q_1'$. L'égalité de ces deux quantités exprime donc que les intégrales A sont proportionnelles aux intégrales B. Cette propriété étant indépendante de X, on voit

(1) Voyez, à ce sujet, une note de M. Goursat intitulée : *Sur une classe d'équations linéaires du quatrième ordre* (*Comptes rendus*, t. XCVII, 1883, p. 31).

que la combinaison

$$F = Q_2 - Q_1^2 - Q_1' - (P_2 - P_1^2 - P_1')$$

est un invariant des équations simultanées. Si donc cet invariant n'est pas nul, on pourra changer la variable indépendante de manière à rendre cet invariant égal à un nombre à volonté. Je laisse ce nombre indéterminé et le désigne par c. Si, en même temps, je change les inconnues pour faire disparaître les seconds termes, j'obtiens la forme réduite

$$(23) \qquad \frac{d^2 a}{dx^2} = \left(g + \frac{1}{2}c\right)a, \qquad \frac{d^2 b}{dx^2} = \left(g - \frac{1}{2}c\right)b.$$

La lettre g désigne une fonction de la variable, invariant absolu. Faisons maintenant

$$y = ab.$$

Les différentiations successives donnent

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{db}{dx} + b\frac{da}{dx},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2\frac{da}{dx}\frac{db}{dx} + 2gab,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2} - 2gy\right) = 2g\frac{dy}{dx} + c\left(a\frac{db}{dx} - b\frac{da}{dx}\right),$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2 y}{dx^2} - 2gy\right) - 2\frac{d}{dx}\left(g\frac{dy}{dx}\right) = -c^2 ab.$$

Donc enfin y satisfait à l'équation

$$(24) \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} - 4g\frac{d^2 y}{dx^2} - 6\frac{dg}{dx}\frac{dy}{dx} + \left(c^2 - 2\frac{d^2 g}{dx^2}\right)y = 0.$$

D'après la proposition dont l'énoncé termine le n° 23, nous pouvons conclure ainsi : *toute équation du quatrième ordre dont les intégrales sont liées par une relation quadratique est réductible par une substitution de la forme* (1) *au type* (24). *La constante c est à volonté, sauf zéro, si le discriminant de la relation quadratique n'est pas nul.*

En complétant, d'une manière bien aisée, l'analyse précédente, on peut ajouter que, *si le discriminant est nul, la forme* (24) *subsiste; mais la constante c est nulle.*

Voici le problème qui se présente maintenant : *exprimer en fonc-*

tion des coefficients la condition sous laquelle une équation est réductible à la forme (24); trouver la substitution qui opère cette réduction, et la fonction g.

25. Pour résoudre ce problème, il s'offre une voie indirecte que je ne suivrai pas, mais que j'indiquerai néanmoins. C'est une conséquence de la relation (22).

Envisageons le déterminant formé avec trois fonctions et leurs premières et secondes dérivées, en choisissant, pour ces fonctions, $\varphi_1\psi_1$, $\varphi_2\psi_1$, $\varphi_1\psi_2$. Tenant compte de ce que les φ et ψ satisfont aux équations (20) et (21), on obtient, par un calcul facile, l'expression suivante de ce déterminant, à un facteur constant près :

$$[\varphi_1\psi_1(\varphi_2\psi_1)'(\varphi_1\psi_2)''] = \psi_1\varphi_1' - \varphi_1\psi_1'.$$

D'après (22), ceci est l'intégrale de $c\varphi_1\psi_1$.

On conclut de là que l'équation adjointe de (19) est vérifiée par les intégrales des solutions de l'équation (19) elle-même. Cette propriété se reconnaît d'ailleurs avec facilité sur l'équation. Effectivement, son adjointe est

$$\eta^{\text{IV}} - 4g\eta'' - 2g'\eta' + c^2\eta = 0.$$

En dérivant cette dernière et faisant $\eta' = \zeta$, on retrouve l'équation (19).

Soit maintenant une équation de la forme générale (1). Avec trois de ses intégrales on obtient une intégrale de l'adjointe ainsi

$$Z = [Y_1 Y_2' Y_3''] e^{4\int P_1 dX}.$$

En employant la substitution générale (2), on pourra écrire

$$Z = u^3 \mu^3 \left[y_1 \frac{dy_2}{dx} \frac{d^2y_3}{dx^2} \right] e^{4\int P_1 dX}.$$

Supposons maintenant que la substitution envisagée transforme l'équation proposée en (24). Nous aurons alors

$$Z = u^3 \mu^3 e^{4\int P_1 dX} \int y\, dx = u^3 \mu^3 e^{4\int P_1 dX} \int \frac{\mu}{u} Y\, dX.$$

En différentiant les deux membres de cette égalité, on peut conclure ainsi :

Toute équation du quatrième ordre dont les intégrales sont liées par une relation quadratique est caractérisée par la propriété suivante :

Soient $\Phi(Z) = 0$ *son adjointe, et* $F(Y) = 0$ *la transformée de cette adjointe par la substitution*

$$Y = AZ' + BZ,$$

où A *et* B *sont des fonctions arbitraires : Il est possible de choisir* A *et* B *de telle sorte que* $F(Y) = 0$ *soit précisément l'équation proposée.*

26. L'emploi de cette dernière proposition mène, sans difficulté, aux équations d'où dépend la solution du problème; mais d'une manière moins simple que la méthode ci-après.

Soit une équation, sans second terme, et à variable X

$$Y^{\text{IV}} + 6P_2 Y'' + 4P_3 Y' + P_4 Y = 0,$$

qu'il s'agit de transformer en l'équation (24). Je poserai, comme au n° 11,

$$\frac{dx}{dX} = \mu, \qquad \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dX} = \lambda.$$

Je dénoterai par des accents les dérivées prises par rapport à X. Dans l'équation (24), on a

$$p_2 = -\frac{2}{3}g, \qquad p_3 = -\frac{3}{2}\frac{dg}{dx}, \qquad p_4 = c^2 - 2\frac{d^2 g}{dx^2}.$$

J'en conclus d'abord

$$30v = 3\frac{dp_2}{dx} - 2p_3 = \frac{dg}{dx} = \frac{1}{\mu}g'.$$

Avant de poursuivre, observons cette conséquence : *toute équation du quatrième ordre dont les intégrales sont liées par une relation quadratique, et dont l'invariant* v *est nul, est susceptible d'être transformée en une équation à coefficients constants.* En effet, l'hypothèse $v = 0$ exige que g soit une constante. De là une réciproque pour la proposition énoncée au n° 18 : *toute courbe située sur une surface du second degré, et dont les tangentes appartiennent à un même complexe linéaire, est anharmonique.*

Le cas où v est nul doit être désormais écarté.

De la relation précédente, jointe à $V = \mu^3 v$, je déduis celle-ci :

$$\text{(I)} \qquad g' = \frac{30V}{\mu^2}.$$

C'est une première équation entre les inconnues g, μ. L'application de la formule (10) me donne cette autre :

$$\text{(II)} \qquad -4g = \frac{1}{\mu^2}\left(6P_2 - 5\lambda' + \frac{5}{2}\lambda^2\right),$$

à quoi il faut joindre

$$\text{(III)} \qquad \lambda = \frac{\mu'}{\mu}.$$

J'ai donc ainsi trois équations à trois inconnues, g, μ, λ. En prenant, pour μ, une solution de ces équations, et déterminant y par la formule $y = Y\mu^{\frac{3}{2}}$, on aura une transformée telle que :

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^4y}{dx^4} - 4g\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dg}{dx}\frac{dy}{dx} + \gamma y = 0.$$

Dans le problème actuel, γ doit être $c^2 - 2\frac{d^2g}{dx^2}$. De là une nouvelle équation, qui entraîne une condition entre les données. J'aurai cette équation en calculant l'invariant s_7. Voici son expression :

$$42s_7 = c^2 - \frac{36}{25}g^2 + \frac{1}{5}\frac{d^2g}{dx^2}.$$

J'ai d'ailleurs :

$$\frac{dg}{dx} = \frac{30V}{\mu^3}, \qquad \frac{d^2g}{dx^2} = \frac{30}{\mu^4}(V' - 3\lambda V).$$

En conséquence, la nouvelle équation du problème est :

$$\text{(IV)} \qquad c^2 - \frac{36}{25}g^2 = \frac{6}{\mu^4}(7S_7 - V' + 3\lambda V).$$

Laissons d'abord cette dernière, et voyons comment se résout le système des trois premières équations. Pour ce but, on doit différentier l'équation (II), et chasser g'; μ^2 disparaît, et il reste :

$$\text{(V)} \qquad \lambda'' - 3\lambda\lambda' + \lambda^3 + \frac{12}{5}P_2\lambda - \frac{6}{5}(P'_2 + 20V) = 0.$$

C'est de cette équation, à la seule inconnue λ, que dépend la réduction à la forme (A). Cette équation se ramène à la forme linéaire si l'on

fait $\lambda = -\frac{\rho'}{\rho}$, c'est-à-dire $\rho = \frac{1}{\mu}$. La transformée est effectivement

$$\rho''' + \frac{12}{5}P_2\rho' + \frac{6}{5}(P_2' + 20V)\rho = 0.$$

Cette équation, du troisième ordre, que nous notons en passant, est, comme on voit, un *covariant* de l'équation proposée.

Prenons l'équation (IV), différentions les deux membres et remplaçons g et g' par les valeurs (I) et (II). De cette façon, μ disparaît, et nous obtenons une nouvelle équation en λ :

$$\text{(VI)} \qquad \lambda' - \lambda^2 + \frac{V' - 4S_7}{3V}\lambda + \frac{7S_7' - V''}{21V} - \frac{36}{35}P_2 = 0.$$

Il est à noter que cette dernière devient linéaire, elle aussi, avec l'inconnue ρ. Opérons différemment sur (IV) en y remplaçant g par son expression (II) et nous avons

$$\text{(VII)} \qquad c^2\mu^4 = 6(7S_7 - V' + 3\lambda V) + \left(\frac{3}{10}\right)^2\left(6P_2 - 5\lambda' + \frac{5}{2}\lambda^2\right)^2.$$

Cette relation donne μ sans intégration, après qu'on a trouvé λ. Enfin la relation (II) donnera g.

La solution du problème dépend donc des équations simultanées (V) et (VI).

27. Écrivons les équations simultanées (V), (IV) sous la forme abrégée

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{cases} \lambda' - \lambda^2 + A\lambda + B = 0, \\ \lambda'' - 3\lambda\lambda' + \lambda^3 + C\lambda + D = 0, \end{cases}$$

différentions la première, éliminons λ'', puis éliminons λ' entre la résultante et la première; nous aurons ainsi cette valeur de λ :

$$\lambda = \frac{B' - D - AB}{C + A^2 + B - A'}.$$

En la substituant dans la première, nous aurons l'équation de condition.

Le calcul des deux termes de la fraction qui représente λ est un peu long; mais on y trouve un guide sûr, si l'on a soin de grouper les termes de manière à faire apparaître les invariants fondamentaux.

A cet effet, on chasse P_2 au moyen de l'invariant Δ, qu'on fait disparaître ensuite. Dans ce calcul, on voit s'introduire les deux invariants suivants :

$$\text{(IX)} \quad \left\{ \begin{aligned} M &= S_8 + \ \ 2T_7 \ + \frac{1}{6}S_7^2, \\ N &= T_8 + \frac{4}{3}S_7T_7 - \frac{3}{2}V^4, \end{aligned} \right.$$

et l'on obtient finalement, pour λ, l'expression :

$$\text{(X)} \qquad \lambda = \frac{V' - 7S_7}{3V} + \frac{2N}{VM}.$$

Sans nous préoccuper, pour le moment, de l'équation de condition, calculons les deux autres inconnues.

La première équation (VIII) donne

$$6P_2 - 5\lambda' + \frac{5}{2}\lambda^2 = 6P_2 + 5B + 5A\lambda - \frac{5}{2}\lambda^2,$$

sans différentiation. En y mettant la valeur (X) de λ, nous obtenons

$$6P_2 - 5\lambda' + \frac{5}{2}\lambda^2 = -\frac{10}{V^2M^2}(M^2T_7 - MNS_7 + N^2).$$

Pour abréger, écrivons

$$\text{(XI)} \quad \left\{ \begin{aligned} M^2T_7 - MNS_7 + N^2 &= \Phi, \\ \Phi^2 + 4M^3NV^4 &= \Psi. \end{aligned} \right.$$

Les relations (VII), (II) nous donnent :

$$\text{(XII)} \qquad c^2\mu^4 = \frac{9\Psi}{V^4M^4}, \qquad g\mu^2 = \frac{5\Phi}{2V^2M^2}.$$

28. Pour avoir l'équation de condition, au lieu de substituer λ dans la première équation (VIII), nous pouvons différentier logarithmiquement l'expression de μ, et égaler $\frac{\mu'}{\mu}$ à l'expression (X). De cette façon, nous obtenons l'équation de condition sous la forme suivante :

$$\text{(XIII)} \qquad \frac{d}{dX}\log\frac{\Psi}{M^4V^{\frac{16}{3}}} = \frac{4}{3}\,\frac{6N - 7MS_7}{VM}.$$

Elle est explicitement sous forme invariante; car la quantité sous le signe logarithmique est un invariant absolu.

L'équation (XIII) admet la solution particulière $\Psi = 0$. Cette condition répond à l'hypothèse $c = 0$, comme le montre la première équation (XII).

Supposons d'abord c différent de zéro. Les équations du deuxième ordre (23) sont comprises dans la forme ambiguë

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \left(g \pm \frac{1}{2} c\right) z.$$

En revenant à la variable X, on a la transformée

$$\frac{d^2 z}{dX^2} - \lambda \frac{dz}{dX} = \left(g \mu^2 \pm \frac{1}{2} c \mu^2\right) z.$$

Donc, d'après (XII) :

$$\text{(XIV)} \qquad \frac{d^2 z}{dX^2} - \left(\frac{V' - 7 S_7}{3 V} + \frac{2 N}{V M}\right) \frac{dz}{dX} = \frac{5 \Phi \pm 3 \sqrt{\Psi}}{2 V^2 M^2} z.$$

Voici donc la conclusion :

L'égalité (XIII) *exprime la condition pour que les intégrales soient liées par une relation quadratique. Si* Ψ *n'est pas nul, on formera les deux équations du second ordre comprises dans la formule* (XIV); *soient alors* z_1 *une solution de l'une d'elles, et* z_2 *une solution de l'autre. On aura* Y *par la formule*

$$Y = V^{\frac{3}{2}} M^{\frac{3}{2}} \Psi^{-\frac{3}{8}} z_1 z_2.$$

En ce cas, la courbe attachée est sur une surface du second degré, non conique; ou, en d'autres termes, *la relation quadratique a son discriminant différent de zéro.*

Supposons maintenant c nul. On a alors μ par une quadrature, ce qui modifie l'expression de Y, et voici la conclusion :

Si Ψ *est nul, soient* z_1 *et* z_2 *deux intégrales de l'équation* (XIV), *unique en ce cas, ces intégrales étant distinctes ou non. On aura trois intégrales* Y *par la formule*

$$Y = z_1 z_2 V^{-\frac{1}{2}} e^{\int \frac{7 M S_7 - 6 N}{2 V M} dX}.$$

La courbe attachée est sur un cône du second degré; la relation quadratique a son discriminant égal à zéro.

Dans ma théorie des invariants différentiels, j'avais déjà trouvé l'équation $\Psi = 0$, pour celle des courbes tracées sur les cônes du second degré.

Si M est nul, les équations simultanées (VIII) exigent que N soit nul aussi. La seconde équation (VIII) résulte alors de la première, et λ reste indéterminée. Donc, *le système* $M = 0$, $N = 0$ *caractérise le cas où la courbe attachée est l'intersection commune d'une infinité de surfaces du second degré.* Ces équations se trouvent également dans ma théorie des invariants différentiels. Pour ce cas, les formules finales sont en défaut; je reviendrai plus loin sur la solution qui s'y rapporte (n° 37).

29. Si l'on calcule l'équation de condition par la substitution de λ dans la première relation (VIII), on trouve le résultat suivant :

$$\text{(XV)} \quad \begin{aligned} & M(VN' - 4V'N) - N\left(VM' - \frac{8}{3}V'M\right) \\ & \quad - 8M^2S_8 + \frac{2}{3.5.7}M^2\Delta + \frac{1}{6}(MS_7 - 2N)(6N - 7MS_7) = 0. \end{aligned}$$

Tous les termes sont des invariants qu'on peut aisément exprimer par les invariants fondamentaux : Δ au moyen de la formule (16), M et N au moyen de (IX), et les autres ainsi :

$$VN' - 4V'N = 9T_9 + \frac{32}{35}(S_7T_8 + S_8T_7),$$
$$VM' - \frac{8}{3}V'M = 9S_9 + 16T_8 + \frac{8}{3}S_7S_8.$$

Le coefficient du terme en T_9 est, sauf un facteur numérique, l'invariant M. Dans l'équation (XIII), mise sous forme entière, ce coefficient est $M[\Phi(2N - MS_7) + 2M^3V^4]$. Ainsi *l'équation* (XIII) *est compliquée du facteur étranger* $\Phi(2N - MS_7) + 2M^3V^4$.

A son tour, *l'équation* (XV) *est compliquée du facteur* V^3, comme je vais le montrer maintenant. Mais il est impossible de faire disparaître ce facteur en conservant l'expression au moyen des invariants fondamentaux.

30. Le procédé, que j'ai seulement indiqué au n° 4, tout en fournissant l'équation de condition sous une forme illisible, pour ainsi dire, la donne cependant dégagée de tout facteur. C'est ce qu'avant tout nous allons reconnaître.

Prenant, pour point de départ, l'équation

$$y^{IV} + 6p_2y'' + 4p_3y' + p_4y = 0,$$

posant $z = y^2$, différentiant successivement et abrégeant l'écriture par l'emploi des trois combinaisons

$$\begin{aligned} Z &= z^{IV} + 6p_2z'' + 4p_3z' + 2p_4z, \\ Z_1 &= Z' + 4p_4z', \\ Z_2 &= Z_1' + 3p_2Z + 10p_4z'', \end{aligned}$$

on trouve les équations ci-après :

$$\begin{aligned} z &= y^2, \\ z' &= 2yy', \\ z'' &= 2yy'' + 2y'^2, \\ (a)\quad z''' &= 2yy''' + 6y'y'', \\ (b)\quad Z &= 8y'y''' + 6y''^2 + 12p_2y'^2, \\ (c)\quad Z_1 &= 20y''y''' - 24p_2y'y'' + 4(3p_2' - 8p_3)y'^2, \\ Z_2 &= 20y'''^2 - 126p_2y''^2 - 144p_3y'y'' + 4(3p_2'' - 8p_3' + 5p_4 + 9p_2^2)y'^2. \end{aligned}$$

En différentiant cette dernière, chassant y^{IV} par le moyen de l'équation proposée, et $y''y'''$, $y'y'''$, yy''' par le moyen des équations (a), (b), (c), on obtient une nouvelle combinaison linéaire de z et de ses dérivées jusqu'au septième ordre, Z_3, dont l'expression a la forme

$$Z_3 = \alpha_3y''^2 + \beta_3y'y'' + \gamma_3y'^2.$$

Différentiant deux fois en se servant encore des équations (a), (b), (c), on obtient deux équations analogues

$$\begin{aligned} Z_4 &= \alpha_4y''^2 + \beta_4y'y'' + \gamma_4y'^2, \\ Z_5 &= \alpha_5y''^2 + \beta_5y'y'' + \gamma_5y'^2. \end{aligned}$$

Ici, Z_4 et Z_5 sont linéaires par rapport à z et ses dérivées jusqu'aux ordres 8 et 9 respectivement.

Pour que z satisfasse à une équation linéaire du neuvième ordre seulement, la condition est manifestement

$$(\alpha_3\beta_4\gamma_5) = 0.$$

Telle est la relation cherchée, dont le calcul serait encore assez pénible. Mais le poids du premier membre est mis en évidence. En effet, chaque β a son poids supérieur d'une unité à la quantité α de

même indice, et chaque γ de deux unités. En outre, les indices des α sont égaux à leurs poids. Le déterminant est ainsi du poids 15. Le premier membre de l'équation (XV) est du poids 24; la différence est précisément égale au poids du facteur V^3, dont je vais prouver l'existence dans (XV). Ainsi l'équation actuelle est dégagée de ce facteur.

On observera, en outre, que les conditions pour l'existence d'une équation du huitième ordre en z sont

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_4} = \frac{\beta_3}{\beta_4} = \frac{\gamma_3}{\gamma_4}.$$

Par conséquent, le système $M = 0$, $N = 0$ doit concorder avec cet autre : $(\alpha_3\beta_4) = 0$, $(\alpha_3\gamma_4) = 0$. M et N ont les poids 8 et 12, tandis que $(\alpha_3\beta_4)$ et $(\alpha_3\gamma_4)$ ont les poids 8 et 9. Il y a donc une combinaison des équations $M = 0$, $N = 0$ qui, contenant le facteur V, se réduit au poids 9. Cette circonstance, mise en évidence, facilite le calcul.

31. En ordonnant suivant les puissances croissantes de V, on reconnaît que la combinaison $6N + (V' - 7S_7)M$ fournit un polynome divisible par V. Introduisant cette combinaison, je pose

$$6N + (V' - 7S_7)M = R.$$

Pour condenser les formules, j'emploie les lettres minuscules et 'écris simplement s, au lieu de s_7. J'obtiens de la sorte :

$$(\text{XVI})\quad \left\{\begin{aligned} M &= -\frac{1}{18}(v'-s)(v'-4s) + \frac{1}{3}\left(\frac{v''}{7} - \frac{5}{8}s'\right)v - \frac{6}{35}p_2 v^2,\\ R &= -\frac{1}{2.3^2.7}(v'-s)(v''-7s')\\ &\quad + \frac{1}{6}\left[\frac{9}{35}(4s-v')p_2 + \frac{1}{4}\left(\frac{v'''}{7} - s''\right)\right]v - \frac{3}{4.5.7}p'_2 v^2 - 3v^3.\end{aligned}\right.$$

Il est à remarquer que, d'après la formule (X), R est le numérateur de λ; et l'on a

$$\lambda = \frac{R}{M}.$$

L'équation (XV) a été obtenue en mettant l'expression $\frac{VR}{VM}$, au lieu de λ, dans la première relation (VIII). Cette opération a exigé la multiplication par V^2. En mettant, pour λ, l'expression réduite $\frac{R}{M}$,

on n'aura à multiplier que par le seul facteur V, provenant de ce que A et B contiennent ce facteur en dénominateur. Donc, déjà, le premier membre de (XV) contient un facteur V.

En second lieu, cette multiplication par V est superflue; effectivement, l'équation où l'on substitue $\frac{R}{M}$ à λ est la suivante :

$$\lambda' - \lambda^2 + A\lambda + B = 0.$$

La substitution donne

$$\text{(XVII)} \qquad M(R' + AR + BM) - R(M' + R) = 0.$$

D'ailleurs, les expressions de A et B sont les suivantes :

$$\text{(XVIII)} \qquad \left\{ \begin{aligned} VA &= \frac{1}{3}(v' - 4s), \\ VB &= \frac{1}{3.7}(7s' - v'') - \frac{36}{35} p_2 v. \end{aligned} \right.$$

En les comparant au premier terme de chacune des expressions (XVI), on voit que, dans $V(AR + BM)$, le terme indépendant de v disparaît. Donc la multiplication par V est superflue, et l'équation (XV) contient un second facteur V.

Enfin, le résultat de la substitution contient lui-même le facteur v. Effectivement, en ne prenant que le premier terme, on trouve

$$R' + AR + BM = -\frac{1}{2^3.7^2}(v'' - 7s')(4v'' - 7s') + \ldots$$

$$-(M' + R) = -\frac{1}{2^3.7}(v' - 4s)(4v'' - 7s') + \ldots.$$

De là résulte, d'après (XVI), que le premier terme disparaît dans la combinaison (XVII).

Il est donc établi que le premier membre de l'équation (XV) contient le facteur V^3. D'ailleurs, il n'y a pas à chercher d'autre facteur étranger : en effet, le coefficient de $P_2^{(V)}$ est réduit maintenant à M, dans l'équation débarrassée du facteur V^3. Ce coefficient est indécomposable et ne peut disparaître.

32. Nous avons été conduits à cette théorie des équations réductibles au type (24) par l'exemple (7), rencontré au n° 6 de ce mémoire. Ainsi, dans la catégorie générale comprenant les équa-

tions (à variable indépendante u)

$$(25)\qquad y^{\text{IV}} + \mathbf{a}\,\wp(u)y'' + \mathbf{b}\,\wp'(u)y' + [\mathbf{c}\,\wp''(u) + \mathbf{d}]y = 0,$$

figure, en premier lieu, le type

$$(26)\qquad y^{\text{IV}} - 2\mathbf{e}\,\wp(u)y'' - 3\mathbf{e}\,\wp'(u)y' + [\mathbf{d} - \mathbf{e}\,\wp''(u)]y = 0,$$

comme étant explicitement sous la forme (24).

Je vais chercher, dans la catégorie (25), les équations qui, sans être du type (26), sont réductibles à la forme (24). En d'autres termes, le type (26) exclu, je vais chercher, parmi les équations (25), celles dont les intégrales sont liées par une relation quadratique.

Au lieu d'introduire explicitement les coefficients de (25), je prends pour inconnues des coefficients qui en dépendent, et je pose

$$p_2 = 35\,a\,\wp(u), \qquad v = b\,\wp'(u), \qquad s_7 = c\,\wp''(u) + dg_2.$$

D'après les expressions (5) et (15) de v et de s_7, ces données entraînent, pour l'équation (25), les coefficients suivants :

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{a} = 5.6.7a, \qquad \mathbf{b} = 5.6(7a - 2b), \\ &\mathbf{c} = 3.7\left(2c - \frac{10}{7}b + 3a + \frac{63}{2}a^2\right), \qquad \mathbf{d} = 3.7\left(2d + \frac{63}{4}a^2\right)g_2. \end{aligned} \right.$$

33. Dans les formules qui vont suivre, j'écrirai simplement $\wp$, $\wp'$, ... au lieu de $\wp(u)$, $\wp'(u)$, ...

Au moyen des relations

$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2, \qquad \wp''' = 12\,\wp\wp', \qquad \wp^{\text{IV}} = 12(\wp'^2 + \wp\wp''),$$

on tire facilement des formules (XVI) les résultats suivants :

$$M = (\alpha\wp'' + \beta g_2)(\alpha_1\wp'' + \beta_1 g_2) + \gamma_1\wp\wp'^2,$$

$$\frac{1}{\wp'}R = \tau(\alpha\wp'' + \beta g_2)\wp + \gamma\wp'^2.$$

Les coefficients α, β, ... sont ainsi déterminés :

$$\alpha = \frac{4c - b}{3}, \qquad \beta = \frac{2d}{3}, \qquad \alpha_1 = \frac{b - c}{3}, \qquad \beta_1 = -\frac{d}{3}, \qquad \tau = \frac{b - 7c + 63ab}{7},$$

$$\gamma = -\frac{b}{2}\left[\frac{3}{2}b(a + 4b) + c - \frac{b}{7}\right],$$

$$\gamma_1 = b\left(\frac{4b}{7} - \frac{5c}{2} - 6ab\right).$$

La forme ci-dessus des expressions de M et R pouvait être prévue par raison d'homogénéité. En considérant p, p', p'', ... comme des poids 2, 3, 4 et g_2, g_3 comme des poids 4, 6, on devait trouver pour M et R des quantités homogènes, ayant les poids 8 et 9. Chaque quantité de poids impair doit contenir le facteur p'; et c'est ce qui a lieu pour R.

Sans effectuer les calculs, nous allons prévoir la forme des quantités qu'il reste à considérer.

La combinaison $M(R'+AR+BM)-R(M'+R)$ doit contenir le facteur v, par suite le facteur p'. Comme R contient ce facteur, il s'ensuit que $R'+AR+BM$ le contient aussi. Le quotient

$$\frac{1}{p'}(R'+AR+BM)$$

est du poids 7, par suite contient encore le facteur p'. On a donc

$$\frac{1}{p'^2}(R'+AR+BM)=\alpha_2 p''+\beta_2 g_2.$$

On aura aussi

$$-\frac{1}{p'}(M'+R)=(\alpha_3 p''+\beta_3 g_2)p+\gamma_3 p'^2.$$

Avec ces diverses expressions, on a, pour l'équation de condition :

$$\begin{aligned}(28)\quad (\alpha p''+\beta g_2)&[(\alpha_1 p''+\beta_1 g_2)(\alpha_2 p''+\beta_2 g_2)+\tau p^2(\alpha_3 p''+\beta_3 g_2)]\\ &+[\gamma_1(\alpha_2 p''+\beta_2 g_2)+\gamma(\alpha_3 p''+\beta_3 g_2)+\tau\gamma_3(\alpha p''+\beta g_2)]pp'^2\\ &+\gamma\gamma_3 p'^4=0.\end{aligned}$$

A propos des coefficients que je n'ai pas calculés jusqu'à présent, je ferai une simple observation : dans $-\frac{1}{p'}(M'+R)$, le terme en p'^2 provient de deux sources : 1° du terme analogue dans $-\frac{1}{p'}R$; 2° du dernier terme de M différentié. Par conséquent, on a :

$$(29)\qquad \gamma+\gamma_1+\gamma_3=0.$$

L'équation (28) doit avoir lieu identiquement. Je l'ai partagée en trois lignes. Si les modules g_2 et g_3 sont tous deux différents de zéro, ce que je suppose, chacune des trois lignes doit être nulle séparément, comme on le voit sans peine. Donc, l'un des coefficients γ, γ_3 doit être nul. Donc, deux catégories de solutions à rechercher.

34. L'hypothèse $\gamma=0$ conduit à deux solutions dans lesquelles R est identiquement zéro. L'une d'elles s'obtient par les seules sup-

positions $\gamma = 0$, $\tau = 0$. En effet, d'après (XVIII), on a :

$$(30) \qquad A = -\frac{2(\alpha p'' + \beta g_2)}{b p'}, \qquad B = -\frac{4\tau}{b} p.$$

Les quantités B, R étant nulles, l'équation de condition (XVII) est satisfaite d'elle-même.

Cette solution, qui laisse subsister deux arbitraires, nous conduit à l'équation (26), déjà connue, comme cela était évident. En effet, la circonstance $R = 0$, non accompagnée de $M = 0$, montre que λ est nul, et que, par conséquent, aucune transformation n'est nécessaire pour mettre l'équation sous la forme cherchée (24).

En fait, les équations $\gamma = 0$, $\tau = 0$ donnent

$$b = -\frac{7}{4} a, \qquad c = -\frac{a(1 + 63a)}{4},$$

et, par suite, les formules (27) entraînent, en posant $3.5.7 a = -\mathsf{e}$,

$$\mathsf{a} = -2\mathsf{e}, \qquad \mathsf{b} = -3\mathsf{e}, \qquad \mathsf{c} = -\mathsf{e},$$

comme il le fallait vérifier.

35. La seconde solution est fournie par les hypothèses

$$\gamma = 0, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma_1 = 0.$$

En ce cas, R et M sont tous deux nuls, et, par suite, N est nul aussi. Comme je l'ai observé déjà (n° 28), c'est le cas où la courbe attachée à l'équation est l'intersection complète de deux surfaces du second degré. Tous les coefficients sont ici déterminés :

$$a = -\frac{1}{2^4.7}, \qquad b = -\frac{1}{2^6}, \qquad c = -\frac{1}{2^8}, \qquad d = 0.$$

Les équations (27) conduisent ainsi à l'équation

$$(31) \qquad y^{\text{IV}} - \frac{15}{8} p(u) y'' - \frac{15}{16} p'(u) y' + \left[\frac{3^3}{2^{10}} g_2 - \frac{3.5.7}{2^9} p''(u)\right] y = 0.$$

A cette équation est attachée la courbe biquadratique ([1]).

Je vais achever l'application des calculs à cette équation (31). On

---

([1]) *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires*, p. 109 et 137. [*Œuvres d'Halphen*, t. III, p. 96 et 121.]

a déjà observé (n° 28) que l'inconnue λ, en ce cas spécial, reste indéterminée. Elle est fournie par la seule équation

$$\lambda' - \lambda^2 + A\lambda + B = 0,$$

qui devient

$$\rho'' + A\rho' = B\rho$$

si l'on fait $\lambda = -\frac{\rho'}{\rho}$. Or, d'après (30), cette dernière équation devient :

$$\rho'' = \frac{3}{4}p(u)\rho,$$

dont nous avons déjà employé l'intégrale générale au n° 13. C'est

$$\rho = p'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\mathbf{a} + \mathbf{b}\,p\left(\frac{u}{2}\right)\right].$$

Revenant à l'équation (II), nous avons

$$-4g\mu^2 = 6p_2 + 5B - \frac{5}{2}\lambda^2 = \frac{15}{8}p(u) - \frac{5}{2}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2,$$

$$g\mu^2 = -\frac{15}{32}p(u) + \frac{5}{8}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2.$$

La méthode générale consiste à trouver $c^2\mu^4$ par l'équation (VII); mais, pour simplifier le calcul, on observe qu'ayant

$$\lambda = -\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\mu'}{\mu},$$

on a μ à un coefficient numérique près; c'est l'inverse de ρ. L'équation (VII) sert à déterminer ce coefficient comme il suit.

Si l'on donne à u une valeur qui rende λ infini, la partie principale de $c^2\mu^4$, d'après (VII), est la même que celle de $\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{5}{2}\right)^2\lambda^4$. Ainsi $c\mu^2$ devient infini comme $\frac{3\lambda^2}{4}$. A cet infini correspond un zéro de ρ ou un infini, et le résidu ± 1 pour λ. Donc $\mu\sqrt{c}$ a le résidu ± 1. D'après cette observation, on pourra mettre $c\mu^2$ sous la forme suivante, où w désigne un argument arbitraire :

$$c\mu^2 = \frac{3\,p'\left(\frac{u}{2}\right)p'\left(\frac{w}{2}\right)}{16\left[p\left(\frac{u}{2}\right) - p\left(\frac{w}{2}\right)\right]^2}.$$

Écrivons l'expression de $g\mu^2$ sous une autre forme, en remplaçant $\frac{15}{32}p(u)$ par $\frac{5}{8}\frac{\rho''}{\rho}$. Il vient ainsi

$$g\mu^2 = \frac{5}{8}\left[\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 - \frac{\rho''}{\rho}\right] = \frac{5}{8}\lambda'.$$

Nous avons, en conséquence, pour l'équation du second ordre cherchée :

$$(32) \qquad \frac{d^2 z}{du^2} - \lambda\frac{dz}{du} = \left\{\frac{5}{8}\frac{d\lambda}{du} \pm \frac{3}{32}\frac{p'\left(\frac{u}{2}\right)p'\left(\frac{w}{2}\right)}{\left[p\left(\frac{u}{2}\right) - p\left(\frac{w}{2}\right)\right]^2}\right\} z,$$

formule où λ a la valeur suivante :

$$(33) \qquad \lambda = \frac{1}{4}\frac{p''\left(\frac{u}{2}\right)}{p'\left(\frac{u}{2}\right)} - \frac{1}{2}\frac{p'\left(\frac{u}{2}\right)}{p\left(\frac{u}{2}\right) - p\left(\frac{w}{2}\right)}.$$

36. Pour intégrer l'équation (32), changeons les variables. Prenons pour variable indépendante $\frac{1}{2}u$; en même temps, introduisons $\frac{w}{2}$ au lieu de w :

$$u = 2\alpha, \qquad w = 2\beta.$$

Soient aussi :

$$\omega = \frac{p'(\alpha)}{[p(\alpha) - p(\beta)]^2},$$

$$\lambda = \frac{1}{4\omega}\frac{d\omega}{d\alpha},$$

$$z = \omega^{\frac{1}{4}}\zeta,$$

et prenons ζ pour nouvelle inconnue. La transformée est l'équation suivante :

$$\frac{d^2\zeta}{d\alpha^2} = \left[\frac{1}{16\omega}\frac{d^2\omega}{d\alpha^2} \pm \frac{3}{8}\,\omega\, p'(\beta)\right]\zeta.$$

Le coefficient de ζ, étant développé, devient

$$\frac{3}{8}\left\{2\,p(\alpha) - \frac{p''(\beta)}{p(\alpha) - p(\beta)} + \frac{p'(\beta)[p'(\alpha) \pm p'(\beta)]}{[p(\alpha) - p(\beta)]^2}\right\} = \frac{3}{4}p(\alpha \mp \beta).$$

Ainsi la transformée n'est autre que

$$\frac{d^2\zeta}{d\alpha^2} = \frac{3}{4}p(\alpha \mp \beta)\zeta,$$

c'est-à-dire, sauf le changement de α en $\alpha \pm \beta$, la même équation que nous avons déjà rencontrée deux fois. Son intégrale est

$$\zeta = p'\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[\mathbf{a} + \mathbf{b}\, p'\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)\right].$$

Par suite, l'intégrale générale de (32) est :

$$z = \frac{p'\left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left[p\left(\frac{u}{2}\right) - p\left(\frac{w}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} p'\left(\frac{u \mp w}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[\mathbf{a} + \mathbf{b}\, p\left(\frac{u \mp w}{4}\right)\right].$$

Prenant deux valeurs de z qui répondent à des signes opposés de w, les multipliant entre elles et par le facteur $\mu^{-\frac{3}{2}}$, on a l'intégrale y de l'équation (31) sous la forme :

$$y = p'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \left[\frac{p\left(\frac{u}{2}\right) - p\left(\frac{w}{2}\right)}{p'\left(\frac{u-w}{4}\right) p'\left(\frac{u+w}{4}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \left[\mathbf{a} + \mathbf{b}\, p\left(\frac{u+w}{4}\right) + \mathbf{c}\, p\left(\frac{u-w}{4}\right) + \mathbf{d}\, p\left(\frac{u+w}{4}\right) p\left(\frac{u-w}{4}\right)\right].$$

Le second facteur est susceptible d'une transformation remarquable qui laisse apercevoir sa nature rationnelle; on a, en effet :

$$\frac{p(\alpha) - p(\beta)}{p'\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) p'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = -\frac{\left[p\left(\frac{\alpha}{2}\right) - p\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^4}{\left[p'\left(\frac{\alpha}{2}\right) p'\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^2}.$$

L'expression de y peut donc s'écrire :

$$y = p'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{\left[p\left(\frac{u}{4}\right) - p\left(\frac{w}{4}\right)\right]^2}{p'\left(\frac{u}{4}\right)}$$
$$\times \left[\mathbf{a} + \mathbf{b}\, p\left(\frac{u+w}{4}\right) + \mathbf{c}\, p\left(\frac{u-w}{4}\right) + \mathbf{d}\, p\left(\frac{u+w}{4}\right) p\left(\frac{u-w}{4}\right)\right].$$

Cette formule, où w est arbitraire, ne gagne pas en généralité à ce qu'on y laisse cette arbitraire subsister. Un facile examen permet de

la réduire à la forme suivante :

$$(34)\qquad y = \wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}\,\wp\left(\frac{u}{4}\right) + \mathbf{c}\,\wp'\left(\frac{u}{4}\right) + \mathbf{d}\,\wp''\left(\frac{u}{4}\right)}{\wp'\left(\frac{u}{4}\right)}.$$

Telle est la solution de l'équation (31).

L'arbitraire ϖ correspond à chacune des surfaces du second degré passant par la courbe biquadratique. Quatre de ces surfaces se réduisent à des cônes. On retrouve cette circonstance dans l'équation (32), qui cesse d'être ambiguë quand ϖ est une période.

37. Toute équation, pour laquelle les invariants M et N sont nuls, est une transformée de (31). Pour avoir la solution d'une telle équation, il n'y a donc qu'à trouver les variables u et y en fonction de X et Y. On y arrive aisément par le calcul des invariants absolus dans (31).

D'après les valeurs de b, c (n° 35), on a, pour l'équation (31) :

$$v = -\frac{1}{2^6}\wp'(u), \qquad s_7 = -\frac{1}{2^8}\wp''(u).$$

Il en résulte :

$$s_8 = \frac{1}{8}\left(v s'_7 - \frac{4}{3} v' s_7\right) = \frac{1}{2^{17}}[\wp''^2(u) - \wp'(u)\,\wp'''(u)].$$

On a d'ailleurs (IX) :

$$0 = \mathrm{M} = s_8 + 2t_7 + \frac{1}{6}s_7^2;$$

on en peut tirer t_7, et en conclure :

$$4t_7 + \frac{5}{3}s_7^2 = \frac{1}{2^{16}}\wp'\wp''' = \frac{3}{2^{14}}\wp\wp'^2.$$

En considérant les deux invariants absolus suivants, Ω, Ω_1 :

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} 12 + \frac{18v^4 s_7}{\left(t_7 + \frac{5}{12}s_7^2\right)^2} &= \frac{1}{\Omega},\\ -\frac{1}{3}\,\frac{s_7\left(t_7 + \frac{5}{12}s_7^2\right)}{v^4} &= \Omega_1,\end{aligned}\right.$$

on trouve ainsi :

$$\Omega = \frac{\wp^2(u)}{g_2}, \qquad \Omega_1 = \frac{\wp(u)\,\wp''(u)}{\wp'^2(u)}.$$

Il en résulte les formules suivantes :

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{g_3^2}{g_2^3} = \dfrac{\Omega\left[(6-4\Omega_1)\Omega+\Omega_1-\dfrac{1}{2}\right]^2}{\Omega_1^2}, \\[2ex] p(u) = -\dfrac{g_3}{g_2}\,\dfrac{\Omega_1}{(6-4\Omega_1)\Omega+\Omega_1-\dfrac{1}{2}}. \end{cases}$$

En conséquence : *pour une équation dans laquelle les invariants* (IX) M *et* N *sont nuls, l'intégrale générale est une fonction algébrique des coefficients et sa représentation par les fonctions elliptiques s'obtient ainsi :*

Au moyen des invariants absolus (35) *on calcule par les formules* (36) *le module et l'argument; et l'on a pour l'intégrale générale*

$$Y = \left[\frac{p'(u)}{V}\right]^{\frac{3}{2}} y,$$

où y *est donné par la formule* (34). Dans cet énoncé, *l'équation est supposée privée de son second terme.*

38. J'ai (n° 33) partagé les systèmes de constantes a, b, c, d qui rendent identique l'équation (28), en deux groupes : ceux qui font évanouir γ, et ceux qui font évanouir γ_3. Dans le premier de ces groupes, nous venons d'étudier deux cas. Une discussion facile fait reconnaître que ce groupe ne contient aucun autre système favorable. J'omets ici cette discussion, pour abréger, à cause de son résultat négatif; j'examine maintenant l'hypothèse $\gamma_3 = 0$.

L'égalité (29) donne ici $\gamma = -\gamma_1$. Donc l'évanouissement des termes composant la seconde ligne de (28) exige les conditions

$$(37)\qquad \alpha_2 = \alpha_3, \qquad \beta_2 = \beta_3;$$

puis l'évanouissement de la première ligne exige la condition double :

$$\alpha_1 p'' + \beta_1 g_2 = -\tau p^2 = \alpha_1\left(6p^2 - \frac{1}{2}g_2\right) + \beta_1 g_2.$$

Les conditions sont donc, outre (37), les suivantes :

$$(38)\qquad \gamma+\gamma_1 = 0, \qquad 6\alpha_1 = -\tau, \qquad \alpha_1 = 2\beta_1.$$

Mais je vais montrer que les conditions (37) sont comprises dans les relations (38). A cet effet, je forme, pour ce cas, l'équation (28) par un calcul direct, en substituant λ dans la relation

$$\lambda' - \lambda^2 + A\lambda + B = 0.$$

D'après (38), les valeurs de M et R (n° 33) donnent, pour λ, un expression très simplifiée :

$$\lambda = \frac{R}{M} = -\frac{p'}{p}.$$

En tenant compte des expressions (30) de A et B, on a ainsi :

$$\lambda' - \lambda^2 + A\lambda + B = -\frac{1}{bp}[bp'' - 2(\alpha p'' + \beta g_2) + 4\tau p^2].$$

A cause de (38), la parenthèse peut s'écrire

$$bp'' - 2(\alpha p'' + \beta g_2) + 4(\alpha_1 p'' + \beta_1 g_2),$$

et se réduit à zéro, d'après les valeurs de α, α_1, β, β_1 (n° 33). Il est donc établi que les trois conditions (38) suffisent. Elles laissent subsister une arbitraire b, et donnent

$$a = -\frac{4}{21}\left(b + \frac{1}{2}\right), \qquad c = \frac{b}{7}(3 - 4b), \qquad d = -\frac{2b(b+1)}{7}.$$

En employant les formules (27), et désignant $5b + 1$ par $\frac{n(n+1)}{2}$, on a, de la sorte, l'équation suivante :

$$(39) \qquad y^{\text{IV}} - 4(n^2 + n + 3)p(u)y'' - 10n(n+1)p'(u)y' + 3g_2 y = 0.$$

Voici donc une nouvelle équation dont les intégrales sont liées par une relation quadratique. La constante n est arbitraire.

39. En achevant les calculs, nous allons trouver les équations du second ordre auxquelles se ramène l'équation (39).

La relation II (n° 26) nous donne ici :

$$g\mu^2 = (n+2)(n-1)p(u) - \frac{5}{8}\frac{g_3}{p^2(u)}.$$

D'après la valeur de λ, μ ne diffère de $\frac{1}{p(u)}$ que par un coefficient constant. Nous déterminons ce coefficient au moyen de la rela-

tion (VII), comme nous l'avons fait, dans un cas analogue, au n° 36, et nous trouvons

$$c\mu^2 = \pm \frac{3}{4}\,\frac{g_3}{p^2(u)}.$$

Nous parvenons ainsi à l'équation ambiguë :

$$\frac{d^2 z}{du^2} + \frac{p'(u)}{p(u)}\frac{dz}{du} = \left[(n+2)(n-1)\,p^3(u) - \frac{5}{8}g_3 \pm \frac{3}{8}g_3\right]\frac{z}{p^2(u)}.$$

Ici nous distinguerons les équations données par les deux signes. Pour le signe +, nous changerons de variable en posant

$$z = \eta\,p^{-\frac{1}{2}}(u).$$

La transformée n'est autre que l'équation de Lamé :

$$(40) \qquad \frac{d^2\eta}{du^2} = n(n+1)\,p(u)\eta.$$

Pour l'équation au signe —, en appelant z_1 l'inconnue, nous ferons

$$z_1 = \zeta\,p(u)^{-1},$$

et voici la transformée :

$$(41) \qquad p(u)\frac{d^2\zeta}{du^2} - p'(u)\frac{d\zeta}{du} = \left[n(n+1)\,p^2(u) + \frac{1}{2}g_2\right]\zeta.$$

On aura, d'autre part,

$$y = \mu^{-\frac{3}{2}} z z_1 = p(u)^{\frac{3}{2}}\,p(u)^{-\frac{1}{2}}\eta\,p(u)^{-1}\zeta = \eta\zeta.$$

Donc *l'équation* (39) *a pour intégrales les produits des intégrales des équations* (40) *et* (41) *entre elles.*

40. Parmi les cas où l'on peut intégrer les équations (40) et (41), j'en veux d'abord signaler à part le plus intéressant, qui présente un caractère singulier. C'est celui où l'on suppose $n = \frac{1}{2}$. L'équation (40), nous l'avons déjà dit, a l'intégrale générale

$$\eta = p'(u)^{-\frac{1}{2}}\left[\mathbf{a} + \mathbf{b}\,p\left(\frac{u}{2}\right)\right].$$

Quant à l'équation (41), son intégrale, que nous vérifierons plus

loin (n° 48), est

$$\zeta = \mathrm{p}'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left\{ \mathrm{a}_1 \left[\mathrm{p}\left(\frac{u}{2}\right)^3 + \frac{1}{4} g_2 \mathrm{p}\left(\frac{u}{2}\right) - g_3 \right] + b_1 \left[\mathrm{p}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} g_2 \right] \right\}.$$

Multipliant entre elles les intégrales η, ζ correspondant à

$$\mathrm{a} = 1, \quad \mathrm{b} = 0; \quad \mathrm{a}_1 = 1, \quad \mathrm{b}_1 = 0;$$

puis celles qui correspondent à

$$\mathrm{a} = 0, \quad \mathrm{b} = -1; \quad \mathrm{a}_1 = 0, \quad \mathrm{b}_1 = 1;$$

et ajoutant les deux produits, nous formons l'intégrale particulière de (39)

$$y = \frac{1}{\mathrm{p}'^2\left(\frac{u}{2}\right)},$$

qui suffit seule à trouver toutes les autres. En effet, la double périodicité des coefficients, dans l'équation (39), montre que, en ajoutant des périodes à une intégrale, on reproduit encore une intégrale.

L'homogénéité de l'équation (39) permet, par le changement de u en cu, de supposer

$$\mathrm{p}(u) = -\frac{1+k^2}{3} + \frac{1}{\mathrm{sn}^2 u}.$$

L'addition des périodes, dans l'intégrale ci-dessus, donne alors *l'intégrale générale de* (39), *pour* $n = \frac{1}{2}$, sous la forme ([1])

$$y = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}\,\mathrm{sn}^8 \frac{u}{2} + \mathrm{C}\,\mathrm{cn}^8 \frac{u}{2} + \mathrm{D}\,\mathrm{dn}^8 \frac{u}{2}}{\mathrm{sn}^2 \frac{u}{2} \mathrm{cn}^2 \frac{u}{2} \mathrm{dn}^2 \frac{u}{2}}.$$

Les intégrales sont proportionnelles à quatre polynomes du quatrième degré par rapport à la variable $\mathrm{p}\left(\frac{u}{2}\right)$. Ainsi, *la courbe atta-*

([1]) L'équation (39) est un cas particulier d'une équation intégrée dans mon mémoire *Sur la réduction des équations différentielles* (p. 274 et suiv.). Malheureusement, une faute, dans le calcul des coefficients de cette équation (en haut de la page 274), faute qu'il est aisé de corriger, masque la coïncidence de l'équation (39) avec celle qui se rencontre dans le mémoire cité. [*Œuvres d'Halphen*, t. III, p. 240, où la correction indiquée ci-dessus par Halphen a été faite.] C'est pour $\alpha = 4$ que l'équation (A) de la page 240 coïncide avec l'équation (39) de la page 504, où l'on suppose $n = \frac{1}{2}$. *Note des éditeurs.*

chée à l'équation (39), *pour* $n = \frac{1}{2}$, *est la courbe gauche unicursale du quatrième degré.* Cette courbe est, on le sait, l'intersection d'une surface du second degré et d'une surface du troisième degré, qui ont en commun deux droites ne se rencontrant pas. La dernière forme de l'intégrale, si l'on fait $\mathrm{sn}^2 \frac{u}{2} = t$, donne

$$\frac{y_1}{1} = \frac{y_2}{t^4} = \frac{y_3}{(1-t)^4} = \frac{y_4}{(1-k^2t)^4},$$

et met en évidence les quatre plans osculateurs stationnaires.

41. Voici maintenant, sur la même équation, une dernière remarque. En faisant $n = \frac{1}{2}$, nous voyons qu'elle s'écrit :

$$y^{\text{IV}} - 15\,\mathrm{p}(u)y'' - \frac{15}{2}\mathrm{p}'(u)y' + 3g_2 y = 0.$$

C'est un cas de l'équation

$$y^{\text{IV}} - 4gy'' - 2g'y' + c^2 y = 0,$$

envisagée au n° 25, adjointe de l'équation type (24). Ainsi l'équation actuelle est l'adjointe de l'équation (24), où l'on prend

$$g = \frac{15}{4}\mathrm{p}(u), \qquad c^2 = 3g_2.$$

D'après le n° 25, considérons les équations

$$\varphi'' = \left[\frac{15}{2}\mathrm{p}(u) - \frac{\sqrt{3g_2}}{2}\right]\varphi, \qquad \psi'' = \left[\frac{15}{4}\mathrm{p}(u) + \frac{\sqrt{3g_2}}{2}\right]\psi,$$

et nous aurons

$$y = \varphi\psi' - \psi\varphi'.$$

Déjà, au n° 22, nous avons indiqué les intégrales φ et ψ. En les employant, nous retrouverons l'intégrale y. C'est un calcul facile sur lequel je ne veux pas insister. On remarquera cette conséquence géométrique : *la développable, dont l'arête de rebroussement est la courbe unicursale du quatrième degré, est circonscrite à une surface du second degré.* On n'aurait qu'à achever le calcul précédent pour trouver l'équation de cette seconde surface, différente, bien entendu, de celle sur laquelle se trouve la courbe elle-même.

42. Voici un second cas de l'équation (39) qui mérite une mention spéciale; c'est le cas $n=1$. L'équation est alors

$$y^{\text{IV}} - 20\,\mathrm{p}(u)y'' - 20\,\mathrm{p}'(u)y' + 3g_2 y = 0.$$

L'invariant ν est nul. Par conséquent, c'est une transformée d'équation à coefficients constants.

Effectivement, les formules du n° 39 donnent ici, en supposant $c=1$, ce qui est permis :

$$g\mu^2 = -\frac{5}{8}\,\frac{g_3}{\mathrm{p}^2(u)}, \qquad \mu^2 = \frac{3}{4}\,\frac{g_3}{\mathrm{p}^2(u)},$$

$$g = -\frac{5}{6}.$$

En employant la variable x, qui attribue aux équations du second ordre la forme primitive, on a :

$$\frac{dx}{du} = \frac{\sqrt{3g_3}}{2\,\mathrm{p}(u)}, \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = \left(-\frac{5}{6} \pm \frac{1}{2}\right)z.$$

Ainsi, en posant

$$\alpha = \frac{ix}{\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{g_3}}{2}\int\frac{du}{\mathrm{p}(u)},$$

on a, pour l'équation au signe $+$, les intégrales $e^{\pm\alpha}$; et, pour l'équation au signe $-$, les intégrales $e^{\pm 2\alpha}$.

Par suite, les intégrales y sont

$$y = \mathrm{p}^3(u)\,(\mathrm{a}\,e^{-3\alpha} + \mathrm{b}\,e^{-\alpha} + \mathrm{c}\,e^{\alpha} + \mathrm{d}\,e^{3\alpha}),$$

proportionnelles, comme on voit, à quatre puissances consécutives d'une même quantité $e^{2\alpha}$. L'équation est donc un cas particulier de l'équation (13). Effectivement, c'est un cas de l'exemple cité au n° 13.

La quadrature, par laquelle s'obtient α, peut être effectuée comme il suit.

En employant les notations usuelles

$$\mathrm{p}(u) = -\zeta'(u) = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u),$$

on a la formule fondamentale

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{p}'(u) - \mathrm{p}'(w)}{\mathrm{p}(u) - \mathrm{p}(w)} = \zeta(u+w) - \zeta(u) - \zeta(w).$$

Supposant $p(w) = 0$, ce qui entraîne $p'(w) = \pm i\sqrt{g_3}$, on en déduit

$$\pm \frac{i\sqrt{g_3}}{2}\int \frac{du}{p(u)} = \log \frac{e^{-u\zeta(w)}\sigma(u+w)}{p(u)^{\frac{1}{2}}\sigma(u)} = \pm \alpha.$$

Les deux signes de α correspondent aux deux signes de w. On déduit de là une nouvelle forme des intégrales z, et, d'après les notations du n° 39,

$$(42) \qquad \eta = e^{-u\zeta(w)}\frac{\sigma(u+w)}{\sigma(u)},$$

pour intégrale de l'équation (40), savoir

$$\frac{d^2\eta}{du^2} = 2\,p(u)\eta.$$

On retrouve bien ainsi l'intégrale de ce cas particulier de l'équation de Lamé sous la forme habituelle d'une fonction doublement périodique de seconde espèce, forme adoptée par M. Hermite.

L'équation (41), pour ce cas $n = 1$, est en même temps intégrée. Ainsi l'équation

$$p(u)\frac{d^2\zeta}{du^2} - p'(u)\frac{d\zeta}{du} = \left[2\,p^2(u) + \frac{1}{2}g_2\right]\zeta$$

a les deux intégrales η^2 obtenues en mettant, dans (42), l'une ou l'autre racine de $p(w) = 0$.

43. Mentionnons encore, pour l'équation (39), le cas $n = 0$, dans lequel l'équation (41) présente une circonstance curieuse. C'est

$$p(u)\frac{d^2\zeta}{du^2} - p'(u)\frac{d\zeta}{du} = \frac{1}{2}g_2\zeta.$$

En différentiant aux deux membres, on obtient, par disparition du facteur $p(u)$, le résultat suivant :

$$\frac{d^3\zeta}{du^3} = 6\,p(u)\frac{d\zeta}{du}.$$

La dérivée de ζ est ainsi l'intégrale d'une équation de Lamé. L'intégrale de cette équation se présentant d'elle-même sous la forme d'une dérivée, on a immédiatement ζ :

$$\zeta = \frac{\sigma(u+w)}{\sigma(u)}e^{-\left[\frac{p'(w)}{2\,p(w)}+\zeta(w)\right]u},$$

l'argument ϖ étant l'une ou l'autre racine de $p(\varpi) = -\frac{g_3}{g_2}$ (¹). Soient ζ_1 et ζ_2 les deux fonctions comprises dans cette formule, on a, pour l'équation

$$y^{\text{IV}} - 12\,p(u)\,y'' + 3g_2\,y = 0,$$

les intégrales ζ_1, ζ_2, $u\zeta_1$, $u\zeta_2$.

44. L'équation (40) est intégrable quand n est un nombre entier. Il en est tout autant de l'équation (41). Effectivement, ses points singuliers s'obtiennent quand u est une période, ou bien une racine de $p(u)$. Les racines de $p(u)$ ne fournissent pas de point singulier pour l'équation (40), ni pour l'équation (39); comme on a d'ailleurs $y = \eta\zeta$, il en résulte que ζ reste uniforme aux environs d'une telle racine. D'autre part, quand u est une période, l'équation caractéristique de (41) a les racines n et $-(n+1)$, dont la différence est impaire. Comme les coefficients de $\frac{d^2\zeta}{du^2}$ et de ζ sont des fonctions paires et celui de $\frac{d\zeta}{du}$ une fonction impaire, la différence impaire des deux racines n'entraîne aucune condition subsidiaire pour l'existence d'intégrales appartenant à des exposants égaux à ces racines. Donc les intégrales de l'équation (41) sont des fonctions uniformes de la variable u, et l'on pourra, pour chaque valeur entière de n, les trouver par une méthode analogue à celle de l'équation de Lamé.

En conséquence, *l'équation* (39), que je transcris ici,

$$y^{\text{IV}} - 4(n^2+n+3)\,p(u)\,y'' - 10\,n(n+1)\,p'(u)\,y' + 3g_2\,y = 0,$$

a son intégrale uniforme, partant est intégrable, quand n est un nombre entier.

Ce résultat mérite d'être remarqué, pour la raison suivante. Au point singulier, l'équation caractéristique a les racines 0, 6 et $\pm(2n+1)$. Les différences paires, d'après la forme de l'équation, n'impliquent des intégrales appartenant à des exposants égaux aux racines que sous le bénéfice d'une condition subsidiaire. Or on n'a aucun moyen direct, ce me semble, de vérifier cette condition à l'égard des deux dernières racines, dont la différence est $4n+2$,

(¹) *Mémoire sur la réduction des équations différentielles*, p. 99. [*Œuvres d'Halphen*, t. III, p. 88.]

tandis que, par l'analyse précédente, on est assuré de l'existence de ces intégrales.

45. J'ai terminé l'examen des applications que j'avais en vue de traiter ici; il ne me reste, pour finir ce mémoire, qu'à expliquer comment s'intègrent deux équations du deuxième ordre, rencontrées dans le cours de ce travail et dont j'ai supposé connues les intégrales.

L'équation de Lamé

$$\frac{d^2 z}{du^2} = [n(n+1)p(u)+\alpha]z \tag{43}$$

s'intègre par les fonctions elliptiques de seconde espèce dans le cas où n est un nombre entier, quelle que soit d'ailleurs l'arbitraire α. Elle a donné lieu, pour ce cas, à des études dues à M. Hermite. Mais, en outre, elle est intégrable aussi quand n est la moitié d'un nombre entier, pourvu que la constante α soit convenablement choisie. Dans un tel cas, l'intégrale est, en quelque sorte, plus simple qu'au cas précédent : c'est, au facteur $p'\left(\frac{u}{2}\right)^{-n}$ près, un polynome entier de la variable $p\left(\frac{u}{2}\right)$. Ce polynome contient une constante arbitraire, et son degré est égal à $2n$.

Deux cas de cette proposition ont été utilisés dans le mémoire actuel; ce sont les cas $n=\frac{1}{2}$ et $n=\frac{3}{2}$. Je vais établir ici, à nouveau, ce résultat qui se trouve d'ailleurs prouvé différemment dans mon mémoire *Sur la réduction des équations différentielles* (1).

46. Soient : m un nombre entier; a, b, c des constantes données, et A, B, C, P quatre polynomes inconnus, tous quatre du degré $m-1$ par rapport à une variable x. Pour fixer les idées, nous supposerons, dans chacun des polynomes, le coefficient unité pour le terme en x^{m-1}. On peut généralement trouver ces quatre polynomes de telle sorte que P, $(x-a)^m$A, $(x-b)^m$B, $(x-c)^m$C, soient liés par deux relations linéaires homogènes.

Effectivement, c'est là un problème déterminé, les quatre polynomes et les quatre constantes des deux relations linéaires four-

(1) [*Œuvres d'Halphen*, t. III, p. 93].

nissant $4m$ inconnues, tandis que les deux relations linéaires fournissent $4m$ équations.

Étant liés par deux relations linéaires, les quatre polynomes P, $(x-a)^m A$, $(x-b)^m B$, $(x-c)^m C$, sont les intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Soient α, β deux quelconques de ces polynomes; l'équation a la forme

$$(\alpha\beta')y'' - (\alpha\beta'')y' + (\alpha'\beta'')y = 0.$$

En prenant pour α le polynome P, on voit que les degrés des coefficients sont, dans leur ordre respectif, $3m-3$, $3m-4$, $3m-5$. Si β est le polynome $(x-a)^m A$, la racine a est multiple, dans ces polynomes, aux ordres respectifs $(m-1)$, $(m-2)$, $(m-2)$. Comme on peut prendre, au lieu de $(x-a)^m A$, chacun des deux autres polynomes analogues, la même conclusion subsiste pour b et c. Soit donc

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c);$$

les trois coefficients contiennent respectivement le facteur $f(x)$ avec les exposants $(m-1)$, $(m-2)$, $(m-2)$. Le facteur commun supprimé, on voit que le premier coefficient est $f(x)$. Le second coefficient, avant la suppression du facteur, était la dérivée du premier, changée de signe; il se réduit donc maintenant à $-(m-1)f'(x)$. Le dernier coefficient est du premier degré, et peut s'écrire, on le voit aisément, $\frac{(2m-1)(m-1)}{6}f''(x)+\beta$, où β est une constante dont la valeur n'est pas immédiatement connue. Ainsi :

$f(x)$ étant un polynome du troisième degré, on peut choisir la constante β de telle manière que l'équation

$$(44)\quad f(x)y'' - (m-1)f'(x)y' + \left[\frac{(2m-1)(m-1)}{6}f''(x)+\beta\right]y = 0$$

ait pour intégrale générale un polynome entier.

Cette intégrale est du degré $(2m-1)$; un de ses cas particuliers se réduit au degré $(m-1)$. Cette intégrale particulière peut servir à déterminer β.

Effectivement, l'équation différentielle fournit une relation récurrente, à quatre termes, entre les coefficients de l'intégrale. En formant cette relation, on trouvera aisément que l'existence d'une solution, du degré $(m-1)$, conduit à une équation de condition.

Cette équation est, par rapport à l'inconnue β, du degré m. Ainsi *la constante* β *est donnée par une équation du* $m^{\text{ième}}$ *degré.*

On peut remarquer comment l'intervention de l'équation différentielle vient éclairer la solution du problème d'algèbre, posé au début. Voici, en effet, la conclusion : *les coefficients des polynomes inconnus* A, B, C, P *sont fonctions entières de la racine d'une équation de degré* m.

47. L'équation de Lamé (43), où l'on suppose n égal à la moitié d'un nombre entier, se réduit à la forme (44), par un changement des variables.

Soient, dans l'équation (43),

$$n = m - \frac{1}{2}, \qquad \wp\left(\frac{u}{2}\right) = x, \qquad z = y\,\wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-m+\frac{1}{2}}.$$

En faisant usage de la formule de duplication :

$$\wp(u) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp''\left(\frac{u}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)}\right]^2 - 2\,\wp\left(\frac{u}{2}\right),$$

on trouvera, pour la transformée,

$$(4x^3 - g_2 x - g_3)y'' - (m-1)(12x^2 - g_2)y' \\ + 4[(2m-1)(m-1)x - \alpha]y = 0.$$

C'est précisément la forme (44). Donc *l'équation* (43), *où* n *est la moitié d'un nombre entier, soit* $\left(m - \frac{1}{2}\right)$, *a pour intégrale générale le produit de* $\wp'\left(\frac{u}{2}\right)^{-n}$ *par un polynome entier en* $\wp\left(\frac{u}{2}\right)$, *du degré* $(2m-1)$. *Un cas particulier de ce polynome se réduit au degré* $(m-1)$. *La constante* α *n'est pas arbitraire; c'est la racine d'une équation de degré* m.

Pour $m = 1$, il est manifeste que α doit être nulle. La transformée est $y'' = 0$. Pour $m = 2$, le calcul est très simple, et mène au résultat que nous avons appliqué au n° 22; la constante α est $\pm\frac{\sqrt{3g_2}}{2}$. Il n'y a pas lieu d'examiner ici d'autres cas.

48. J'ai utilisé (n° 40) l'intégrale de l'équation

$$\mathrm{p}(u)\frac{d^2\zeta}{du^2} - \mathrm{p}'(u)\frac{d\zeta}{du} = \left[\frac{3}{4}\mathrm{p}^2(u) + \frac{1}{2}g_2\right]\zeta.$$

On peut la vérifier facilement ainsi. Posant

$$\mathrm{p}\left(\frac{u}{2}\right) = x, \qquad \zeta = y\,\mathrm{p}'\left(\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}},$$

on obtient la transformée

$$\begin{aligned}&\left(x^4 + \frac{1}{2}g_2x^2 + 2g_3x + \frac{1}{16}g_2^2\right)y'' \\ &\quad - 2\left(2x^3 + \frac{1}{2}g_2x + g_3\right)y' + \left(6x^2 - \frac{1}{2}g_2\right)y = 0,\end{aligned}$$

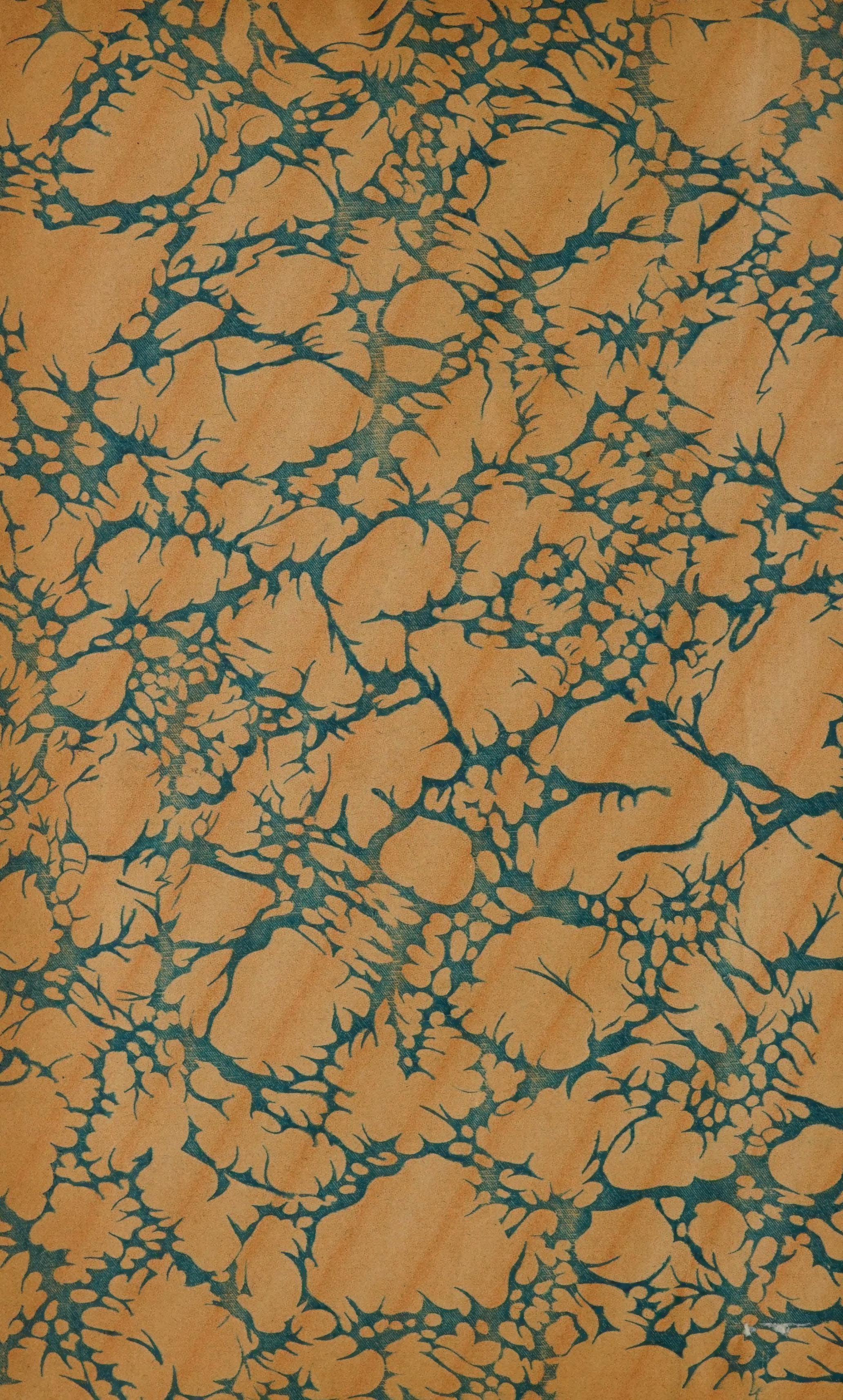
dont l'intégrale générale est

$$y = \mathbf{a}\left(x^3 + \frac{1}{4}g_2x - g_3\right) + \mathbf{b}\left(x^2 + \frac{1}{4}g_2\right).$$

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

59392-21 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.




. E. Stechert & Co.
Alfred Hafner
New York